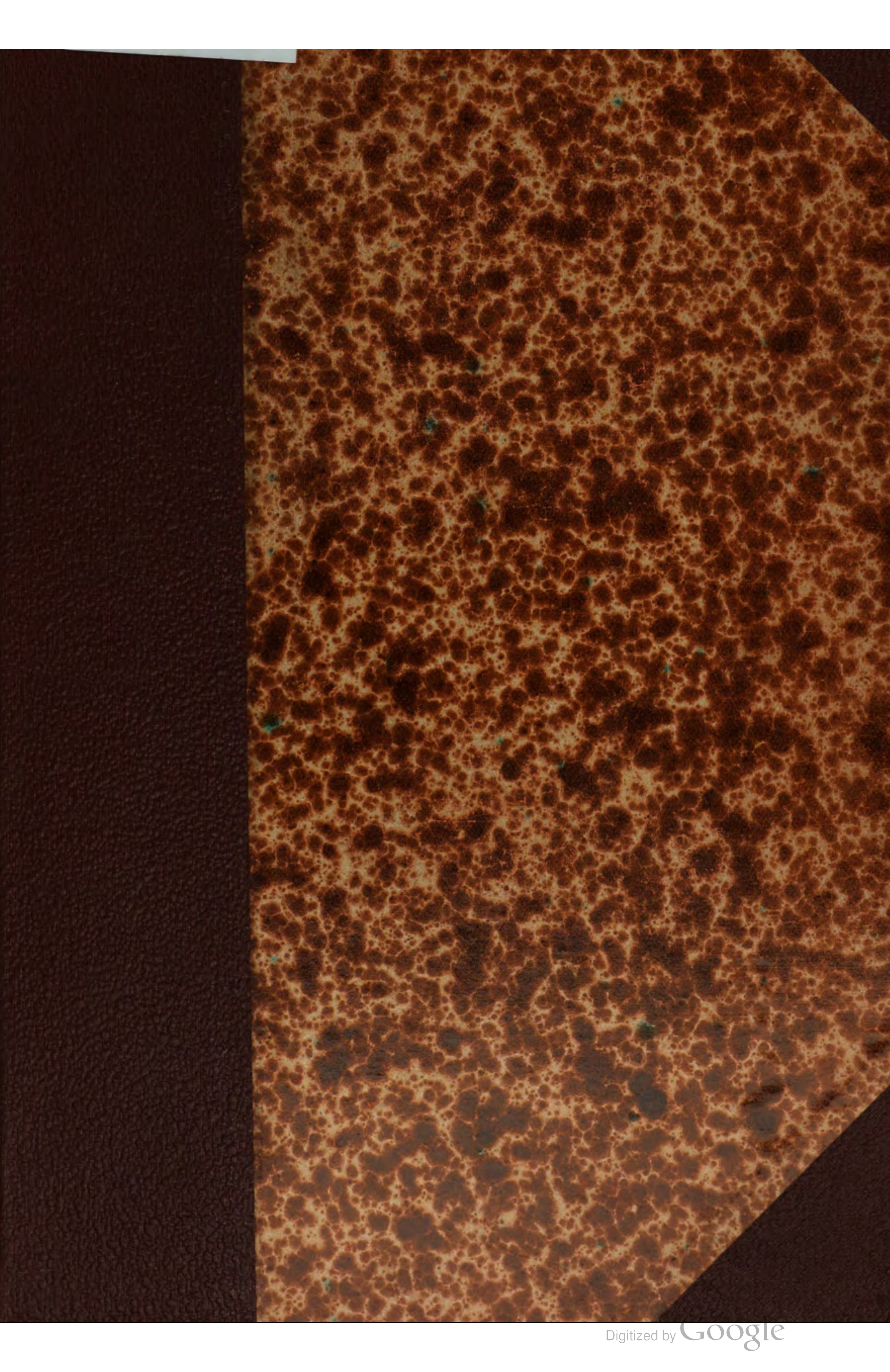
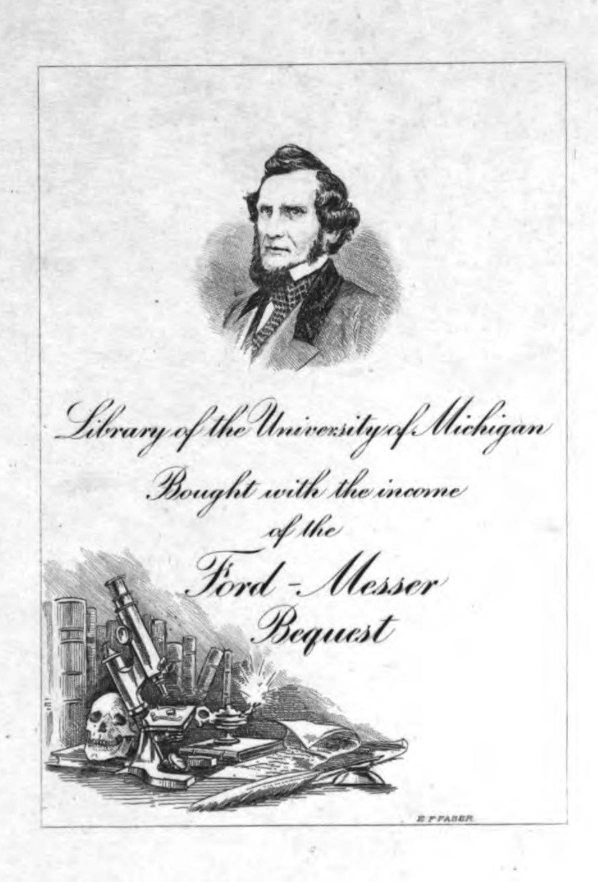
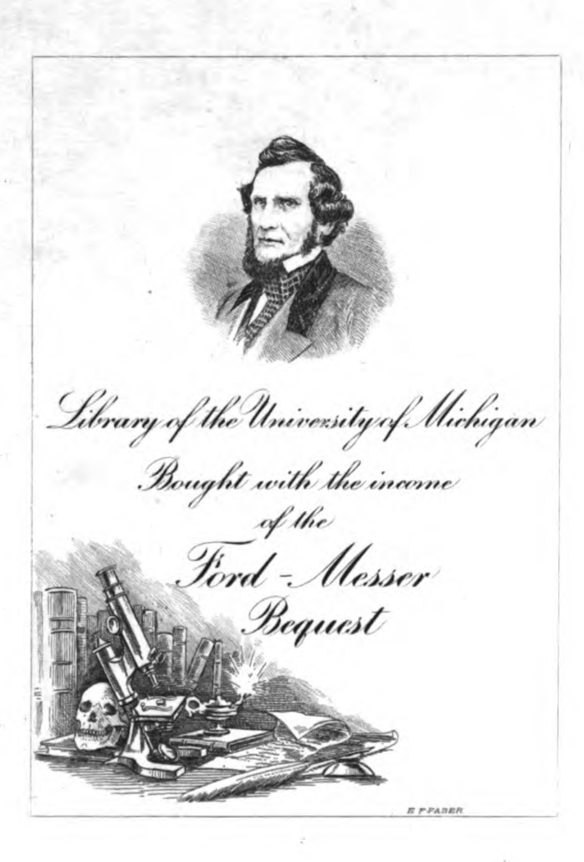
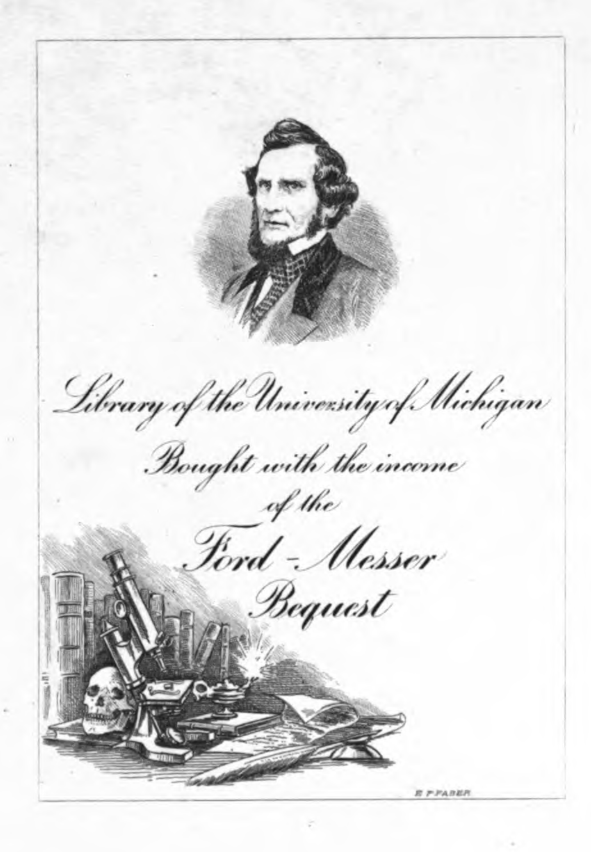



Library of the University of Michigan
Bought with the income
of the
Ford - Messer
Bequest
E P FABER


Library of the University of Michigan
Bought with the income
of the
Ford - Messer
Bequest
E P FABER


Library of the University of Michigan
Bought with the income
of the
Ford - Messer
Bequest
E P FABER

SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

DE BRUXELLES

Bruxelles. — HAYEZ, imp. de l'Acad royale.

ANNALES

DE LA

SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

DE BRUXELLES

Nulla unquam inter fidem et rationem vera dissensio esse potest.

CONST. DE FID. CATH., C. IV.

VINGT ET UNIÈME ANNÉE, 1896-1897

LOUVAIN

SECRÉTARIAT DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

(M. J. THIRION)

11, Rue des Récollets, 11

Administration : Bureaux de la Société scientifique
56, Rue de l'Est, à Bruxelles

1897

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE

DOCUMENTS ET COMPTES RENDUS

COMMUNICATIONS DIVERSES

CONFÉRENCES

AUTEURS

SECONDE PARTIE

MÉMOIRES

Pages.

AUTEURS

PREMIÈRE PARTIE

DOCUMENTS ET COMPTES RENDUS

STATUTS

ARTICLE 1er. — Il est constitué à Bruxelles une association qui prend le nom de Société scientifique de Bruxelles, avec la devise: « *Nulla unquam inter fidem et rationem vera dissensio esse potest* » (1).

ART. 2. — Cette association se propose de favoriser, conformément à l'esprit de sa devise, l'avancement et la diffusion des sciences.

ART. 3. — Elle publiera annuellement le compte rendu de ses réunions, les travaux présentés par ses membres et des rapports sommaires sur les progrès accomplis dans chaque branche.

Elle tâchera de rendre possible la publication d'une revue destinée à la vulgarisation (2).

ART. 4. — Elle se compose d'un nombre illimité de membres, et fait appel à tous ceux qui reconnaissent l'importance d'une culture scientifique sérieuse pour le bien de la société.

---

(1) Const. de Fid. cath., c. IV.

(2) Depuis le mois de janvier 1877, cette revue paraît, par livraisons trimestrielles, sous le titre de *Revue des questions scientifiques*. Elle forme chaque année deux volumes in-8° de 700 pages. Prix de l'abonnement: 20 francs par an pour tous les pays de l'Union postale. Les membres de la Société scientifique ont droit à une réduction de 25 pour cent.



Art. 5. — Elle est dirigée par un *Conseil* de vingt membres, élus annuellement dans son sein. Le Président, les Vice-Présidents, le Secrétaire et le Trésorier font partie de ce Conseil. Parmi les membres du Bureau, le Secrétaire et le Trésorier sont seuls rééligibles.

Art. 6. — Pour être admis dans l'association, il faut être présenté par deux membres. La demande, signée par ceux-ci, est adressée au Président, qui la soumet au Conseil. L'admission n'est prononcée qu'à la majorité des deux tiers des voix.

L'exclusion d'un membre ne pourra être prononcée que pour des motifs graves et à la majorité des deux tiers des membres du Conseil.

Art. 7. — Les membres qui souscrivent, à une époque quelconque, une ou plusieurs parts du capital social, sont *membres fondateurs*. Ces parts sont de 500 francs. Les *membres ordinaires* versent une cotisation annuelle de 15 francs, qui peut toujours être rachetée par une somme de 150 francs, versée une fois pour toutes.

Le Conseil peut nommer des *membres honoraires* parmi les savants étrangers à la Belgique.

Les noms des membres fondateurs figurent en tête des listes par ordre d'inscription, et ces membres reçoivent autant d'exemplaires des publications annuelles qu'ils ont souscrit de parts du capital social. Les membres ordinaires et les membres honoraires reçoivent un exemplaire de ces publications.

Tous les membres ont le même droit de vote dans les Assemblées générales.

Art. 8. — Chaque année il y a trois sessions. La principale se tiendra dans la quinzaine qui suit la fête de Pâques et pourra durer quatre jours. Le public y sera admis sur la présentation de cartes. On y lit les rapports annuels et l'on y nomme le Bureau et le Conseil pour l'année suivante.

Les deux autres sessions se tiendront en octobre et en janvier. Elles pourront durer deux jours et auront pour objet principal de préparer la session de Pâques.

ART. 9. — Lorsqu'une résolution, prise dans l'Assemblée générale, n'aura pas été délibérée en présence du tiers des membres de la Société, le Conseil aura la faculté d'ajourner la décision jusqu'à la prochaine session de Pâques. La décision sera alors définitive, quel que soit le nombre des membres présents.

ART. 10. — La Société ne permettra jamais qu'il se produise dans son sein aucune attaque, même courtoise, à la religion catholique ou à la philosophie spiritualiste et religieuse.

ART. 11. — Dans les sessions, la Société se répartit en cinq sections : I. *Sciences mathématiques*, II. *Sciences physiques*, III. *Sciences naturelles*, IV. *Sciences médicales*, V. *Sciences économiques*.

Tout membre de l'association choisit chaque année la section à laquelle il désire appartenir. Il a le droit de prendre part aux travaux des autres sections avec voix consultative.

ART. 12. — La session comprend des séances générales et des séances de section.

ART. 13. — Le Conseil représente l'association. Il a tout pouvoir pour gérer et administrer les affaires sociales. Il place en rentes sur l'État ou en valeurs garanties par l'État les fonds qui constituent le capital social.

Il fait tous les règlements d'ordre intérieur que peut nécessiter l'exécution des statuts, sauf le droit de contrôle de l'Assemblée générale.

Il délibère, sauf les cas prévus à l'article 6, à la majorité des membres présents. Néanmoins, aucune résolution ne sera valable qu'autant qu'elle aura été délibérée en présence du tiers au moins des membres du Conseil dûment convoqué.

ART. 14. — Tous les actes, reçus et décharges sont signés par le Trésorier et un membre du Conseil, délégué à cet effet.

ART. 15. — Le Conseil dresse annuellement le budget des dépenses de l'association et présente dans la session de Pâques le

compte détaillé des recettes et dépenses de l'exercice écoulé. L'approbation de ces comptes, après examen de l'Assemblée, lui donne décharge.

Art. 16. — Les statuts ne pourront être modifiés que sur la proposition du Conseil, à la majorité des deux tiers des membres votants, et dans l'Assemblée générale de la session de Pâques.

Les modifications ne pourront être soumises au vote qu'après avoir été proposées dans une des sessions précédentes. Elles devront figurer à l'ordre du jour dans les convocations adressées à tous les membres de la Société.

Art. 17. — La devise et l'article 10 ne pourront jamais être modifiés.

En cas de dissolution, l'Assemblée générale, convoquée extraordinairement, statuera sur la destination des biens appartenant à l'association. Cette destination devra être conforme au but indiqué dans l'article 2.

RÈGLEMENT

ARRÊTÉ PAR LE CONSEIL POUR L'ENCOURAGEMENT DES RECHERCHES SCIENTIFIQUES

---

1. — Le Conseil de la Société scientifique de Bruxelles a résolu d'instituer des concours et d'accorder des subsides pour encourager les recherches scientifiques.

2. — A cet objet seront consacrés :

1° Le revenu du bénéfice acquis à la Société jusqu'à la session de Pâques 1879;

2° La moitié du bénéfice acquis pendant l'exercice qui précède l'exercice courant.

3. — Chaque année, l'une des sections désignera une question à mettre au concours. L'ordre dans lequel les sections feront cette

désignation sera déterminé par le sort. Toute question, pour être posée, devra être approuvée par le Conseil, qui donnera aux questions la publicité convenable.

4. — Les questions auxquelles il n'aura pas été répondu d'une manière satisfaisante resteront au concours. Le Conseil pourra cependant inviter les sections compétentes à les remplacer par d'autres.

5. — Aucun prix ne pourra être inférieur à 500 francs. Une médaille sera en outre remise à l'auteur du mémoire couronné.

6. — Ces concours ne seront ouverts qu'aux membres de la Société.

7. — Ne sont admis que les ouvrages et les planches manuscrits.

8. — Le choix de la langue dans laquelle seront rédigés les mémoires est libre. Ils seront, s'il y a lieu, traduits aux frais de la Société; la publication n'aura lieu qu'en français.

9. — Les auteurs ne mettront pas leur nom à ces mémoires, mais seulement une devise qu'ils répéteront dans un billet cacheté renfermant leur nom et leur adresse.

10. — Les jurys des concours seront composés de trois membres présentés par la section compétente et nommés par le Conseil.

11. — Les prix seront décernés par le Conseil sur le rapport des jurys.

12. — Toute décision du Conseil ou des sections relative aux prix sera prise au scrutin secret et à la majorité absolue des suffrages.

13. — La Société n'a l'obligation de publier aucun travail couronné; les manuscrits de tous les travaux présentés au concours restent la propriété de la Société. En cas de publication, cent exemplaires seront remis gratuitement aux auteurs.

14. — Les résultats des concours seront proclamés et les médailles remises dans l'une des assemblées générales de la session de Pâques. Les rapports des jurys devront être remis au Conseil six semaines avant cette session. Le 1er octobre de l'année précédente est la date de rigueur pour l'envoi des mémoires au secrétariat.

15. — Pour être admis à demander un subside, il faut être membre de la Société depuis un an au moins.

16. — Le membre qui demandera un subside devra faire connaître par écrit le but précis de ses travaux, au moins d'une manière générale; il sera tenu, dans les six mois de l'allocation du subside, de présenter au Conseil un rapport écrit sur les résultats de ses recherches, quel qu'en ait été le succès.

17. — Le Conseil, après avoir pris connaissance des diverses demandes de subsides, à l'effet d'en apprécier l'importance relative, statuera au scrutin secret.

18. — Les résultats des recherches favorisées par les subsides de la Société devront lui être présentés, pour être publiés dans ses *Annales*, s'il y a lieu.

LETTRE

DE

S. S. LE PAPE LÉON XIII

AU PRÉSIDENT ET AUX MEMBRES
DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES

Dilectis Filiis Praesidi ac Membris Societatis Scientificae Bruxellis constitutae

LEO PP. XIII.

DILECTI FILII, SALUTEM ET APOSTOLICAM BENEDICTIONEM.

Gratae Nobis advenerunt litterae vestrae una cum Annalibus et Quaestionibus a vobis editis, quas in obsequentissimum erga Nos et Apostolicam Sedem pietatis testimonium obtulistis. Libenter sane agnovimus Societatem vestram quae a scientiis sibi nomen fecit, et quae tribus tantum abhinc annis laetis auspiciis ac Iesu Christi Vicarii benedictione Bruxellis constituta est, magnum iam incrementum cepisse, et uberes fructus polliceri. Profecto cum infensissimi relligionis ac veritatis hostes nunquam desistant, imo magis magisque studeant dissidium rationem inter ac fidem propugnare, opportunum est ut praestantes scientia ac pietate viri ubique exurgant, qui Ecclesiae doctrinis ac documentis ex animo obsequentes, in id contendant ut demonstrent *nullam unquam inter fidem et rationem veram dissensionem esse posse;* quemadmodum Sacrosancta Vaticana Synodus, constantem Ecclesiae et Sanctorum Patrum doctrinam affirmans, declaravit Constitutione IV^a de fide catholica. Quapropter gratulamur quod Societas vestra hunc primo finem sibi proposuerit, itemque in statutis legem dederit, ne quid a sociis contra sanam christianae philosophiae doctrinam committatur; simulque omnes hortamur ut nunquam de egregio eiusmodi laudis tramite deflectant, atque ut toto animi nisu praestitutum Societatis finem praeclaris exemplis ac scriptis editis continuo assequi adnitantur. Deum autem Optimum Maximum precamur, ut vos omnes coelestibus praesidiis confirmet ac muniat: quorum auspicem et Nostrae in vos benevolentiae pignus,

Apostolicam benedictionem vobis, dilecti filii, et Societati vestrae ex animo impertimur.

Datum Romae apud S. Petrum die 15 Ianuarii 1879, Pontificatus Nostri Anno Primo. LEO PP. XIII.

A nos chers fils le Président et les Membres de la Société scientifique de Bruxelles

LÉON XIII, PAPE.

CHERS FILS, SALUT ET BÉNÉDICTION APOSTOLIQUE.

Votre lettre Nous a été agréable, ainsi que les Annales et les Questions publiées par vous et offertes en témoignage de votre piété respectueuse envers Nous et le Siège apostolique. Nous avons vu réellement avec plaisir que votre Société, qui a adopté le nom de Société scientifique, et s'est constituée à Bruxelles, depuis trois ans seulement, sous d'heureux auspices avec la bénédiction du Vicaire de Jésus-Christ, a déjà pris un grand développement et promet des fruits abondants. Certes, puisque les ennemis acharnés de la religion et de la vérité ne se lassent point et s'obstinent même de plus en plus à proclamer l'opposition entre la raison et la foi, il est opportun que partout surgissent des hommes distingués par la science et la piété, qui, attachés de cœur aux doctrines et aux enseignements de l'Église, s'appliquent à démontrer *qu'il ne peut jamais exister de désaccord réel entre la foi et la raison,* comme l'a déclaré, dans la Constitution IV *de fide catholica,* le saint concile du Vatican affirmant la doctrine constante de l'Église et des Saints Pères. C'est pourquoi Nous félicitons votre Société de ce qu'elle s'est d'abord proposé cette fin, et aussi de ce qu'elle a mis dans les Statuts un article défendant à ses membres toute attaque aux saines doctrines de la philosophie chrétienne; et en même temps Nous les exhortons tous à ne jamais s'écarter de la voie excellente qui leur vaut un tel éloge, et à poursuivre continuellement de tout l'effort de leur esprit l'objet assigné à la Société, par d'éclatants exemples et par leurs publications. Nous prions Dieu très bon et très grand, qu'il vous soutienne tous et vous fortifie du céleste secours : en présage duquel, et comme gage de Notre bienveillance envers vous, Nous accordons du fond du cœur à vous, chers fils, et à votre Société la bénédiction apostolique.

Donné à Rome, à Saint-Pierre, le 15 janvier 1879, l'an 1 de notre Pontificat. LÉON XIII, PAPE.

MEMBRES DU CONSEIL

1896 - 1897

Président, M. A. Witz.
1er Vice-Président, M. Fr. Dewalque.
2e Vice-Président, M. le Dr Moeller.
Secrétaire, M. P. Mansion.
Trésorier, M. J. De Bruyn.

MM. le Dr Debaisieux.
Chan. Delvigne.
Gal De Tilly.
Léon De Lantsheere.
Gust. Dewalque.
André Dumont.
Cap. Goedseels.
L. Henry.
Ch. Le Paige.
Ch. Lagasse-de Locht.
Dr Lefebvre.
Alph. Proost.
Cte van der Straten-Ponthoz.
Chan. Swolfs.
L. t' Serstevens.

MEMBRES DU CONSEIL

1897-1898

—

Président, M. Fr. Dewalque.

1er *Vice-Président*, M. A. de Lapparent.

2e *Vice-Président*, M. le chanoine Delvigne.

Secrétaire, M. P. Mansion.

Trésorier, M. J. De Bruyn.

MM. Debaisieux.
Léon De Lantsheere.
Gust. Dewalque.
André Dumont.
Goedseels.
Ch. Lagasse-de Locht.
Dr Lefebvre.
Le Paige.
Dr Moeller.
Proost.
Van der Mensbrugghe.
Cte Fr. van der Straten-Ponthoz.
Léon t'Serstevens.
Chanoine Swolfs.
Ch.-J. de la Vallée Poussin.

BUREAUX DES SECTIONS

1896 - 1897

1re Section

Président, M. Ch.-J de la Vallée Poussin.

Vice-Présidents, MM. le Cte de Sparre et E. Goedseels.

Secrétaire, M. Dutordoir.

2e Section

Président, M. Édouard Branly.

Vice-Présidents, MM. Van der Mensbrugghe et De Preter.

Secrétaire, M. l'abbé Coupé.

3e Section

Président, M. le chanoine de Dorlodot.

Vice-Présidents, le R. P. Bolsius et M. A. de Lapparent

Secrétaire, M. le Capitaine Van Ortroy.

4e Section

Président, M. Borginon.

Vice-Présidents, MM. Debaisieux et Heymans.

Secrétaire, M. Ach. Dumont.

5e Section

Président, M. le Cte van der Straten-Ponthoz.

Vice-Présidents, MM. A. De Marbaix et Éd. Van der Smissen

Secrétaire, M. Alb. Joly.

BUREAUX DES SECTIONS

1897-1898

1re Section

Président, M. Ch. Lagasse-de Locht.
Vice-Présidents, MM. d'Ocagne et Pasquier.
Secrétaire, M. H. Dutordoir.

2e Section

Président, M. Van der Mensbrugghe.
Vice-Présidents, MM. Maurice Delacre et Paul Henry.
Secrétaire, M. l'abbé Coupé.

3e Section

Président, R. P. Bolsius, S. J.
Vice-Présidents, MM. Ch. de Kirwan et le chanoine de Dorlodot.
Secrétaire, M. le capitaine Van Ortroy.

4e Section

Président, M. Borginon.
Vice-Présidents, MM. Debaisieux et Heymans.
Secrétaire, M. Ach. Dumont.

5e Section

Président, M. le Cte Fr. van der Straten-Ponthoz.
Vice-Présidents, MM. A. De Marbaix et Éd. Van der Smissen.
Secrétaire, M. Alb. Joly.

RECTIFICATIONS

au Mémoire de M. DE LA VALLÉE POUSSIN sur la *Théorie des nombres premiers*

Page 1, ligne 4, au lieu de théorème du n° 99, lisez théorème du n° 100.

» 11, » 9, il faut changer de signe les deux valeurs de (AB).

» 11, » 13, id. la valeur de (BA).

» 11, » 18, id. le facteur $(e^{\pi is} - c^{-\pi is})$.

» 11, » 20, id. le second membre de la formule (2).

» 12, id. les seconds membres des formules (3) et (4).

» 13, » 7, id. le second membre de la formule qui termine l'énoncé du théorème.

» 14, id. l'intégrale aux limites $-\pi$ et $+\pi$ dans toutes les formules.

» 16, dans la dernière équation, la première différentielle que l'on trouve au second membre doit être dy au lieu de dx.

» 18, dans les deux formules où elle figure, l'intégrale aux limites $-\pi$ et $+\pi$ doit être changée de signe.

» 29, ligne 3. La limite inférieure de l'intégrale est 0 au lieu de t.

» 35. Ajoutez au n° 29 ce qui suit : Toutefois l'application du théorème du n° 19 à la formule (8) n'est pas absolument immédiate, parce qu'il y a une discontinuité due à ce que $\sqrt{1-t}$ s'annule, au dénominateur de la fonction sous le signe d'intégration aux limites 0 et 1. Mais le théorème du n° 19 s'applique à l'intégrale prise aux limites 0 et $(1-\varepsilon)$ et l'intégrale restante, aux limites $(1-\varepsilon)$ et 1, ne donne lieu qu'à une difficulté apparente, car on y fait disparaître la discontinuité par un changement de variable.

SESSION DU JEUDI 29 OCTOBRE 1896

A MALINES.

SÉANCE DES SECTIONS

Première section.

M. Mansion communique à la section, au nom de M. le C[te] de Sparre, un mémoire *Sur la réduction de certaines intégrales aux fonctions elliptiques.* Il est nommé commissaire pour examiner ce travail.

Il est ensuite donné lecture de rapports sur divers travaux présentés à la section à la séance d'avril 1896. Sur la proposition de M. Mansion, la section vote l'impression de la deuxième et de la troisième partie du remarquable travail de M. Ch.-J. de la Vallée Poussin : *Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers.* Elle émet en même temps le vœu que l'auteur veuille bien insérer au Bulletin une analyse détaillée de la deuxième et de la troisième partie de son travail, analogue au résumé de la première qu'il a communiqué à la section. Pareille analyse serait extrêmement utile pour faciliter aux lecteurs même les mieux préparés l'intelligence de ces difficiles recherches sur les nombres premiers.

Voici ce résumé fait par l'auteur (*) :

(*) Nous profitons de cette occasion pour rectifier une erreur commise dans la première partie. Dans une note à la page 70, nous avons fait une objection à un article de M. von Mangoldt, *Auszug aus einer Arbeit...* Ce travail a paru avec plus de développements dans le Journal für die reine und angew. Math., t. CXIV, et nous avons reconnu que notre objection n'était pas fondée. Les conclusions de M. von Mangoldt sont rigoureuses.



I. 1. La *deuxième partie* de notre mémoire a pour objet d'étendre, en tous points, les démonstrations de la première partie au cas des nombres premiers d'une forme linéaire primitive $(Mx + N)$.

Dirichlet a démontré qu'il existe une infinité de nombres premiers q_N de la forme $Mx + N$. Il considère dans sa démonstration des fonctions que nous appelons $Z(s, \chi \bmod M)$, définies pour $\mathfrak{R}(s) > 1$, par

$$(1) \quad . \quad . \quad Z(s, \chi \bmod M) = \sum{}' \frac{\chi(n)}{n^s} = \Pi \left(1 - \frac{\chi(q)}{q^s}\right)^{-1},$$

où $\chi(n)$ est un caractère de n selon le module M, où la somme s'étend aux nombres entiers premiers avec M et le produit aux nombres premiers qui ne divisent pas M.

La question qui nous préoccupe d'abord est d'établir que ces fonctions $Z(s, \chi)$ jouissent de propriétés tout à fait analogues à celles de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann : elles vérifient, comme $\zeta(s)$, une relation fonctionnelle remarquable; elles sont du premier genre et possèdent une infinité de racines dont la partie réelle ne peut surpasser l'unité. La relation fonctionnelle en question a été établie déjà, *pour le cas d'un module premier*, par M. Piltz en 1884 dans un mémoire assez peu connu; toutefois nous suivons, pour l'établir, une méthode nouvelle qui nous semble préférable.

2. Dans un premier chapitre nous étudions quelques questions préliminaires. Tout d'abord nous définissons les deux fonctions auxiliaires :

$$(2) \quad \psi_1(\alpha, x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{-(n+\alpha)^2\pi x} \quad \text{et} \quad \psi_2(\alpha, x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (n+\alpha)e^{-(n+\alpha)^2\pi x}$$

où α et $x > 0$ sont des variables réelles, et nous montrons que ces fonctions possèdent les propriétés fonctionnelles

$$(3) \quad \begin{cases} \psi_1(\alpha, x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}\left[1 + 2\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\frac{\pi}{x}} \cos(2n\pi\alpha)\right], \\ \psi_2(\alpha, x) = \dfrac{2}{x\sqrt{x}} \sum\limits_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2\frac{\pi}{x}} \sin(2n\pi\alpha). \end{cases}$$

Ces propriétés servent de point de départ pour faire l'étude des fonctions $Z(s, \chi)$.

Le § 3 du premier chapitre contient quelques applications de la méthode de M. Hadamard à la détermination du nombre des zéros et du genre de certaines fonctions définies par des intégrales définies. Ces résultats s'appliqueront plus loin aux fonctions $Z(s, \chi)$ et seront encore utilisés dans la troisième partie du mémoire.

3. Le second chapitre est consacré à l'étude complète des fonctions $Z(s, \chi \bmod p)$ dans le cas d'un module p premier. Nous traitons ce cas à part parce qu'il est le plus simple et que M. Piltz s'en est déjà occupé. Mais, au lieu d'étudier directement, comme M. Piltz, la fonction $Z(s, \chi)$, ce qui ne nous conduirait pas à la détermination du genre, nous étudions d'abord les deux fonctions

$$\Psi_1(x, \chi \bmod p) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \chi(n) e^{-\frac{n^2 \pi x}{p}},$$

$$\Psi_2(x, \chi \bmod p) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \chi(n) e^{-\frac{n^2 \pi x}{p}},$$

qui se ramènent facilement aux fonctions $\psi_1(\alpha, x)$ et $\psi_2(\alpha, x)$ définies plus haut. Nous en déduisons les propriétés fonctionnelles correspondantes, savoir :

$$(4) \qquad \begin{cases} \Psi_1(x, \chi) = \varepsilon_1(\chi) \dfrac{1}{\sqrt{x}} \Psi_1\left(\dfrac{1}{x}, \dfrac{1}{\chi}\right), & \text{si} \quad \chi(-1) = 1; \\[2ex] \Psi_2(x, \chi) = \varepsilon_2(\chi) \dfrac{1}{x\sqrt{x}} \Psi_2\left(\dfrac{1}{x}, \dfrac{1}{\chi}\right), & \text{si} \quad \chi(-1) = -1. \end{cases}$$

Dans ces formules $\frac{1}{\chi}$ est le caractère opposé à χ et $\varepsilon_1(\chi)$, $\varepsilon_2(\chi)$ sont des quantités indépendantes de x et du module *un* qui sont complètement déterminées par le choix du caractère χ (supposé différent du principal).

Nous arrivons alors (§ 3) à la fonction $Z(s, \chi)$. Nous posons,

pour simplifier, par analogie avec la fonction $\xi(t)$ de Riemann

$$\begin{cases} \xi_1(s, \chi \bmod p) = \left(\frac{\pi}{p}\right)^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) Z(s, \chi \bmod p), & \text{si} \quad \chi(-1) = 1; \\ \xi_2(s, \chi \bmod p) = \left(\frac{\pi}{p}\right)^{-\frac{s+1}{2}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) Z(s, \chi \bmod p), & \text{si} \quad \chi(-1) = -1. \end{cases}$$

Nous montrons, en nous servant des relations (4), que ces nouvelles fonctions sont définies, pour toute valeur réelle ou imaginaire de s par les intégrales

$$\begin{cases} \xi_1(s, \chi) = \frac{1}{2}\int_1^\infty \psi_1(x, \chi) x^{\frac{s}{2}-1} dx + \frac{\varepsilon_1(\chi)}{2}\int_1^\infty \psi_1\left(x, \frac{1}{\chi}\right) x^{-\frac{s+1}{2}} dx, \\ \xi_2(s, \chi) = \frac{1}{2}\int_1^\infty \psi_2(x, \chi) x^{\frac{s-1}{2}} dx + \frac{\varepsilon_2(\chi)}{2}\int_1^\infty \psi_2\left(x, \frac{1}{\chi}\right) x^{-\frac{s}{2}} dx, \end{cases}$$

suivant que l'on a $\chi(-1) = +1$ ou -1.

Nous en déduisons directement les relations fonctionnelles découvertes par M. Piltz

$$\begin{cases} \xi_1(s, \chi) = \varepsilon_1(\chi)\, \xi_1\left(1 - s, \frac{1}{\chi}\right), & \text{si} \quad \chi(-1) = 1; \\ \xi_2(s, \chi) = \varepsilon_2(\chi)\, \xi_2\left(1 - s, \frac{1}{\chi}\right), & \text{si} \quad \chi(-1) = -1. \end{cases}$$

On peut conclure de là (§ 4) que la fonction $Z(s, \chi \bmod p)$ est, en tous cas, sauf pour le caractère principal, une fonction entière du premier genre ayant une infinité de zéros dont la partie réelle ne peut surpasser l'unité. Les fonctions $\xi_1(s, \chi)$ et $\xi_2(s, \chi)$ sont dans le même cas et de plus leurs racines ont leurs parties réelles comprises entre *zéro* et *un*.

4. Le chapitre III a pour objet d'étendre les résultats précédents au cas d'un module quelconque. On est obligé ici de distinguer les caractères en trois ou quatre classes suivant le choix du module, mais la conclusion finale est analogue à la précédente.

La fonction $(s-1)\,Z(s,\chi_0)$ *dans le cas du caractère principal et les fonctions* $Z(s,\chi)$ *dans le cas d'un autre caractère sont des fonctions entières du premier genre. Elles ont une infinité de racines dont la partie réelle est* $\gtrless 1$, *et si l'on désigne, en général, par* $\rho(\chi)$ *les racines de* $Z(s,\chi)$ *sans distinction de catégories, dans tous les cas, la série étendue à ces racines*

$$\sum \frac{1}{[\rho(\chi)]^k},$$

sera absolument convergente pour $k > 1$.

5. Passons au chapitre IV. Les résultats précédents permettent de montrer, comme pour la fonction $\zeta(s)$, que les fonctions $Z(s,\chi)$ n'ont pas de racines de la forme $1+\beta i$. Mais ici il y a un premier point à traiter séparément. Il faut commencer par prouver qu'elles n'ont pas de racines égales à l'unité. C'est l'objet du chapitre actuel. Pour établir ce résultat, trouvé par Dirichlet, nous raisonnons sur l'équation suivante, qui se déduit de l'équation (1) :

$$(5) \quad \ldots\ldots \quad -\frac{Z'(s,\chi)}{Z(s,\chi)} = \sum_q \frac{\chi(q)\, lq}{q^s - \chi(q)}$$

et nous reproduisons la démonstration que nous avons déjà fait connaître dans notre *Démonstration simplifiée du théorème de Dirichlet sur la progression arithmétique.* (Mémoires in-8° de l'Académie royale de Belgique, 1896). On en déduit, comme on le sait, l'équation remarquable

$$\lim_{s=1}\,(s-1)\sum \frac{lq_n}{q_n^s} = \frac{1}{\varphi(M)},$$

q_n désignant en général les nombres premiers de la forme $Mx+N$ et $\varphi(M)$ le nombre des nombres premiers avec M et inférieurs à M.

6. Enfin le chapitre V et dernier a pour objet d'établir qu'*aucune des fonctions* $Z(s,\chi)$ *n'a de racines de la forme* $1+\beta i$.

A cet effet nous multiplions les deux membres de (5) par

$$\frac{y^s ds}{(s-u)(s-v)},$$

nous intégrons de $(a-bi)$ à $(a+bi)$, nous faisons tendre b vers l'infini et nous en concluons, par les théorèmes de la première partie du mémoire et ceux des chapitres précédents, l'équation suivante :

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} y^u \sum_{q^m<y} \chi(q^m)\frac{lq}{q^{mu}} - y^v \sum_{q^m<y} \chi(q^m)\frac{lq}{q^{mv}} = -y^u \frac{Z'(u,\chi)}{Z(u,\chi)} + y^v \frac{Z'(v,\chi)}{Z(v,\chi)} \\ -(u-v)\sum_{\rho(\chi)} \frac{y^\rho}{(u-\rho)(v-\rho)}. \end{aligned} \right.$$

Les sommes s'étendent dans le premier membre à toutes les puissances des nombres premiers q qui sont inférieures à y et, dans le second, à toutes les racines $\rho\,(\chi)$ de $Z(s,\chi)$.

L'équation (6) suppose toutefois le caractère χ différent du principal. Sinon, dans ce cas spécial, il faut ajouter dans le second membre le terme

$$(u-v)\frac{y}{(u-1)(v-1)}.$$

Si l'on suppose dans (6) $v=0$ et $\mathfrak{R}(u)=1$, l'équation peut se mettre sous la forme

$$(7)\quad \sum_{q<y} \chi(q)\frac{lq}{q^u} - \frac{1}{y^u}\sum_{q<y} \chi(q)\, lq = -\frac{Z'(u,\chi)}{Z(u,\chi)} - u \mathop{S}_{\rho(\chi)} \frac{y^{\rho-u}}{\rho(\rho-u)} + L$$

où la somme S du second membre s'étend aux racines $\rho\,(\chi)$ qui sont de la forme $1+\beta i$ s'il en existe, et où L désigne une somme de termes qui tend vers une limite finie pour y infini.

Dans le cas du caractère principal, il faut encore ajouter dans le second membre de l'équation (7) le terme

$$\frac{u}{1-u}y^{1-u}.$$

Si l'on ajoute maintenant toutes les équations qui se déduisent de (7) par l'échange des caractères entre eux, on trouve, toujours dans l'hypothèse $\mathfrak{R}(u) = 1$,

$$(8) \quad \begin{cases} \varphi(M)\left[\sum_{q_1<y} \frac{lq_1}{q_1^u} - \frac{1}{y}\sum_{q_1<y} lq_1\right] = \frac{u}{1-u}y^{1-u} - \sum_{(\chi)} \frac{Z'(u,\chi)}{Z(u,\chi)} \\ \qquad - \underset{\rho}{S} \frac{y^{\rho-u}}{\rho(\rho-u)} + L, \end{cases}$$

les sommes Σ s'étendant dans le premier membre aux nombres premiers q_1 de la forme $Mx+1$ qui sont $< y$ et la somme S s'étendant, dans le second, aux zéros de toutes les fonctions $Z(s,\chi)$ simultanément qui seraient de la forme $1+\beta i$. Mais l'hypothèse de leur existence conduit encore à une contradiction. On le reconnait en faisant tendre successivement dans l'équation (8) u vers l'unité, puis vers un zéro ρ_1 de la forme $(1+\beta i)$ et ajoutant les résultats. On trouve

$$(9) \quad . \quad . \quad \varphi(M)\left[\sum_{q_1<y}\left(\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_1^{\rho_1}}\right)lq_1 - \left(\frac{1}{y}+\frac{1}{y^{\rho_1}}\right)\sum_{q_1<y} lq_1\right] = L + P$$

où L converge pour y infini et où P est l'expression périodique

$$P = \frac{\rho_1}{1-\rho_1}y^{1-\rho_1} - \underset{\rho}{S}\frac{y^{\rho-1}}{\rho(\rho-1)} - \rho_1 \underset{\rho}{S'} \frac{y^{\rho-\rho_1}}{\rho(\rho-\rho_1)}.$$

Le second membre de (9) est identique de forme au second membre de l'équation dont nous avons démontré l'impossibilité dans la première partie du mémoire et la démonstration s'achève de la même manière. On en conclut qu'il n'y a pas de racines ρ de la forme $(1+\beta i)$.

Dans le dernier paragraphe, nous exposons les conséquences asymptotiques qui en résultent. Elles s'obtiennent par un raisonnement calqué sur ceux de la première partie du mémoire. Voici le théorème le plus remarquable.

L'expression

$$\frac{\varphi(M)}{y}\sum_{q_N<y} lq_N,$$

où la somme s'étend aux nombres premiers $< y$ *de la forme linéaire* $Mx + N$, *a pour limite l'unité quand* y *augmente indéfiniment.*

II. **1.** Dans la *troisième partie* de notre mémoire nous étendons encore les méthodes précédentes au cas des nombres premiers représentables par une forme quadratique de déterminant négatif.

C'est encore à Dirichlet qu'on doit d'avoir étendu aux formes quadratiques le théorème de la progression arithmétique. La démonstration de l'illustre auteur a été ensuite complétée par MM. A. Weber et Meyer. On peut étudier les nombres premiers représentables simultanément par une forme linéaire et une forme quadratique, mais (en vue seulement d'une plus grande simplicité) nous nous bornons dans notre travail à la seule considération des nombres premiers représentables par une forme quadratique. En outre, comme l'extension des méthodes antérieures ne se fait d'une manière simple que dans le cas d'un déterminant négatif(*), nous nous plaçons exclusivement dans cette hypothèse et nous suivons une marche toute parallèle à celle de la seconde partie du mémoire.

2. Le premier chapitre est consacré à la définition et à l'étude analytique de certaines fonctions auxiliaires auxquelles se ramène l'étude des fonctions qui interviennent dans la démonstration de Dirichlet.

L'une de ces fonctions joue ici le même rôle que la fonction $\psi_1(\alpha, x)$ dans la deuxième partie du mémoire, et elle possède une propriété fonctionnelle correspondante. Nous la désignons par $\Phi(t, c)$. C'est une fonction d'une variable réelle et positive t définie, par l'intermédiaire d'une forme quadratique (positive)

$$f = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

du déterminant négatif $-\Delta$ et de la classe c, par la formule

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \Phi(t, c) = \sum_{x, y} e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)t}.$$

(*) Actuellement nous avons résolu les difficultés particulières au cas des déterminants positifs, mais la rédaction de notre travail n'est pas terminée.

Dans le second membre, on donne à x et y tous les systèmes de valeurs entières, positives et négatives, pour lesquelles la forme f est impaire et première à Δ. Il résulte de là que la définition de Φ ne dépend pas du choix de f dans la classe c.

Au moyen de quelques artifices qui font l'objet des §§ 2 et 3, on peut rattacher la propriété fonctionnelle de $\Phi(t, c)$ à celle de $\psi_1(\alpha, x)$. Cette propriété s'exprime par la relation

$$(2) \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad \Phi(t, c) = \frac{\pi\varphi(\Delta)}{2\Delta\sqrt{\Delta}}\frac{1}{t} + \frac{\theta(t)}{t}e^{-\frac{k}{t}},$$

où k est une constante positive et $\theta(t)$ une fonction continue qui reste finie quand t tend vers zéro.

Le paragraphe suivant est consacré à l'étude d'une autre fonction auxiliaire. Cette fonction $Q(s, c)$ se définit par l'intermédiaire de la même forme quadratique f que la fonction $\Phi(t, c)$ au moyen de la formule

$$(3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad Q(s, c) = \sum_{x, y} \frac{1}{(ax^2 + 2bxy + cy^2)^s},$$

où la sommation a le même sens que dans la formule (1).

Cette formule définit une fonction uniforme et entière de la variable complexe s pour $\mathfrak{R}(s) > 1$. Mais cette fonction peut s'étendre à tout le plan, et c'est pour faire cette extension que l'on a besoin de la fonction $\Phi(t, c)$.

Les deux fonctions sont en effet reliées par la formule

$$Q(s, c)\,\Gamma(s) = \int_0^{\infty} \Phi(t, c)\, t^{s-1}dt.$$

Mais par la relation (2) on transforme aisément cette formule dans la suivante :

$$Q(s, c)\,\Gamma(s) = \frac{\pi\varphi(\Delta)}{2\Delta\sqrt{\Delta}}\frac{1}{s-1} + \int_1^{\infty} \Phi(t, c)\, t^{s-1}dt$$
$$+ \int_1^{\infty} \theta\left(\frac{1}{t}\right) e^{-kt}t^{-s}dt,$$

qui fournit une représentation de $Q(s, c)$ valable dans tout le plan et en détermine le caractère analytique. Le pôle simple $s = 1$ est le seul point critique de cette fonction, le résidu correspondant ne dépend que du déterminant $-\Delta$. Enfin, les principes établis par M. Hadamard prouvent que la fonction entière $(s-1)Q(s, c)$ ne peut être d'un genre supérieur au premier.

3. Nous arrivons ainsi au second chapitre du mémoire. Nous rappelons d'abord les principes de la démonstration de Dirichlet. Nous étudions les propriétés des caractères de classes, que nous désignons par $k(c)$; puis nous posons l'équation fondamentale qui est le point de départ connu de la démonstration, savoir (*).

$$(5) \quad . \quad . \quad L(s, k) = P(s) \prod_q \frac{1}{[1 - q^{-s}k(c_q)][1 - q^{-s}k(c_q^{-1})]}.$$

Le sens des symboles contenus dans l'équation (5) est le suivant :

Au premier membre, $L(s, k)$ est une fonction de s liée au caractère k et qui se définit au moyen de $Q(s, c)$ par la formule

$$(6) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad L(s, k) = \sum_{i=1}^{h} k(c_i) Q(s, c_i)$$

où la somme s'étend à toutes les classes $c_1, c_2, \dots c_h$ proprement primitives du déterminant $(-\Delta)$.

Dans le second membre, on a posé en abrégé

$$P(s) = \tau \prod_p \frac{1}{1 - p^{-2s}},$$

où τ est une constante numérique et où le produit s'étend à tous les nombres p dont $(-\Delta)$ n'est pas résidu quadratique.

Enfin, le produit Π_q s'étend à tous les nombres premiers q dont $(-\Delta)$ est résidu et c_q, c_q^{-1} sont les deux classes opposées

(*) Cette équation n'est qu'un cas particulier de celle que l'on trouvera par exemple dans l'ouvrage *Die analytische Zahlentheorie* de M. P. Bachman, dont nous conservons à peu de choses près les notations.

du déterminant ($-\Delta$) dans lesquelles q peut se représenter. A partir de là nous quittons la méthode de nos devanciers pour suivre de nouveau pas à pas la marche des deux premières parties du mémoire, et profiter de toutes les ressources de la théorie des fonctions d'une variable complexe.

Nous avons d'abord à étudier, à ce point de vue, les propriétés des fonctions $L(s, k)$ qui tiennent ici la place des fonctions $Z(s, \chi)$ dans la deuxième partie du mémoire. On déduit sans peine ces propriétés de celles des fonctions $Q(s, c)$ auxquelles les fonctions $L(s, k)$ sont liées par la formule (6). On trouve que les fonctions $L(s, k)$ sont entières dans tout le plan dans le cas d'un caractère différent du principal; dans le cas du caractère principal k_0, il y a un pôle unique $s = 1$. *Dans tous les cas, les fonctions* $(s-1)\,L(s, k)$ *sont entières et ne peuvent être d'un genre supérieur au premier.*

L'étude des zéros des fonctions $L(s, k)$ a ici la même importance que l'étude des zéros de $Z(s, \chi)$ dans la seconde partie du mémoire.

L'équation (5) montre déjà que ces zéros ne peuvent avoir leur partie réelle supérieure à l'unité. Il reste à démontrer qu'elles ne peuvent être non plus égales à l'unité. Ce résultat n'est obtenu qu'en deux étapes successives :

1° Aucun de ces zéros n'est égal à *un*;

2° Aucun d'eux n'est de la forme $1 + \beta i$.

Le premier résultat est connu, le second constitue un fait mathématique nouveau. Cependant, l'emploi des variables imaginaires apporte à la démonstration du premier point une simplification considérable et donne plus de précision aux conséquences qui s'en d'éduisent. On tire de l'équation (5)

$$(7) \quad \ldots -\frac{L'(s,k)}{L(s,k)} + \frac{P'(s)}{P(s)} = \sum \frac{k(c_q)\, lq}{q^s - k(c_q)} + \sum \frac{k(c_q^{-1})\, lq}{q^s - k(c_q^{-1})}$$

et on en conclut

$$(8) \quad -\lim_{s=1} (s-1) \frac{L'(s,k)}{L(s,k)} = \lim_{s=1} (s-1) \sum \left[k(c_q) + k(c_q^{-1})\right] \frac{lq}{q^s}.$$

Comme l'équation anologue dans le cas des fonctions $Z(s, \chi)$, cette équation prouve, à l'aide de quelques artifices, qu'aucune des fonctions $L(s, k)$ ne s'annule pour $s = 1$. On en déduit, en opérant comme dans le cas de la progression arithmétique et en désignant par q_c les nombres premiers représentables dans la classe c, que l'on a :

1° Dans le cas d'une classe c bilatère (ambiguë),

$$2h \lim_{s=1} (s-1) \sum \frac{lq_c}{q_c^s} = 1 ;$$

2° Dans le cas contraire,

$$h \lim_{s=1} (s-1) \sum \frac{lq_c}{q_c^s} = 1 .$$

4. Le chapitre III et dernier a pour objet de montrer que les fonctions $L(s, k)$ n'ont pas de racines de la forme $1 + \beta i$ et de signaler les propriétés asymptotiques qui en découlent.

L'analogie des résultats ci-dessus avec ceux obtenus dans la seconde partie, fait prévoir que les mêmes artifices réussiront encore. On multiple les deux membres de l'équation (7) par

$$\frac{y^s ds}{(s-u)(s-v)},$$

on intègre de $(a - bi)$ à $(a + bi)$ et l'on fait tendre b vers l'infini. En posant $v = 0$ dans le résultat et en supposant que $\Re(u) = 1$, on trouve, après quelques réductions et dans le cas d'un caractère k diffèrent du principal,

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} &\sum_{q<y} \left[k(c_q) + k(c_q^{-1})\right] \frac{lq}{q^u} - \frac{1}{y^u} \sum_{q<y} \left[k(c_q) + k(c_q^{-1})\right] lq \\ &\qquad = \frac{L'(u, k)}{L(u, k)} - u \underset{\rho(k)}{S} \frac{y^{\rho - u}}{\rho(\rho - u)} + \mathfrak{L}. \end{aligned} \right.$$

Dans le second membre, la somme S s'étend à toutes les racines $\rho(k)$ de $L(u, k)$ qui sont de la forme $1 + \beta i$ (en sup-

posant qu'il y en ait), $\mathfrak{L}$ représente en général un terme qui tend vers une limite finie pour y infini.

Dans le cas du caractère principal, il faut ajouter un second membre dans l'équation (9) le terme $\frac{u}{1-u} y^{1-u}$.

La relation (9), tout analogue à la relation (7) du résumé de la seconde partie, ne peut aussi subsister que si la somme S disparaît. Donc *aucune des fonctions* L(s, k) *n'a de racines de la forme* $(1 + \beta i)$.

Les conséquences asymptotiques qui en découlent s'obtiennent par la même voie que dans les deux parties précédentes du mémoire. Nous ne signalerons que la plus remarquable :

Soit h *le nombre des classes proprement primitives du déterminant* $(-\Delta)$, *les expressions*

$$\frac{2h}{y}\sum_{q<y} lq_c, \quad \text{si} \quad c \text{ est bilatère (ambiguë);}$$

$$\frac{h}{y}\sum_{q<y} lq_c, \quad \text{si} \quad c \text{ n'est pas bilatère,}$$

où les sommes s'étendent aux nombres premiers inférieurs à y *et représentables par la classe* c *tendent vers l'unité quand* y *tend vers l'infini.*

M. Goedseels fait une communication intitulée : *Remarques sur les valeurs des inconnues fournies par la méthode des moindres carrés.* En voici un résumé :

Soient deux ou plusieurs inconnues X, Y, Z, en nombre l devant vérifier une série d'équations en nombre supérieur à l, savoir :

$$(1) \quad \ldots \quad \begin{cases} a_1X + b_1Y + c_1Z \ldots + N_1 + n_1 = 0, \\ a_2X + b_2Y + c_2Z \ldots + N_2 + n_2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

dans lesquelles les coefficients des inconnues sont connus exactement, tandis que les termes indépendants des inconnues $(N_1 + n_1)$, $(N_2 + n_2)$, ..., se composent chacun d'un nombre N déterminé au moyen d'instruments de mesure quelconques et

d'une erreur inconnue *n* résultant de l'emploi de ces instruments.

Si l'on désigne par $X_1 = (A_1 : B_1)$, $X_2 = (A_2 : B_2)$, $X_3 = (A_3 : B_3)$,... les valeurs que l'on obtient pour une inconnue X en résolvant, par les déterminants, les équations (1), *l* à *l*, de toutes les manières possibles, la valeur X donnée par la méthode des moindres carrés peut être mise aisément sous la forme suivante (J. W. L. Glaisher, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 1874, XL, p. 608):

$$X = \frac{[AB]}{[BB]}.$$

C'est en partant de cette valeur de X et en faisant abstraction de toute hypothèse sur la loi des erreurs que nous ferons les remarques suivantes. Elles s'appliquent évidemment aussi aux autres inconnues.

I. La valeur X est comprise entre la plus petite et la plus grande des valeurs X_1, X_2, X_3... Par conséquent, elle est *certainement* plus voisine de la valeur exacte de l'inconnue que la plus grande X_g ou que la plus petite X_p des valeurs X_1, X_2, X_3... Lorsque cette valeur exacte est intermédiaire entre X_p et X_g, X peut en être plus voisine que toutes les autres valeurs X_1, X_2, X_3...

II. Les calculs qu'on doit faire pour trouver X sont beaucoup plus nombreux que ceux qui sont nécessaires pour trouver toutes les valeurs X_1, X_2, X_3..., car les termes de chaque fraction (A : B) figurent dans X multipliés par le dénominateur correspondant B. On suppose qu'il ne se présente pas de simplifications dans le calcul de X.

III. Le numérateur et le dénominateur de X finissent par acquérir des valeurs numériques très grandes lorsque le nombre des équations augmente. Par conséquent, si la détermination d'une inconnue, d'une constante physique, par exemple, est basée sur un grand nombre d'observations, la valeur de cette constante fournie par la méthode des moindres carrés ne subira qu'une fluctuation insensible par l'adjonction de quelques observations nouvelles.

Nous ajouterons que bien d'autres valeurs plus simples que X, jouissent de la même propriété, par exemple, la valeur moyenne

$$\frac{[A]}{[B]}.$$

Pour calculer celle-ci, on a eu soin bien entendu, de rendre tous les dénominateurs des rapports (A : B) positifs avant de faire la somme des numérateurs et des dénominateurs, afin qu'elle soit certainement comprise entre X_p et X_q.

M. Mansion fait connaître le moyen de combler une lacune dans l'exposé de la seconde des *méthodes de réduction des intégrales elliptiques de troisième espèce à paramètre imaginaire* dues à Legendre. (*Théorie des fonctions elliptiques*, 1825, t. I, n° 130, pp. 157-160.) Dans cette seconde méthode, l'illustre analyste suppose différent de zéro un certain coefficient

$$A = \frac{m^3 + m^2(r + 2) + k^2m(2r + 1) + k^2r}{m(m - n)(m - p)},$$

où m est une expression imaginaire, n, p des quantités réelles, k^2 le module de l'intégrale elliptique, *r une quantité indépendante de* k^2. Grâce à cette dernière remarque, on peut démontrer que A est vraiment différent de zéro. En effet, si l'on avait $A = 0$, on aurait

$$m^3 + m^2(r + 2) + k^2m(2r + 1) + k^2r = 0,$$

d'où l'on tirerait

$$r = -\frac{m^3 + 2m^2 + k^2m}{m^2 + 2k^2m + k^2}.$$

Mais r étant indépendant de k^2, il résulterait de là, la relation

$$\frac{m^3 + 2m^2}{m^2} = \frac{m}{2m + 1},$$

ou successivement

$$(m+2)(2m+1)=m, \quad 2m^2+5m+2=m, \quad 2(m+1)^2=0,$$

ce qui est impossible, puisque m est imaginaire.

M. Goedseels fait ensuite connaître une curieuse table qu'il vient de publier pour la réduction des degrés, minutes et secondes de la division sexagésimale en grades et fractions décimales du grade.

M. Pasquier donne un aperçu des recherches de Volterra sur le déplacement de l'axe terrestre et en signale l'intérêt même au point de vue de l'analyse pure.

Enfin, M. Goedseels expose diverses modifications qu'il serait avantageux, selon lui, d'introduire dans l'enseignement de la géométrie descriptive. La section remet à une réunion ultérieure la discussion des vues émises par M. Goedseels.

Deuxième section.

—

M. Witz, professeur aux Facultés catholiques de Lille, rapporteur de la note du R. P. Leray, *Sur quelques phénomènes d'induction électrostatique*, donne un avis favorable sur ce travail et conclut à son impression. Cette conclusion est adoptée par la section. Voici la note du R. P. Leray :

« Depuis longtemps on a observé que le voisinage d'un corps électrisé peut engendrer des lueurs dans un gaz raréfié ; mais je ne sache pas qu'on ait déterminé les lois qui régissent ces phénomènes de phosphorescence.

Ces lois sont entièrement analogues à celles de l'induction électrodynamique ; et pour mieux faire ressortir les analogies, je vais écrire en regard les propositions qui se correspondent.

Électrodynamique.

On dispose un courant électrique et un circuit fermé comprenant un galvanomètre.

Première loi. — Si l'on approche ou éloigne le courant du circuit fermé, l'aiguille du galvanomètre le déplace. Elle revient à sa position d'équilibre, si l'on maintient la distance fixe.

Deuxième loi. — Avec la distance invariable, si l'intensité du courant varie en plus ou en moins, l'aiguille se déplace à chaque variation.

Troisième loi. — La déviation de l'aiguille est d'autant plus grande que le mouvement d'approche ou de recul du courant est plus rapide, ou que les variations d'intensité sont plus considérables et plus promptes.

Électrostatique.

On dispose un corps électrisé et un tube de verre contenant un gaz raréfié.

Première loi. — Si l'on approche ou éloigne le corps électrisé du tube de verre, le gaz raréfié s'illumine. La lueur s'évanouit, si l'on maintient la distance fixe.

Deuxième loi. — Avec la distance invariable, si la charge du corps électrisé varie en plus ou en moins, une lueur jaillit à chaque variation.

Troisième loi. — L'éclat des lueurs est d'autant plus vif que le mouvement d'approche ou de recul du corps électrisé est plus rapide, ou que ses variations de charge sont plus considérables et plus promptes.

J'ai d'abord reconnu ces analogies, simplement avec un bâton de verre que j'électrisais par frottement et que j'approchais ou éloignais du petit appareil radiométrique décrit, sous le nom de GIROUETTE DE CHALEUR, dans mon *Essai sur la synthèse des forces physiques* (*).

J'ai reconnu aussi, avec les mêmes instruments, d'autres faits qui offrent un certain intérêt d'actualité et qui peuvent se résumer dans la proposition suivante : L'influence électrique, capable d'engendrer des lueurs phosphorescentes dans un gaz rarefié, se transmet à travers toutes les substances soit isolantes, comme l'ébonite, soit semi-conductrices, comme le papier, soit conductrices, comme les métaux. Seulement, ces derniers doivent être isolés, et les corps semi-conducteurs doivent l'être aussi, dans le cas où la charge est faible. En outre, la perméabilité varie avec la nature et l'épaisseur des substances.

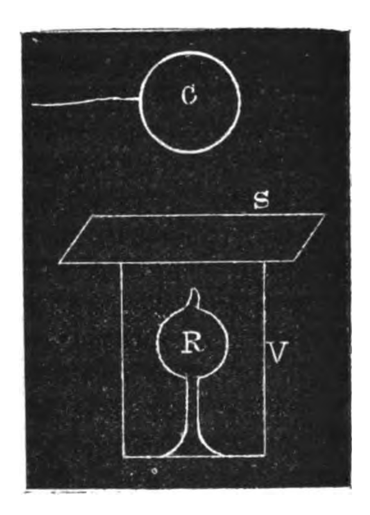
Après avoir constaté tous ces faits en petit, dans ma chambre, avec mon bâton de verre électrisé, je les ai vérifiés en grand, avec une bobine de Ruhmkorff, grâce à l'obligeance et à l'habi-

(*) *Complément de l'Essai*, p. 158.

leté de mon confrère le P. Diveaux, professeur de physique à l'école Saint-Jean de Versailles.

Nous avons installé la bobine dans sa classe, et nous avons relié à l'un des pôles un fil de dérivation revêtu de gutta-percha qui, à travers une cloison, passait dans un cabinet noir et se terminait à une sphère creuse de cuivre isolée. Lorsque la bobine fonctionnait et que les étincelles jaillissaient rapides entre les pôles, la sphère de cuivre du cabinet noir était soumise à des variations de charges incessantes, et l'appareil radiométrique, placé dans son voisinage, était rempli d'une lueur continue.

Voici le dispositif employé pour constater la perméabilité des substances : sous la boule de cuivre C, se trouvait une éprouvette de verre V, assez grande pour contenir le tube à gaz raréfié R, et les différents corps que nous voulions essayer comme écrans reposaient en S sur l'éprouvette.



Tous ceux qui nous tombaient sous la main se sont montrés plus ou moins perméables. Deux gros volumes superposés, contenant environ un millier de feuilles de papier, sans compter les reliures, se sont laissé traverser facilement par l'influence

électrique, même quand je les touchais du doigt. Les métaux se laissaient aussi traverser sous des épaisseurs notables; mais si je les touchais du doigt, la lueur s'évanouissait aussitôt, et cette extinction subite prouvait bien que l'influence électrique ne contournait pas les écrans pour parvenir au gaz raréfié, mais les pénétrait directement.

Ces expériences m'ont porté à croire que l'induction électrostatique, capable d'illuminer un gaz, pourrait impressionner une plaque photographique; mais l'essai que j'ai tenté avec les plaques ordinaires n'a pas réussi. Peut-être la pose a été trop courte ou quelque autre condition nécessaire n'a pas été remplie. Peut-être le sel d'argent, décomposé par la lumière et par les rayons émanés des tubes de Crooker, serait réfractaire aux influences électrostatiques, et il faudrait découvrir une nouvelle couche sensible, capable d'être impressionnée par les variations rapides de charges électriques.

M. Witz communique une étude *sur l'emploi des ressorts dans les appareils de précision.*

Dans un grand nombre d'appareils de précision, la réaction d'un ressort constitue la force antagoniste opposée à celle que l'on veut mesurer : on observe la flexion ou une déformation quelconque de ce ressort et l'on en déduit l'intensité de la force intervenue. L'absence d'une théorie pratique acceptable de l'élasticité ne permet évidemment qu'une graduation empirique de ces instruments. Sur les bases d'une expérience initiale d'étalonnage, on trace des graduations, on dresse des tables, on établit des barêmes ou on dessine des courbes d'après lesquelles on interprète les déformations relevées. On admet donc comme un principe qu'elles sont proportionnelles aux forces agissantes, ou tout au moins qu'elles leur sont reliées par une loi simple; on considère cette loi comme constante et l'on ne tient pas compte des modifications qui peuvent survenir dans l'état moléculaire du métal; enfin, on néglige les déformations permanentes du ressort.

Les conditions susdites ne sont presque jamais réalisées. En effet, la proportionnalité de la déformation à la force n'est admissible que pour des actions très faibles; la déformation croît bientôt plus rapidement, sans qu'on puisse même prétendre que cette augmentation soit continue et soumise à une loi régulière. L'expérience montre aussi que l'effet de la force ne dépend pas seulement de sa grandeur et de son mode d'application, mais encore des actions mécaniques auxquelles le ressort a été antérieurement soumis. Une observation minutieuse a de plus fait constater que les déformations deviennent permanentes sous des efforts extrêmement faibles; M. Wiedemann demande qu'on cesse d'envisager une limite d'élasticité, parce qu'elle n'existe pas à proprement parler. Ces diverses considérations doivent mettre en légitime suspicion tous les résultats obtenus avec des appareils gradués à ressorts.

Mais il y a de plus certaines influences extérieures qui viennent altérer les observations; l'élasticité varie avec la température suivant des lois tellement complexes, qu'on peut dire qu'elles sont totalement inconnues. Edlund a découvert que le passage d'un courant dans un fil produit un allongement électrodynamique, d'où résulte une modification des constantes des ressorts; le magnétisme paraît aussi exercer une certaine action; enfin, la manière dont la force est appliquée modifie ses effets, attendu que, par exemple, des secousses augmentent la déformation temporaire et diminuent la déformation permanente. En somme, comme on ne peut guère tenir compte de toutes ces influences, il résulte de la nature même des lois de l'élasticité que les appareils à ressorts ne sont que des instruments d'une précision discutable.

Cette manière de voir est confirmée par certaines expériences de contrôle auxquelles j'ai procédé depuis quelque temps, au fur et à mesure que j'avais à étalonner de semblables appareils.

Occupons-nous d'abord de la balance de Coulomb, que l'on considère comme un des appareils les plus délicats de la physique. La mesure d'une force attractive ou répulsive et par suite

la mesure d'un potentiel électrostatique en valeur absolue présuppose la détermination du moment C du couple de torsion du fil. La méthode dynamique consistant à observer la durée d'une oscillation, quand le fil supporte un cylindre suspendu horizontalement par son milieu et dont on connaît le moment d'inertie, conduit aisément à la valeur de C. Or, un même fil m'a donné en unités C. G. S. par radian, à un an de distance, les valeurs 16,13 et 17,05. Une suspension bifilaire est donc préférable à l'emploi d'un fil de torsion.

Une balance de Jolly, qui est une sorte de peson à ressort en boudin servant à faire la densité des minéraux, m'a donné pour allongement moyen par 10 grammes une longueur de 25^{mm},2, de 0 à 180 grammes; or, voici les allongements observés pour des charges croissantes de 10 en 10 grammes.

Charge.	Allongement.	Charge.	Allongement
10	25,5	100	25,2
20	26,0	110	25,5
30	25,0	120	25,0
40	25,5	130	25,3
50	25,5	140	25,0
60	25,8	150	25,0
70	25,2	160	24,7
80	25,8	170	25,0
90	25,0	180	22,5

Les différences sont notables, mais il s'est révélé un fait plus grave : sans avoir été surchargé, le ressort a gardé un allongement permanent notable.

C'est encore un ressort à boudin qui permet de mesurer le travail développé sur le piston des machines à vapeur et des moteurs à gaz à l'aide de l'indicateur de Watt; cet appareil joue un grand rôle en physique industrielle, car il est employé à la détermination des rendements des moteurs et à l'analyse de leur fonctionnement; Hirn en a fait grand usage et sa méthode est encore suivie. Certains ressorts, notamment les doubles ressorts de Crossby, ont des échelles remarquablement uniformes; tel est le suivant :

Charge.	Flexion.	Échelle.
—	—	—
Kilogr.	Millim.	Millim.
1	5,96	5,96
2	12,12	6,16
3	18,25	6,13
4	24,29	6,04
5	30,41	6,02

Mais il en est d'autres, à simple hélice, qui sont beaucoup moins réguliers; voici un cas :

Charge.	Flexion.	Échelle.
—	—	—
Kilogr.	Millim.	Millim.
1	8,70	8,70
2	17,23	8,53
3	25,76	8,53
4	34,41	8,65
5	43,50	9,09

L'influence de la température est faible, quoi qu'on ait pu dire, sur ces appareils : elle varie évidemment d'un ressort à un autre, mais en moyenne elle ne dépasse pas cinq dix-millièmes par degré centigrade. L'aimantation ne paraît pas exercer d'action appréciable.

Parmi les appareils à réaction élastique dont on fait fréquemment usage, il faut placer au premier rang les manomètres métalliques et les baromètres anéroïdes du genre Bourdon ou Vidie. Ici encore, les indications ont besoin d'être contrôlées point par point, ainsi qu'on le voit par les tableaux ci-dessous.

Le premier donne le résultat de comparaison d'un manomètre Bourdon avec un manomètre à air libre; le second présente le parallèle des indications simultanées de trois baromètres, Fortin, Bourdon et Vidie. Ces chiffres sont obtenus sans frapper sur l'instrument; un léger coup de doigt donne de la mobilité à l'aiguille, mais il faudrait que l'impulsion fût toujours identique, si l'on voulait qu'une série d'observations restât comparable.

Manomètre étalon Bourdon : 0 à 20 kilogr.

Indications du manomètre.	Hauteur du mercure à 13°,5.	Pression vraie.	Correction.
	Millim.	Kilogr.	Kilogr.
1	698,2	0,946	— 0,054
2	1.448,4	1,964	— 0,036
3	2.169,6	2,942	— 0,058
4	2.895,9	3,927	— 0,073
5	3.660,0	4,963	— 0,037
6	4.418,3	5,991	— 0,009
7	5.203,9	7,056	+ 0,056
8	5.926,6	8,036	+ 0,036
9	6.671,8	9,047	+ 0,047
10	7.430,8	10,076	+ 0,076
11	8.173,7	11,084	+ 0,084
12	8.906,0	12,076	+ 0,076
13	9.659,6	13,098	+ 0,098
14	10.424,0	14,135	+ 0,135
15	11.140,3	15,106	+ 0,106
16	11.853,5	16,077	+ 0,077

Baromètres.

Fortin.	Bourdon.	Vidie.
751,2	750,4	749,9
752,3	751,3	750,8
754,5	753,2	752,8
755,5	754,1	753,7
754,5	754,0	753,3
756,8	755,4	755,0
758,0	756,8	756,7
766,4	764,8	765,2
763,4	767,6	768,1
772,8	771,4	771,9
772,8	771,3	772,8
769,7	768,6	770,0
767,1	765,1	768,1
766,3	764,4	765,7
761,2	760,5	761,2
757,8	757,1	757,6
746,8	746,8	746,8

Les observations des trois baromètres ont été faites de douze en douze heures : on voit que, d'accord quelquefois, ils peuvent à d'autres moments fournir des indications de ± 2 millimètres. On nous dira peut-être que nos instruments sont défectueux ; il

peut, en effet, s'en trouver de meilleurs, mais ce n'est qu'à l'essai qu'on reconnaîtra leur valeur. La nécessité de cet essai ressort de notre étude; nous ne formulons pas d'autre conclusion des chiffres que nous produisons.

Il faudrait se garder de déduire des observations qui précèdent que les appareils à ressorts sont à *rejeter*; nous nous bornons à dire qu'ils sont à *contrôler*. Ce contrôle doit être répété de temps en temps; il doit être fait avec soin, nous allions dire avec une certaine méfiance des instruments.

Enfin, les constructeurs devraient renoncer aux graduations équidistantes établies sur la base de deux observations extrêmes : ainsi, au lieu de déterminer la position de l'aiguille d'un manomètre à 0 et 20 kilogrammes de pression, pour diviser ensuite cet intervalle en vingt parties égales, ils feraient de meilleure besogne en procédant à une graduation rigoureuse de 2 en 2 kilogrammes. Cette observation s'applique aux ampèremètres et en général à tous les instruments étalonnés : une graduation à divisions équidistantes ne devrait se rencontrer dans aucun appareil ayant la prétention d'être un étalon.

M. Félix Lecomte indique un *procédé pratique de mesure des chutes de tension dans les installations électriques :*

Dans les installations électriques industrielles, il est souvent très difficile de relever expérimentalement la perte de tension dans les réseaux d'éclairage et de transport de force. Cette difficulté provient des variations qui se produisent dans les réseaux électriques connexes et dans la charge de la machine motrice.

J'ai eu l'occasion d'essayer dernièrement un procédé qui a parfaitement réussi. La machine motrice (50 ch.) était soumise à des variations de charge de 25 à 30 °/ₒ du fait des engins actionnés par courroie. La charge électrique, composée exclusivement de lampes à incandescence et à arc était constante. La dynamo-bobinée en dérivation.

Je laissai un de mes assistants au tableau de distribution, avec mission de relever le voltage toutes les cinq minutes et de rompre brusquement le circuit sur lequel je voulais expéri-

menter, en même temps qu'il inscrivait le chiffre trouvé. En l'un des points éloignés du circuit, j'avais intercalé un voltmètre comparé avec celui du tableau, et nos montres étant réglées en concordance, je guettais le moment de l'extinction des lampes. J'inscrivais alors le voltage lu avant l'extinction. Le courant restait coupé pendant trente secondes, puis était rétabli et l'expérience recommençait.

Les résultats ainsi trouvés furent très concordants. Sur un circuit nous avons fait douze essais qui ont donné toujours la même valeur. La diminution qui devait résulter de ce que nous coupions le courant pendant trente secondes toutes les cinq minutes est restée inappréciable.

Bien entendu, l'expérience doit se faire avec des appareils apériodiques.

M. Van der Mensbrugghe, professeur à l'Université de Gand, continue ses études sur l'élasticité des liquides en examinant la *théorie de l'explosion d'une bulle de savon très mince.*

Dans mes recherches précédentes, et spécialement dans le petit mémoire (*) où j'ai tâché de faire découler d'une seule et même cause la force contractile et l'évaporation des liquides, je me suis appuyé surtout sur la parfaite élasticité de ces corps, en vertu de laquelle tout excès de compression locale tend à se propager également partout et dans tous les sens.

Récemment j'ai pu montrer que l'élasticité peut se développer dans les liquides sous l'influence de forces relativement bien faibles, et cela non seulement par compression, mais encore par traction (**).

Aujourd'hui je me propose d'étudier avec quelques détails l'un de ces effets d'élasticité des liquides, savoir l'espèce d'explosion avec laquelle éclate une bulle de savon, explosion d'autant plus vive que la bulle est devenue plus mince.

(*) *Sur la cause commune de la tension superficielle et de l'évaporation des liquides.* (BULL. DE L'ACAD. ROYALE DE BELG., 3me série, t. XXVI, p. 37, 1893).

(**) *Sur les nombreux effets de l'élasticité des liquides.* (Ibidem, t XXXII, p. 270, 1896.)

Depuis les temps les plus anciens, on doit avoir observé le fait en question, mais sans doute parce que l'acte de souffler des bulles de savon n'était qu'un jeu d'enfant, ce n'est qu'en 1672 qu'un observateur anglais, Hooke, s'étonna de ce que la rupture d'une bulle de savon est parfois accompagnée d'une sorte d'explosion (*). Et à vrai dire, quoi de plus surprenant qu'une quantité de matière si minime, et pourtant capable de produire un bruit parfaitement perceptible!

En 1756, Leidenfrost (**) déclara que plus les couleurs d'une bulle prennent d'éclat, plus la lame devient rigide; si on la perce alors, elle se brise. « C'est surtout, dit-il, dans les taches » noires que la rigidité est extrême; là le moindre contact d'une » pointe d'aiguille suffit pour déterminer la rupture; alors la » bulle éclate avec un bruit perceptible, et se dissipe en une » infinité de très petites parties projetées de tous les côtés » jusqu'à plus d'un mètre de distance. Ce phénomène se con- » state le mieux dans un rayon de soleil; il est absolument » analogue à celui que présentent les larmes bataviques ».

Leidenfrost conclut de là que la bulle, outre une force contractile, possède en même temps une force opposée, une force explosive. « Cette dernière, ajoute-t-il, agit toujours du dedans » en dehors, car si, à l'intérieur d'une bulle, on en gonfle une » autre, la rupture de celle-ci fait éclater l'extérieure, tandis » que, si l'extérieure se brise la première, l'autre reste parfai- » tement intacte. Il y a donc dans une bulle deux forces con- » traires, l'une centripète qui réside surtout dans les portions » incolores, l'autre centrifuge qui a son siège dans les portions » colorées, et qui est à son maximum dans les taches noires. »

Leidenfrost pense que la force explosive provient de l'eau, tandis que la force contractile est due au savon, ou plutôt à l'huile du savon. On se demande comment un observateur si consciencieux peut avancer des hypothèses aussi bizarres, et les appuyer

---

(*) BIRCH, *History of the Royal Society of London*, vol. III, p. 29.
(**) *De Aquæ communis nonnullis qualitatibus*. Duisburg, 1756.

sur des raisonnements plus bizarres encore; c'est pourquoi je passerai ces derniers sous silence.

En 1844, un physicien italien, Fusinieri (*), étudie à son tour la disparition presque instantanée d'une bulle de savon qui se rompt; il invoque la force répulsive développée, d'après lui, entre les particules des corps réduits à des dimensions très minimes; aussitôt que le lien de la viscosité qui maintenait le liquide à l'état laminaire est brisé, la force expansive agissant auparavant dans le sens de la surface de la lame, se dirige dans tous les sens, transforme le liquide en vapeur, et imprime aux molécules des mouvements violents de projection, accompagnés de décomposition avec dégagement de gaz; on s'assure, d'après Fusinieri, de ce dégagement en ce que, après la rupture, on observe sur le bord solide auquel était attachée la lame, une certaine quantité de minimes bulles creuses.

L'ingénieux physicien fait alors remarquer qu'on ne peut attribuer cette sorte d'explosion à la compression de l'air emprisonné dans une bulle, car le même phénomène se produit à l'égard des lames planes; d'ailleurs on ne conçoit pas comment une lame aussi peu résistante serait capable de contenir un gaz suffisamment comprimé pour donner lieu à un semblable effet.

On le voit, la question n'était guère élucidée; c'est pourquoi Joseph Plateau l'a reprise dans ses belles *Recherches sur la statique moléculaire des liquides soustraits à l'action de la pesanteur* (**); voici comment, d'après l'illustre physicien, les choses doivent se passer : « dès qu'une très petite ouverture s'est formée, » elle s'accroit rapidement par le retrait de la lame; mais en » même temps se produit un autre effet, savoir la génération » d'un bourrelet tout le long du bord de l'ouverture, et comme » à cause de la grande minceur de la lame d'eau de savon, les » dimensions transversales de ce bourrelet sont excessivement » minimes, il doit se transformer en globules avec une extrême

(*) *Della forza repulsiva fra le parti dei corpi ridotti a minime dimensioni*; voir *La dinamica molecolare* secondo Fusinieri e Reichenbach, Foligno, 1866.

(**) Voir cet ouvrage, t. II, p. 313

» vitesse; à cette cause il faut encore ajouter l'excès de pression » de l'air intérieur qui est chassé avec rapidité et emporte au » loin les globules ci-dessus. Mais dès que cette première série » de globules est enlevée, un nouveau bourrelet se reforme au » bord de l'ouverture agrandie, puis se résout aussi en globules » qui sont également emportés, et ainsi de suite. »

A cause de la ténuité de la lame, ces phénomènes s'accomplissent en une fraction de seconde, bien qu'ils se succèdent, de sorte que l'observateur ne peut constater que le mouvement de la poussière liquide dans l'air environnant.

Pour appuyer l'idée relative à la succession des séries de gouttelettes détachées, Plateau a opéré non plus sur une bulle, mais sur une lame plane de liquide glycérique réalisée dans un grand anneau en fil de fer de 20 centimètres de diamètre et de 3 millimètres d'épaisseur; cet anneau avec sa lame liquide était posé directement sur une feuille de papier légèrement absorbant; on crevait alors la lame en un point très rapproché du contour

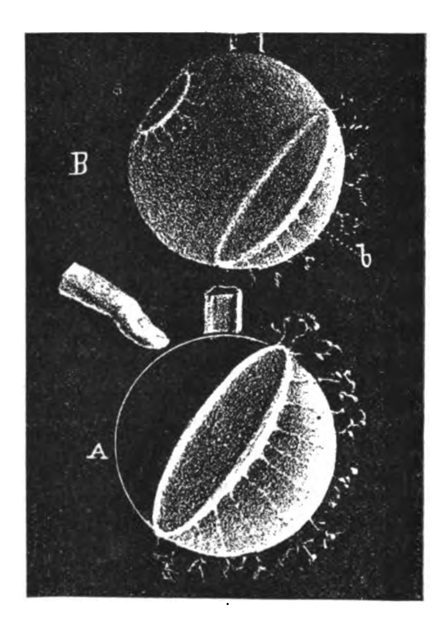


Fig 1.

intérieur de l'anneau, qu'on enlevait aussitôt après pour bien observer les traces des gouttelettes.

Vers la même époque (1873), MM. Marangoni et Stefanelli (*) ont étudié aussi ce qui se passe lors de la rupture des bulles. Voici comment ils ont procédé : ils ont rendu le liquide glycérique fluorescent par l'addition d'un peu d'esculine, et provoqué la rupture de la bulle pendant que celle-ci était exposée à l'éclairement intermittent des étincelles d'une bobine de Ruhmkorff. Par des essais consécutifs sur différentes bulles, il arrive que, pour l'une d'elles, une étincelle jaillit pendant la durée, très petite à la vérité, de la rupture de la lame; grâce à la persistance de l'impression sur la rétine, ils ont pu observer la bulle dans l'une des phases de sa rupture (fig. 1, A et B).

Les physiciens italiens ont pu constater ainsi les phénomènes suivants : aussitôt après la rupture en un point de la lame, il s'y forme simplement une ouverture qui grandit rapidement; « la » portion conservée paraît entièrement fluorescente, mais sur» tout au contour où brille une lumière très vive; de ce contour » partent de nombreux filets liquides et fluorescents, incurvés à » l'extérieur et terminés par des ramifications éparses, lesquelles » finissent par se résoudre en gouttelettes extrêmement fines ».

Les physiciens italiens, qui sont même parvenus à évaluer très approximativement la durée du phénomène à 0",0263 (ou $^{1}/_{41}$ de seconde), admettent pleinement la théorie donnée par Plateau; mais ils ajoutent que les filets se détachant du bourrelet ne présentent pourtant aucune discontinuité; les figures 1 que j'ai fait reproduire exactement d'après celles des auteurs, montrent nettement que les petites masses séparées du bourrelet n'offrent absolument aucune régularité; de plus, le bourrelet lui-même présente, il est vrai, des dentelures d'où partent des filets extrêmement ténus, mais en aucune façon des étranglements réguliers et s'étendant sur une portion notable de la section transversale.

On le voit, MM. Marangoni et Stefanelli ont fait, semble-t-il, quelques réserves sur l'application complète de la théorie de

(*) *Monografia delle bolle liquide*, mém. I. Pise, 1873; voir pp. 68 à 76.

J. Plateau concernant la transformation du bourrelet en sphérules ; de son côté, le célèbre physicien belge a reconnu que les ramifications irrégulières signalées plus haut, constitueraient un fait dont l'explication serait bien difficile (*).

Tel est le petit historique relatif au phénomène si curieux de l'explosion d'une bulle d'eau de savon ou de liquide glycérique. Si je reviens aujourd'hui sur la question, c'est pour tâcher de montrer pourquoi la théorie de mon illustre et vénéré maître, J. Plateau, théorie qu'il a vérifiée par de très nombreuses observations, ne s'applique pas, de son propre aveu, aussi nettement dans les conditions des expériences précédentes.

Aussitôt après qu'on a crevé une bulle en un de ses points, les bords de l'ouverture sont sollicités dans toutes les directions par la tension superficielle de chacune des deux faces de la lame; voilà pourquoi, on le sait, il se produit rapidement un bourrelet qui limite l'ouverture sans cesse grandissante; or, je dis qu'alors le bourrelet est soumis à deux tendances bien distinctes; et d'abord, à cause de ses dimensions transversales très minimes par rapport à sa longueur, et conformément à la théorie classique de Plateau, il doit tendre à se transformer très vite en globules. Mais d'un autre côté, le retrait du liquide doit y développer une élasticité de compression qui croît d'autant plus vite que ce retrait est plus rapide; or, la réaction due à cette élasticité croissante pourra projeter de petites masses liquides hors du bourrelet, et dès lors le jeu des forces figuratrices distribuées à la surface du bourrelet se trouvera si non complètement annulé, du moins fortement entravé.

Cela étant, plaçons-nous dans le cas d'une bulle d'eau de savon ou de liquide glycérique; aussitôt après la rupture, le retrait produit dans la lame par la force contractile sera d'autant plus rapide que la bulle sera devenue plus mince; dès lors le bourrelet qui se forme sera tellement comprimé qu'il s'en détachera nécessairement de petites masses liquides, et cela, non pas

(*) Voir *Rech. expér. et théorie sur la statique m[illegible]laire, etc.*, t. II, note de la page 318.

à l'intérieur de la bulle où l'air est soumis à un petit excès de pression, mais bien à l'extérieur; en outre, à cause de la soudaineté de la compression, les petites masses détachées seront irrégulières et le phénomène de projection se répètera d'autant plus vite que les fortes compressions se succéderont elles-mêmes plus rapidement. Ces projections consécutives me paraissent plus que suffisantes pour empêcher l'efficacité des forces figuratrices d'où dépend la transformation d'une figure liquide dont l'épaisseur est très minime par rapport à sa longueur.

L'explication précédente s'applique mot à mot à la petite explosion d'une lame plane très mince de liquide glycérique; seulement alors les projections des petites masses se font des deux côtés de la lame.

Troisième section.

Sur le rapport du R. P. Hahn, S. J., et de M. le D[r] Matagne, la section vote l'impression, dans la seconde partie des *Annales*, du mémoire du R. P. Bolsius, S. J. : *Le canal néphridien dans les Glossiphonides et l'entonnoir néphridien dans les Herpobdellides.*

M. Ballion fait part de diverses considérations sur l'usage du « formol » et sur les « mistpoeffers » de la mer du Nord.

Il y a un an, dit-il, j'ai fait voir aux membres de la troisième section un *Phrynosoma planiceps* vivant. Ce reptile est mort d'inanition n'ayant pris aucun aliment ni solide ni liquide durant près de sept mois. D'habitude il se tenait immobile, mais il suffisait de l'exposer au soleil ou de le placer dans une place chaude pour le voir en plein mouvement. A la fin de sa vie, sa maigreur était extrême. Le corps ouvert ne présentait rien d'anormal; mis depuis plusieurs mois dans une solution de formol, l'animal a conservé toutes les apparences de la vie.

Le formol présente l'avantage de permettre la conservation inaltérable et à sec des poissons et des reptiles sans devoir les empailler; la moisissure, les anthrènes, etc., n'ont aucune prise sur ces préparations. Le formol présente l'inconvénient que le

sujet retiré de la solution, après cinq ou six semaines durcit trop et l'on ne peut conserver ainsi *à sec* les arachnides dont les pattes se cassent au moindre contact comme du verre. La solution formolée doit être conservée en hiver dans une place à l'abri de la gelée, sinon le bocal se briserait.

M. Ballion a observé que des poissons soumis à la macération dans le formol 4 °/₀ conservent la nuance rouge aussi longtemps qu'ils sont dans la solution mais que cette couleur disparaît très rapidement dès que l'animal est mis à sécher. En ajoutant du sucre à la solution formolée, les couleurs rouges et bleues se conservent beaucoup mieux. Voici la formule :

Eau . . . . 1 litre.
Sucre blanc . . . . 400 à 500 grammes.
(La solubilité du sucre varie avec les échantillons.)
Formol du commerce. . . . . . 15 grammes.

Des vers et des mollusques préparés dans ces conditions n'ont rien perdu de l'aspect vivant.

Un rat, gardé sec six à sept semaines dans une atmosphère de formol (50 grammes dans un bocal hermétiquement fermé), se conserve à l'air libre depuis plus de six mois.

Le formol est appelé à rendre les plus grands services ; c'est un antiseptique très énergique et à pouvoir constant; il ne présente aucun des dangers du sublimé corrosif. Les cadavres imbibés pendant une heure ou deux de la solution au formol 4 °/₀ peuvent être soumis aux travaux anatomiques sans qu'on ait à craindre la septicémie, suite de la piqûre anatomique.

Un jeune porc cyclope qu'un campagnard dans le but de conserver cette monstruosité, avait mis dans la saumure, présentait, au bout de trois semaines, une décomposition avancée; mis alors dans la solution formolée durant deux heures, la putréfaction a pris fin, et le sujet intéressant a pu être conservé.

Les mammifères et les oiseaux empaillés, que les larves d'*Anthrenus museorum*, *Attagenus Pellio*, *Tinea tapezella*, etc., détruiraient, peuvent être conservés en parfait état en enduisant tout le corps de pétrole.

Un Kanguroo fortement atteint par ces insectes en a été

débarrassé par ce moyen et se maintient en parfait état depuis trois ans sans avoir dû subir un nouveau lavage.

Un superbe couroucou reçu du Guatemala a subi le même sort; un badigeonnage au pétrole a tué les insectes destructeurs; il est à remarquer que les couleurs ne sont nullement modifiées par cet enduit : le vert doré de la queue s'est parfaitement maintenu.

Des animaux rares atteints par les anthrènes et qu'il faudrait jeter afin d'épargner les autres animaux de la collection, peuvent être conservés grâce au pétrole.

Le camphre, la naphtaline, le pyrèthre, la benzine, l'essence de serpolet ne sont que des insectifuges; alors que des larves d'anthrènes et de teignes se maintiennent en vie en présence de ces substances et même quand on les place dans une goutte de la liqueur de Van Swieten, ces larves meurent en trois ou quatre secondes quand on les met dans une goutte de formol 4 °/₀ ou dans une goutte de pétrole.

Pendant son séjour le long du littoral belge, M. J. Ballion a eu l'occasion d'observer à la fin de juillet et au commencement d'août de cette année, un phénomène encore inexpliqué de la physique du globe : il s'agit de ces bruits étranges ressemblant, à une première audition, à l'écho de coups de canon et que nos marins ont baptisés du nom de « mistpoeffers », de « mist » brouillard et de « poeffer » explosion, « poeffen » éclater. Le phénomène se présente pendant les journées chaudes et par un temps calme. L'étranger entendant ces détonations suppose que, soit en mer, soit dans un port avoisinant, on tire du canon, d'autant plus que généralement ces bruits coïncident avec un état brumeux de l'atmosphère.

M. Ernest Van den Broeck, géologue à Bruxelles, est probablement un des premiers qui se soient occupés de ce curieux phénomène.

Il y a deux ou trois ans, personne ne songeait à y voir une cause naturelle, convaincu que l'on était d'avoir affaire à un écho de détonations d'artillerie. C'est ainsi que cet été encore, les étran-

gers à Nieuport croyaient que le bruit venait d'Ostende ou de Dunkerque; et à Knocke, qu'il venait d'Ostende ou de Flessingue.

Au commencement du mois d'août, des coups de canon tirés à Dunkerque se distinguaient très bien à Ostende du bruit des « mistpoeffers ».

La marée remontante ou descendante n'influençait pas le phénomène naturel. Le son paraissait venir horizontalement, un peu au-dessus de la mer, être localisé, ne venir nullement de régions souterraines ou sous-marines, et à la distance d'une lieue, la tonalité restait la même à la digue, sur la plage ou dans les dunes ; derrière les digues ou les dunes, le bruit était beaucoup moindre.

Le bruit des « mistpoeffers » semble toujours identique, venir de la mer dans la direction du NO, et ressemble à s'y méprendre au bruit causé par un meuble lourd, un lit, par exemple, placé sur des roulettes et que l'on tire sur un plancher avec une vitesse moyenne sur un espace d'environ 75 centimètres à 1 mètre; le bruit est net et sans écho, conservant tout le temps la même intensité et tonalité.

Du 12 au 31 juillet, M. Van den Broeck a observé le phénomène à la Panne, à Nieuport, à Middelkerke, à Ostende et à Knocke, du côté du Zwyn; partout il a découvert les mêmes caractères : explosions sourdes se produisant au milieu de la journée pendant trois à quatre heures, à des intervalles de dix minutes, parfois par séries, les bruits se succédant alors à deux minutes d'intervalle.

Le bruit n'étant pas très fort, peut passer inaperçu, surtout si l'on est en société.

Ces détonations mystérieuses ne peuvent être attribuées aux « puffing holes » ou « canon holes » des Anglais, « trous souffleurs » ou « trous canons » qu'on observe à Kilkee (Irlande), à Flamborough Head et à Whitby (comté d'York, Angleterre), etc., et que le géologue irlandais Kinahan a définis « des trous perpendiculaires communiquant avec une caverne horizontale, où la mer peut pénétrer ».

Lors des grandes marées et des grosses tempêtes, l'air com-

primé dans la caverne élève l'eau en grandes volutes écumeuses à travers le trou perpendiculaire, en produisant un bruit détonant. Ce phénomène ne s'observe qu'en présence d'une mer fortement agitée, tandis que les « mistpoeffers » coïncident avec un temps et une mer calmes.

Des détonations analogues ont été entendues par M. Ernest Van den Broeck en Campine.

Jusqu'à présent on ne connait pas la cause des « mistpoeffers », et ce n'est qu'à la suite de nombreuses observations qu'on pourra éclaircir ce mystère. Aussi M. Ballion sera-t-il heureux si des personnes ayant observé le phénomène veulent bien envoyer le résultat de leurs observations soit à lui, soit à M. Ernest Van den Broeck, à Bruxelles.

I. Le R. P. H. Bolsius, S. J., professeur à Oudenbosch (Hollande), présente une note sur un organe glandulaire qu'il a récemment découvert dans une espèce exotique d'hirudinée, l'*Haementeria officinalis*, provenant du Mexique.

Voici le résumé du mémoire qui est fait sur ce sujet, et qui sera publié prochainement ailleurs.

L'organe entier, auquel on donne le nom de « glande impaire », est constitué par trois parties bien distinctes. La première, la plus reculée à partir de l'orifice extérieur de l'organe, est un tube de faible calibre et enroulé en peloton. La deuxième, ou la moyenne, est aussi un tube, faisant suite à la première portion; mais elle en diffère en ce que ce tube est court et droit, et aussi par son calibre beaucoup plus fort.

Dans ces deux parties, le canal de la glande est *intracellulaire*, et la glande en conséquence constituée par une série de cellules perforées et placées bout à bout, telle qu'on la voit dans la partie inférieure du canal collecteur des organes segmentaires des hirudinées.

La troisième partie enfin n'est pas glandulaire, mais elle constitue le canal évecteur. Ce canal est très étroit et se déverse dans la partie antérieure de la gaine de la trompe.

Tout l'organe est placé sur la ligne médiane de l'animal, au-dessus de la trompe et parallèle à celle-ci.

La particularité la plus intéressante du canal est que, arrivé près du ganglion cérébroïde du collier œsophagien, il se bifurque dans le plan vertical, passe au-dessus et au-dessous du ganglion au moyen de deux branches, qui viennent se rejoindre au-devant du ganglion et reforment un canal unique.

La particularité cytologique des cellules glandulaires est que la trame circulaire du réticulum plasmatique est prépondérante à tel point qu'en coupe transversale ces cellules paraissent au premier coup d'œil formées par des couches concentriques.

II. Le même auteur apporte une belle pièce d'ambre adhérant en partie à l'écorce de l'arbre qui l'a produit. A différents endroits, des insectes y sont emprisonnés, tels que deux fourmis, une araignée, deux mouches ou moucherons, un coléoptère, tous de très faibles dimensions, et deux autres insectes ailés, l'un de près de 1 centimètre, l'autre de 2 centimètres de long. Encore plusieurs autres insectes s'y trouvent, mais plus difficiles à reconnaître à cause de leur position peu favorable.

Le R. P. Bolsius prie M. Fern. Meunier de vouloir déterminer ces divers objets.

M. le chanoine Boulay, professeur aux Facultés catholiques de Lille, entretient la section du mode de croissance et de conservation des *Rubus* dans les bois taillis. Il se demande aussi quelles conclusions on peut tirer de l'étude des ronces, au point de vue de la question de l'espèce.

Cette communication donne lieu à un échange de vues entre le R. P. Van den Gheyn, M. Ballion et M. le marquis de Trazegnies.

Le travail de M. le chanoine Boulay sera publié dans la deuxième partie des *Annales*.

Le R. P. Van den Gheyn signale quelques travaux récents sur les pygmées. Il s'occupe d'abord des résultats de la mission de

M. Louis Lapicque, chef de laboratoire à la Faculté de médecine de Paris (*). Les recherches de M. Lapicque ont cela d'important qu'elles ont signalé entre les Négritos des îles Philippines et ceux des îles Andaman l'existence d'un groupe important de la même race dans la presqu'île malaise, dans le massif de Gounong-Inos, près du village de Sampitan. La taille moyenne de ces indigènes est de 1m,49; ils sont mésaticéphales, probablement par suite d'un mélange avec l'Indonésien blanc dolicho-céphale.

Il y a en Asie une autre lacune à combler dans la distribution géographique des Négritos, entre ceux de l'Inde et ceux de la Susiane, signalés par M. Dieulafoy. De ce côté aussi, M. Lapicque a dirigé ses investigations, mais elles sont demeurées sans résultat.

Les études sur les pygmées tendent principalement à établir la communauté de race entre les Négritos d'Asie et les Négritos d'Afrique. Mais la question est loin d'être mûre, et s'il faut s'en rapporter aux conclusions d'un récent article de M. Verman (**), la solution du problème général de la race des pygmées se compliquera encore de divergences qu'accuse l'étude détaillée des Négritos africains. Là même ne semble pas régner l'unité des types ethniques, car à côté de Négritos brachycéphales on a trouvé, dans toute la zone équatoriale de l'Afrique et dans la seule tribu des Akkas, des types caractérisés par la forme allongée du crâne. Ces deux types ont donné naissance par leur croisement à un troisième, lequel est mésaticéphale.

Le R. P. Van den Gheyn conclut de ces faits que les ethnologistes devront user de la plus grande prudence pour ne pas aboutir à des solutions prématurées.

M. le capitaine Van Ortroy fait ressortir l'importance de l'exploration polaire de Nansen et du *Fram*. Il est trop tôt pour apprécier les résultats scientifiques de cette entreprise. En

(*) *Annales de géographie*, 15 juillet 1896.
(**) *L'Anthropologie*, t. VII, 1896, pp. 153-167

revanche, on peut se faire une idée exacte de l'itinéraire suivi, grâce à une fort belle carte en couleurs publiée récemment à Christiania chez le libraire Commermeyer.

Les membres de la section apprennent le transfert de Namur à Louvain, dans des locaux plus vastes et parfaitement appropriés, du musée géologique des bassins houillers belges. Ce musée semble devoir être placé sous la direction commune de M. le chanoine Henry de Dorlodot et du R. P. Schmitz, S. J., qui en a été le créateur. Son accès sera facilité à tous les intéressés.

Quatrième section.

—

M. Guermonprez décrit *un procédé de réduction des fractures du poignet.* Après avoir énuméré les divers déplacements que l'on observe dans cette fracture, il dit qu'une friction préalable facilite la dissémination de l'hématome et de l'infiltration des parties molles autour du foyer de fracture. Elle favorise l'exploration si elle est faite lentement et avec douceur. Pour pratiquer la réduction, il faut attendre que la contracture ait cessé. Puis la main gauche du chirurgien assure la coaptation, tandis que sa main droite imprime avec brusquerie et successivement des secousses d'abord dans l'axe du membre, puis dans le sens de la flexion, ensuite dans le sens de l'extension, rarement quelques-unes dans le sens de la latéralité. Ces manœuvres doivent être renouvelées jusqu'à ce que la configuration des portions squelettiques soit redevenue normale. Les soins consécutifs se réduisent presque à une immobilisation de cinq à douze jours, dans la pronation incomplète, en prenant le soin de coussiner la dépression sous le radius et du côté palmaire du carpe.

M. Debaisieux demande à M. Guermonprez si la chloroformisation ne faciliterait pas la réduction. Peut-être, répond le professeur de Lille, mais il n'y recourt pas, par crainte de la période d'agitation chloroformique qui pourrait accroître les déplacements des parties fracturées.

M. Guermonprez entretient ensuite la section des *limites de la réduction des luxations de la hanche en avant.* Il a été assez heureux de l'obtenir, et contre son attente, une fois après six ans, une autre fois après six mois. Il procède à la réduction en produisant la flexion complète et l'adduction forcée et en maintenant ensuite cette adduction pendant qu'il opère l'extension.

M. Debaisieux traite la question *de la correction de certains pieds bots paralytiques par la transplantation tendineuse.* La ténotomie sous-cutanée suffit d'ordinaire à guérir le pied bot congénital, mais elle est inapplicable dans le traitement du pied bot acquis et paralytique. L'arthrodèse ou soudure des os, en immobilisant l'articulation tibio-tarsienne, convient au traitement du pied ballant, mais ne doit plus être mise en œuvre quand la paralysie n'intéresse qu'un nombre limité de muscles. L'opération de Nicoladoni est alors à recommander. Elle consiste à transplanter les tendons des muscles paralysés sur des faisceaux musculaires intacts. Ainsi les muscles paralysés sont en quelque sorte remplacés, les mouvements sont plus ou moins rétablis et le pied, en reprenant sa direction, donne à la marche plus d'assurance et de fermeté. M. Debaisieux a eu récemment l'occasion de pratiquer l'opération de Nicoladoni. Il en expose tous les détails rapportés au cas dont il s'agit et mentionne l'heureux résultat qu'il a obtenu et qui s'est maintenu définitivement, comme en font foi les photographies qui nous sont soumises et qui montrent l'état de l'enfant avant et après l'opération. Le travail de M. Debaisieux paraîtra dans la seconde partie des *Annales* (*).

M. le professeur Heymans développe *quelques considérations sur la désintoxication physiologique et expérimentale.*

(*) M. le Dr Le Blus, de Malines, présente une jeune fille du même âge que l'enfant opérée de M. Debaisieux (12 à 13 ans).

Elle était atteinte d'une difformité presque semblable. Pour redresser le pied, il a fallu faire des sections tendineuses et aponévrotiques tellement importantes que l'avant-pied n'avait plus que de minces attaches avec l'arrière-pied.

Le résultat fut néanmoins excellent et l'enfant marche aujourd'hui d'une manière satisfaisante et qui reste progressive.

Tout poison, quelle que soit l'intensité de son action sur l'organisme, peut être administré jusqu'à concurrence d'une certaine quantité sans déterminer aucun symptôme apparent d'intoxication (dose toxique subminimale). A partir de la dose toxique minimale jusqu'à la dose mortelle non comprise, le poison provoque une intoxication de plus en plus grave dont le patient se rétablit complètement.

Quel est le mécanisme de cette désintoxication physiologique? Des expériences *in vitro* et sur l'animal nous permettent actuellement de répondre jusqu'à un certain point à cette question. Disons d'abord que de nombreuses expériences prouvent que cette désintoxication ne consiste pas, en général, dans une élimination simple du poison en nature. Un acide neutralise une base et réciproquement une base neutralise un acide; donc l'intoxication par l'un de ces corps (nous ne parlons pas ici de leur action locale) sera combattue avantageusement par l'administration de la substance antidotique. C'est là la première notion qui a servi de guide dans le choix des contre-poisons. Mais généralement le mécanisme de la désintoxication est plus complexe : on ignore le plus souvent la nature du radical sur lequel se fixe le poison pour se neutraliser. Alors même qu'on la connaît, comme c'est le cas pour l'acide phénolsulfurique, il faut encore trouver la combinaison qui puisse, au sein de l'organisme, réagir sur le poison en circulation et le transformer en ce composé inoffensif.

Jusqu'ici on n'est parvenu à venir en aide à la désintoxication physiologique qu'à propos du cyanure de potassium et des nitriles de la série grasse (abstraction faite des toxines).

Le radical CN de ces composés est toxique. Mais il devient inoffensif par sa transformation en CNS, grâce au soufre de l'organisme ou à celui que l'on fournit expérimentalement à l'animal, avant ou après l'administration d'une dose de poison plusieurs fois mortelle.

M. Heymans a bien voulu réaliser sous les yeux des membres de la section une expérience des plus démonstratives. Ceux qui ont vu le jeune lapin, du poids de 750 grammes environ, auquel

il a injecté une dose cinq fois mortelle de nitrile malonique, présenter en quelques minutes tous les signes d'une mort imminente, se ressaisir peu à peu pour renaître au bout de dix minutes à un état de santé parfaite, après avoir reçu une injection de 2 c. c. d'une solution d'hyposulfite de soude à 10 °/₀₀, admettront aisément que M. Heymans a véritablement émerveillé ses auditeurs. Le distingué professeur a réalisé d'autres conditions expérimentales, préventives celles-là, de l'intoxication par le nitrile malonique. Des animaux qui n'avaient pas au préalable subi l'injection du contre-poison succombent invariablement à l'administration d'une dose de toxique, la même pour tous, tandis que ceux qui y avaient été soumis semblent ne se ressentir en aucune façon de l'injection du poison. (*Arch. de pharmacodynamique*, vol. III, p. 77, 1896.)

M. Heymans traite ensuite de la *cirrhose expérimentale*. On a prétendu que dans cette cirrhose, l'agent irritant que l'on met en œuvre, l'alcool, le chloroforme, n'agit pas directement sur le foie, mais amène d'abord des troubles gastriques et intestinaux qui engendreraient certaines substances, lesquelles, en passant à travers le foie, en provoqueraient la cirrhose. M. Heymans estime que cette interprétation n'est pas justifiée par l'expérience et il considère l'agent irritant comme la cause directe de la dystrophie hépatique. En effet, il produit les mêmes désordres aussi bien en administrant l'agent provocateur par la voie gastrique que par injection hypodermique. (*Arch. de pharmacodynamique*, vol. II, p. 127, 1895.)

M. Huyberechts communique d'abord un cas intéressant de cirrhose du foie qu'il a observé chez une personne de 40 ans et à laquelle il a trouvé comme cause l'usage de boissons alcooliques. La rate mesurait 11 centimètres sur 18. M. Huyberechts a dû ponctionner douze fois sa malade, et chaque fois le trocart a évacué de 12 à 15 litres de liquide ascitique, en tout environ 160 litres.

Il retrace l'histoire détaillée de sa malade, expose avec soin

tous les symptômes, discute judicieusement le diagnostic. Il a institué un traitement qu'il a eu le bonheur de voir réussir et dont le régime lacté, les purgatifs, les diurétiques aidés des ponctions mentionnées ont fait tous les frais. Il se demande comment un foie ainsi attaqué peut encore exercer l'urogénie, la chromogénie, la glycogénie et le pouvoir destructeur des poisons. Il est très probable, dit M. Huyberechts, que ces diverses fonctions sont ralenties et peut-être perverties. Et c'est dans ce sens qu'il interprète un cas d'intoxication mercurielle grave survenue à la suite de l'ingestion d'une dose de calomel. Enfin quel est le processus de guérison? Il est certain que si le parenchyme hépatique a souffert de la dilatation des vaisseaux sanguins et biliaires qui le comprimaient sans le détruire encore toutefois, il est non moins certain que le régime institué et la médication évacuante étaient de nature à diminuer cette compression, à supprimer l'irritation qu'engendrait l'usage de l'alcool et à prévenir si pas à combattre la formation du tissu conjonctif qui enserre et anéantit les cellules hépatiques. Le liquide ascitique avait donc de ce chef une tendance de plus en plus faible à se reproduire en même temps que la péritonite périhépatique, qui avait sans doute quelque part à sa production, s'amoindrissait et guérissait elle-même (*).

M. Huyberechts expose ensuite un *cas de rétrécissement de l'œsophage* dont il a reconnu l'origine syphilitique et qu'il a guéri peu à peu par la dilatation progressive aidée d'un traitement approprié. Ce traitement a présenté deux phases. Le malade paraissait guéri quand un jour il a été subitement repris de la même difficulté de déglutition que précédemment. Le passage de la sonde était impossible. C'était vraisemblablement une gomme qui occasionnait ces accidents, car ils s'amendèrent progressivement sous l'influence du traitement spécifique.

(*) M. le professeur Lefebvre cite un cas de cirrhose qui ne manque pas d'analogie avec celui de M. Huyberechts, et qui guérit comme celui-ci, mais après qu'on eût fait cinq ou six ponctions évacuantes.

En troisième lieu, M. Huyberechts, à propos d'un fibrome utérin volumineux dont il a délivré une malade en lui pratiquant une hystérectomie vagino-abdominale, donne les raisons qui ont motivé le choix de cette opération. Il n'a pas voulu tenter l'hystérectomie par la voie vaginale seule parce que la tumeur était non seulement volumineuse, mais adhérente sur une grande partie de sa surface, et que, dans ces conditions, l'opération, qui devait être longue, aurait gravement compromis une malade qui était déjà exsangue. D'un autre côté, l'hystérectomie abdominale avait contre elle les risques inhérents à la persistance du pédicule de la tumeur, risques que l'on peut résumer en dangers d'infection et en possibilité de dégénérescence de mauvaise nature; d'autant plus que la malade avait eu une poussée gangréneuse de la tumeur.

Enfin, M. Huyberechts rapporte qu'il a soigné une de ses malades atteinte de pelvi-péritonite suppurée en lui enlevant la matrice et ses annexes par la voie vaginale. Les raisons déterminantes de cette opération ont été les suivantes :

1° L'incision ne pouvait évacuer toutes les poches purulentes, sans compter qu'elle abandonnait à gauche un ancien exsudat;

2° L'incision abdominale et les simples ponctions comportaient les mêmes desiderata;

3° La laparotomie offrait le danger de répandre le pus dans la grande cavité abdominale et ne permettait pas d'enlever facilement les annexes.

Enfin, l'utérus étant lui-même malade, M. Huyberechts a jugé bon de l'enlever avec les annexes gravement atteintes. Cette ablation avait en outre l'avantage de permettre un large et efficace drainage.

M. Goris traite la question de la *chirurgie du cancer de la langue au début*. Ce titre l'indique suffisamment, il ne s'agit pas ici du traitement des cancers avancés dont l'extirpation est presque fatalement suivie d'une récidive mortelle à bref délai. Il s'agit d'opérer très tôt et largement un cancer qui n'a pas eu le temps de se propager jusqu'aux ganglions. M. Goris rappelle

la distribution des vaisseaux sanguins de la langue, la richesse du réseau qu'ils forment, ce qui décide encore bon nombre de chirurgiens à recourir au thermocautère pour enlever le néoplasme. M. Goris n'est pas favorable à l'emploi de cet instrument, car il laisse une surface de section blanche et cornée qui ne permet plus à la vue et au toucher de reconnaître la nature des tissus. D'ailleurs le pouvoir hémostatique du thermocautère n'offre de sécurité que quand il s'agit de petits vaisseaux. Les vaisseaux importants comme la linguale doivent être liés de toute nécessité; sinon, il arrive de temps en temps que l'hémorragie se reproduit après quelques jours, quand on a fait usage du thermocautère, et que le malade a tout le temps d'y succomber avant que le chirurgien n'intervienne.

M. Goris préconise donc l'ablation au couteau pendant le sommeil chloroformique, le malade se trouvant dans la position de Rose (tête pendante). Il est parfois nécessaire, quand toute une moitié de la langue est envahie par le mal, de faire la ligature préalable de la linguale et de la faciale.

On introduit un fort baillon dans la bouche du côté opposé au siège du mal et on attire la langue au dehors au moyen d'une pince-érigne. On passe ensuite dans la base de la langue un fort fil de soie qui va remplacer la pince et qui peut au besoin étreindre la partie de la langue qui donne le sang.

L'opérateur incise alors la langue au delà des limites du mal et dans le sens transversal jusqu'au septum. La lèvre antérieure de l'incision est fortement attirée en avant pour diminuer l'hémorragie en nappe et faciliter la ligature de l'artère linguale. Dès lors, l'opération marche rapidement. La partie malade est enlevée et on suture, ce qu'il est avantageux de faire dès la première incision, la muqueuse sublinguale à la muqueuse dorsale de la langue. Après l'emploi du thermocautère, la cicatrisation des plaies n'est complète qu'au bout de cinq à six semaines. La suture produit ce résultat en six jours seulement.

Pendant l'opération, le sang ne pénètre pas dans les voies respiratoires, grâce à la coopération d'un aide dont l'unique préoccupation doit être d'étancher le sang qui se porte vers la gorge.

Tel est le procédé recommandé par M. Goris. C'est celui de Bardenheuer, de Cologne. Il a valu à l'un et à l'autre des succès opératoires et définitifs.

Ici s'arrêtent les communications faites à la séance. Indépendamment de plusieurs travaux inscrits à l'ordre du jour et dont, faute de temps, la section ne put entendre la lecture ou l'exposé, diverses communications envoyées par des membres empêchés d'assister à la séance, parvinrent au bureau. Voici le résumé ou plutôt un extrait très sommaire du travail de MM. De Buck et De Moor de Gand : *Polynévrite par auto-intoxication d'origine gastrique.*

Ils définissent avec Albu l'auto-intoxication : un empoisonnement de l'organisme par des produits résultant des échanges organiques, soit qu'il s'agisse de produits normaux accumulés en trop grande quantité dans l'économie, soit qu'on ait affaire à des substances normales qui, chez l'homme sain, se transforment en substances moins complexes, ou ne prennent jamais naissance, sauf en quantité infinitésimale.

Ils joignent la polynévrite aux nombreuses manifestations cliniques de l'auto-intoxication, tout en constatant qu'elle n'a été qu'exceptionnellement rapportée à l'auto-intoxication d'origine gastro-intestinale.

Ils citent avec beaucoup de détails un cas qui leur semble rentrer néanmoins dans cette catégorie. Il s'agit d'une jeune fille atteinte d'une dilatation gastrique considérable, et qui présente des désordres nerveux très prononcés de nature paralytique à la suite d'une influenza de forme gastro-intestinale surtout. Après avoir passé, sous l'influence d'une foule de traitements, par des alternatives d'amélioration et d'aggravation, elle fut prise de crises convulsives accompagnées d'hyperesthésie et s'éteignit en accusant des symptômes fébriles très intenses.

MM. De Buck et De Moor, analysant des symptômes nerveux constatés chez la malade : paralysie flasque des membres avec intégrité des sphincters, diminution de l'excitabilité électrique, abolition du réflexe rotulien, sensibilité à la pression des muscles et des nerfs, y voient le tableau symptomatique de la polynévrite.

Ils le discutent très judicieusement d'ailleurs.

Comparant leur cas avec celui d'une paralysie ascendante (de Landry), ils trouvent que la marche progressive et relativement rapide de cette dernière (deux à trois semaines), les symptômes de paralysie bulbaire, l'absence d'atrophie et d'altération de l'excitabilité électrique qu'elle présente, empêchent toute confusion entre eux.

Quelle est la pathogénie de la polynévrite dans ce cas? La grande dilatation de l'estomac permettait aux aliments de faire un long séjour dans cet organe (la sonde a ramené des aliments ingérés depuis huit jours) et d'y subir des fermentations anormales (fermentations qui donnaient naissance à l'acétone, à l'acide acétique, à l'acide butyrique .....) dont l'absorption a empoisonné le système nerveux comme l'eussent fait des toxines engendrées par des micro-organismes pathogènes. Ce qui rend cette hypothèse probable, c'est que l'amélioration de l'état gastrique obtenue à divers moments, grâce au lavage, a chaque fois produit une amélioration correspondante des désordres nerveux.

Mais pourquoi la dilatation de l'estomac, si fréquente cependant, n'occasionne-t-elle pas de nombreux cas semblables à celui-ci? C'est que leur sujet avait un système nerveux dont les antécédents héréditaires (alcoolisme, ulcération, névropathie) et personnels (influenza à deux reprises) expliquent suffisamment le peu de résistance, et devaient l'exposer en première ligne à l'influence des poisons de la fermentation gastrique.

Cinquième section.

La séance s'ouvre à 9 $^3/_4$ heures, sous la présidence de M. le comte van der Straeten-Ponthoz.

M. Édouard van der Smissen, professeur à l'Université de Liége, donne d'abord quelques renseignements sur les travaux

de M. Solvay et de ses amis relativement à un système d'échange qu'ils appellent *comptabilisme social.*

Ce système est exposé et défendu dans les *Annales de l'Institut des Sciences sociales.*

Les partisans de cette idée seraient disposés à tenter un essai libre de ce système.

Cette communication a été suivie d'une discussion animée au sujet des bases véritables du système monétaire.

M. Léon t' Serstevens est ensuite revenu à la question des assurances agricoles. Il a parlé des projets que l'on attribue au Gouvernement à ce sujet. Il a vivement insisté sur les dangers que l'assurance pouvait présenter et sur la prime au suicide que constituait souvent cette assurance. Les faits qu'il a cités à ce sujet sont absolument probants. La question des assurances est très complexe. Toutes les assurances diverses ont des liens entre elles. Actuellement on est dans une période de confusion. Les sociétés d'assurance contre l'incendie remanient leurs tarifs et arrivent aux résultats les plus divers. De même dans les assurances agricoles : certaines compagnies demandent jusque fr. 1.50 à l'hectare ; d'autres offrent d'assurer à 60 centimes.

L'État belge assureur devra avoir un personnel très nombreux : il ne pourra examiner, comme une compagnie, chaque cas particulier. Il serait de l'intérêt de l'État de n'être, tout au moins au début, que protecteur, obligeant même à s'assurer, mais non assureur.

M. t'Serstevens serait partisan de l'octroi de subsides aux compagnies d'assurance agricole, et de la formation de syndicats d'assurance.

M. le comte van der Straeten-Ponthoz a présenté quelques observations à ce sujet. Il a montré qu'en cette matière, l'autorité centrale combat plus qu'elle ne favorise l'initiative privée. Il s'est déclaré adversaire de l'organisation des assurances agricoles par l'État.

La fin de la séance a été occupée par une communication de M. Éd. van der Smissen sur la question monétaire aux États-

Unis. Il a exposé les événements de la campagne présidentielle dans ses rapports avec la question monétaire. Cette communication a vivement intéressé l'assistance. Elle a donné lieu à une discussion animée à laquelle ont pris part MM. t' Serstevens, Lagasse, comte van der Straeten-Ponthoz, abbé de Baets, et le R. P. Castelein.

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE.

A 3 ¹/₄ heures a lieu, dans la salle académique du Collège Saint-Rombaut, l'assemblée générale sous la présidence d'honneur de Son Éminence le Cardinal-Archevêque de Malines, et la présidence de M. A. Witz, professeur aux Facultés catholiques de Lille, président en exercice de la Société.

M. Van Gehuchten, professeur à l'Université catholique de Louvain, fait une conférence sur *la structure du télencéphale, les centres de projection et les centres d'association.*

Après une revue générale de tout le système nerveux, le conférencier, résumant les travaux de Flechsig, nous montre comment se forment et se développent dans le cerveau les *centres de projection*, c'est-à-dire les centres où aboutissent nos différentes sensations : olfactive, visuelle, auditive, etc., et les dimensions variables de ces centres, d'après l'étendue des sens extérieurs qu'ils desservent. Il passe ensuite aux *centres d'association* où les sensations répercutées se coordonnent, se comparent, s'enchaînent, où elles donnent naissance à l'imagination et à la mémoire, où elles s'élaborent et deviennent pour ainsi dire la base sur laquelle l'intelligence va échafauder sa connaissance et sa pensée.

Chose singulière et qui révèle entre la science et la philosophie un surprenant accord : ces centres d'association, organes et instruments des plus hautes fonctions psychiques, sont nuls au

bas de l'échelle des mammifères; ils commencent à se développer chez les carnassiers; chez les singes, ils représentent un volume égal à celui des centres de projection; chez l'homme, ils occupent, à eux seuls, les deux tiers de toute l'étendue de la face externe des hémisphères cérébraux.

Dans la race humaine elle-même, leur développement est proportionnel au développement intellectuel. Ils prédominent singulièrement chez les hommes supérieurs, tandis qu'ils se rétrécissent chez les arriérés, les idiots et les imbéciles.

Plus curieuse et plus remarquable encore par ses conséquences philosophiques est la formation progressive de ces centres chez l'enfant. Au premier mois, les centres de projection sont seuls achevés. Toutes les manifestations de la vie consistent à répondre par voie réflexe aux excitations du dehors.

Au commencement du deuxième mois seulement, les centres d'association se rattachent par des fibres naissantes aux sphères sensorielles : la mémoire s'entr'ouvre, des comparaisons vagues s'établissent, ... l'enfant peut saisir la signification des objets du monde extérieur, et longtemps, longtemps encore, comme pierre par pierre, se poursuit l'édifice du cerveau dans ses centres de vie intellectuelle.

Cette conférence a été publiée *in extenso* dans la livraison de janvier 1897 de la *Revue des questions scientifiques*.

M. A. Witz, président, remercie et félicite le conférencier; il remercie aussi Son Éminence le Cardinal-Archevêque d'avoir bien voulu honorer la séance de sa présence; puis tous ceux qui ont contribué au succès de la session, et en particulier M. le chanoine Van Ballaer, supérieur du Collège Saint-Rombaut.

Son Éminence le Cardinal-Archevêque prononce ensuite l'allocution suivante :

Monsieur le Président,
Messieurs,

J'ai accepté de grand cœur l'honneur que vous m'avez offert de présider l'assemblée générale qui clôture votre session.

Aussi bien, en me dérobant à votre invitation, j'aurais pensé méconnaître les intentions de l'Église, toujours si attentive à prodiguer des encouragements à ceux qui se dévouent à la recherche de la vérité et à l'extension du savoir humain. J'aurais cru manquer en outre à ce qu'un sentiment de vrai patriotisme m'impose à l'égard d'hommes éminents dont les savants travaux ajoutent tant d'éclat au renom scientifique de notre pays.

Vingt ans déjà passés, Messieurs, la Société scientifique de Bruxelles, due à l'initiative d'un religieux (*), trop tôt enlevé à la science, vérifie parfaitement sa devise et démontre à tous « qu'on n'est pas nécessairement incapable parce qu'on est catholique; que la foi n'ôte rien au génie, et qu'on peut soumettre sa raison à l'autorité divine sans rien sacrifier des découvertes certaines de l'esprit humain ».

Il me serait donc permis, à ce titre, de saluer en vous des défenseurs de l'Église, et de vous remercier de ce que vous faites pour sa cause. Mais vous me rappelez que tel n'est pas votre but, et que vous n'êtes apologistes de la foi chrétienne que d'une façon indirecte et par voie de conséquence. Et je me souviens d'ailleurs que le catholicisme n'a pas besoin d'apologie : son histoire, en effet, est sa défense. C'est à lui que nous devons la civilisation et les lumières dont nous jouissons aujourd'hui; c'est à son influence que se rattache tout ce qui est grand, bon et noble dans le monde, tout ce qui est pur, élevé et sublime dans l'humanité. Sûre de sa divine origine, et de la permanence, dans son sein, de l'Esprit de vérité, l'Église continue sa mission d'éducatrice des nations, en dépit de tout ce que l'incrédulité peut dire ou faire contre elle.

Ce que je veux voir en vous, Messieurs, ce que je veux louer hautement, à cette heure, c'est le culte bien compris de la science, c'est son véritable amour.

Amis sincères de la science, vous l'êtes; et, plus que d'autres, vous avez le droit d'en revendiquer l'honneur!

(*) Le Père Carbonnelle, S. J., de concert avec un groupe d'amis dévoués à la même cause.

Car d'abord vous avez de la science la notion nette et adéquate. Vous ne versez pas dans cette erreur, commune de nos jours, de confondre les opinions souvent préconçues, les conjectures, les spéculations hasardées des chercheurs, avec la science, c'est-à-dire, avec les connaissances positives, avec les vérités démontrées.

Vous distinguez la science d'avec les théories de ceux qui s'en disent les représentants.

La science certaine se compose des conquêtes véritables que l'esprit humain a réalisées; elle constitue une sorte d'héritage intellectuel que nous ont transmis les générations précédentes. Vous n'en répudiez aucune part quelconque; loin de là, la vérité étant le bien suprême de l'intelligence humaine, vous aspirez, vous travaillez à l'accroître sans cesse et à enrichir le trésor commun.

Les hypothèses, vous les estimez comme rendant souvent d'utiles services. La science ne peut s'en passer. Lorsqu'elles sont prudemment établies sur des données positives, quoique incomplètes, elles ont fréquemment une fécondité merveilleuse pour rendre compte de phénomènes jusque-là délaissés et incompris, et les relier par des lois de plus en plus générales et de mieux en mieux définies. Mais vous savez vous garder de l'illusion qui prend ces conceptions, ingénieuses mais parfois téméraires, pour l'expression exacte de la réalité.

Amis de la vraie science, vous l'êtes, parce que vous n'ignorez point et que vous savez respecter les limites de son domaine. Avec tant d'esprits distingués qui, dans ce siècle, ont honoré, à la fois, la science et l'Église, vous vous avancez librement sur le terrain de l'observation et de l'expérience, sans prétendre imposer vos méthodes aux questions d'ordre suprasensible ou surnaturel. Toujours prêts à profiter des secours offerts par la philosophie et la vérité révélée, vous ne perdez jamais de vue la ligne de démarcation tracée entre les sciences fondées sur l'induction et celles qui reposent sur les bases non moins solides de la raison et de la foi.

Comme l'illustre mathématicien Cauchy, vous reconnaissez qu'en imposant à l'esprit du savant certaines règles, la Religion

ne fait que contenir son imagination dans de justes bornes, et lui épargne le regret de s'être laissé abuser par de faux systèmes ou des illusions funestes.

Que cette conduite est sage, Messieurs, et qu'elle est riche de promesses pour l'avancement et le progrès des sciences humaines! Car enfin, qu'avez-vous à redouter de vos convictions religieuses? L'acceptation des enseignements révélés ne vous réduit pas à un état d'esclavage intellectuel; elle ne vous prive pas de l'usage légitime de la liberté de penser. La foi religieuse agrandit le champ de vos connaissances; elle n'en supprime aucune partie. Elle éclaire vos pas, affermit votre marche, et vous révèle, trônant sur des sommets plus radieux et dans une lumière plus brillante, le même Dieu tout-puissant et infini dont vous avez découvert les traces dans le livre de la nature.

Pour se défendre contre cette étrange accusation « que la science est l'ennemie de la foi », chacun de vous, Messieurs, pourrait dire avec l'auteur des *Splendeurs de la Foi* : « J'ai tout lu, j'ai tout pénétré et je n'ai jamais été troublé par le moindre doute, par la plus petite objection contre la foi; j'ai toujours cru, je crois plus que jamais à toutes les vérités de l'Église catholique, apostolique et romaine, avec une foi tranquille et sereine, vive et forte, et sans qu'un nuage s'interpose entre le dogme et mon esprit. J'ai sondé, autant que j'en ai été capable, tous les mystères de la Religion et de la science, et jamais ma foi n'a été ébranlée. »

Qu'elle est insensée, au contraire, et désastreuse pour la cause qu'ils s'imaginent servir, la conduite de ceux qui proclament, avant tout, comme un dogme indiscutable, l'indépendance de la raison humaine, et sa souveraineté absolue dans le domaine intellectuel, rejetant ainsi, dans leur orgueilleuse témérité, les secours et la direction de la philosophie spiritualiste et de la Révélation! Qu'ils entendent leur condamnation sur les lèvres d'un de leurs maîtres, déclarant solennellement dans un congrès de naturalistes, en 1877 (*) : « Tous les essais tentés

(*) Le Dr Virchow.

pour transformer nos problèmes en affirmations doctrinales, pour faire de nos hypothèses les bases des conceptions de l'esprit humain, et, en particulier, tout effort tendant à déposséder l'Église, et à remplacer ses dogmes par une religion de l'évolution, tout effort de ce genre, soyez en sûrs, aboutira fatalement au naufrage, et ce naufrage exposera, en même temps, aux plus graves dangers la situation générale de la science. »

Persévérez, Messieurs, dans cet amour et ce culte de la vraie science, et montrez-vous, comme par le passé, les chevaliers sans peur et sans reproche de cette noble dame qui s'appelle la Vérité.

A son service, n'en doutez pas, vous faites une œuvre utile, glorieuse pour Dieu et pour les hommes : *Labor vester non est inanis in Domino* (*).

Il y a quelques années, dans cette ville, l'éminent Recteur de l'Université catholique de Paris (**) établissait, dans un magistral discours, que le droit comme le devoir des catholiques est de disputer à leurs adversaires l'influence sur les masses. Il démontrait victorieusement que dans tous les temps, surtout au temps où nous sommes, la science est une des principales, une des plus fécondes influences qui puissent être exercées pour le gouvernement matériel ou moral de la vie.

Il terminait par cet appel que vous me permettrez de vous adresser à mon tour :

« Les batailles décisives se livrent sur ce terrain supérieur d'où dérivent les grands courants de doctrine, qui sont aussi, en ce monde, les grands courants d'action. Catholiques de Belgique, aidez-nous. En présence de ces hommes audacieux qui prétendent confisquer pour eux l'honneur et le profit de la science et se faire de cette fille de Dieu une arme contre son auteur, imitez le philosophe grec qui marchait pour prouver aux sophistes que le mouvement n'est pas impossible.

» On nous dit que la science tue la foi; que la foi ne peut pas

---

(*) I Cor. XV, 58.
(**) Mgr d'Hulst. Congrès de Malines, 1891.

croître dans l'atmosphère de la science. Nous mettrons à néant cette accusation inepte en faisant fleurir la science dans l'atmosphère de la foi. »

M. A. Witz, président, après avoir exprimé à Son Éminence la gratitude de la Société scientifique pour ces précieux encouragements, déclare close la session d'octobre 1896 de la Société scientifique.

SESSION DU JEUDI 28 JANVIER 1897

A BRUXELLES

SÉANCE DES SECTIONS

Première section.

M. Ch.-J. de la Vallée Poussin lit le rapport suivant sur une note de M. de Montessus concernant le *Développement en fonctions continues périodiques d'ordre supérieur des racines des équations algébriques quelconques.*

« Le travail de M. de Montessus se rattache tout naturellement à certaines recherches récentes de M. Lémeray, relatives aux racines des équations.

M. Stephanos avait posé, dans l'*Intermédiaire des mathématiciens* de 1894, le problème suivant (question 193) : *Quand la suite*

$$a_1 = f(a), \quad a_2 = f(a_1), \quad \dots \quad a_n = f(a_{n-1}), \quad \dots$$

tend-elle vers une limite quand n *tend vers l'infini?*

M. Lémeray donna d'abord quelques indications générales dans l'*Intermédiaire* (1894, p. 203) et revint ensuite avec plus de détails sur cette question dans le Recueil de l'*Association française pour l'avancement des sciences* (Caen, 1894, t. II). Dans ce travail, il s'occupe de la convergence des suites analogues à la précédente vers les racines des équations, dans le cas des racines réelles.

C'est à ce point que M. de Montessus reprend la question. Il met, avec M. Lémeray, l'équation sous la forme

$$x = f(x),$$

mais il choisit la fonction f d'une manière nouvelle et ingénieuse qui lui permet d'exprimer x par un développement illimité auquel il donne le nom de fraction continue *d'ordre supérieur*. Voici ce théorème :

Étant donnée une équation de degré m, on peut toujours la mettre sous la forme

$$x = \alpha + \frac{\psi_{m-2}(x)}{(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\dots(x-\lambda_{m-1})} = \alpha + \frac{\psi_{m-2}(x)}{\varphi_{m-1}(x)},$$

où $\alpha, \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_{m-2}$ sont des quantités fixées à l'avance, et $\psi_{m-2}(x)$ un polynôme de degré $(m-2)$ au plus.

De là résulte la transformation

$$x = \alpha + \sum \frac{\rho}{x-\lambda};$$

d'où le développement en fraction continue d'ordre supérieur

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad x = \alpha + \sum \frac{\rho}{\alpha - \lambda + \sum \frac{\rho}{\alpha - \lambda + \sum \dots}}.$$

Les réduites successives sont :

$$x_1 = \alpha, \quad x_2 = \alpha + \frac{\psi(x_1)}{\varphi(x_1)}, \quad x_3 = \alpha + \frac{\psi(x_2)}{\varphi(x_2)}, \quad \dots$$

et l'examen des conditions de convergence nous ramène à la question posée par M. Stephanos.

L'auteur examine d'abord en détail le cas des racines réelles. Précisant sur plusieurs points des résultats déjà obtenus par M. Lémeray, il énonce le théorème suivant :

On obtient toujours des réduites convergeant vers une racine a de l'équation, à condition de déterminer le polynôme φ de telle manière que la dérivée

$$\frac{d}{dx} \cdot \frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$$

reste constamment de même signe et < 1 en valeur absolue, dans l'intervalle (α, a) si cette dérivée est positive, dans l'intervalle $(\alpha, 2a - \alpha)$ si elle est négative.

S'il est possible de choisir la fonction φ de manière à vérifier ces conditions, la formule (1) fournit une expression analytique de la racine qui paraît être la plus simple et la plus générale connue jusqu'ici. Ce résultat présente au point de vue théorique une importance incontestable.

Peut-on toujours déterminer φ de manière qu'il en soit ainsi? M. de Montessus ne résout pas cette question. Sauf quelques indications d'une certaine généralité, il ne détermine la fonction φ que pour l'équation particulière

$$x^5 - 2x + 7 = 0,$$

qu'il choisit comme exemple. Il n'y a donc pas à dissimuler que les incertitudes et les tâtonnements attachés à cette détermination constituent, même au point de vue théorique, un grave inconvénient de la méthode.

L'auteur étend ensuite ces conclusions au cas des racines imaginaires. Cette extension, faite en quelques lignes, se borne à une simple affirmation dont l'évidence nous paraît contestable. Aussi nous sommes obligé de faire certaines réserves sur ce point.

A part cela, nous pensons que, par l'importance du sujet et par les résultats nouveaux qu'il contient, le mémoire de M. de Montessus est digne de figurer dans les *Annales de la Société* et nous avons l'honneur d'en proposer l'impression. »

Ces conclusions sont adoptées par la section.

M. Goedseels fait ensuite une communication sur l'emploi du niveau à bulle pour rendre un pivot vertical ou un plan horizontal.

Il rappelle d'abord que pour rendre l'emploi d'un niveau plus facile, on commence toujours par le régler, c'est-à-dire par lui donner une inclinaison sur le pivot telle, que lorsque ce pivot est vertical, la bulle reste entre ses repères pendant toute la rotation autour du pivot.

A cet effet, on place la bulle entre ses repères, puis on la fait tourner de 200 grades autour du pivot. Si la bulle reste entre ses repères après le retournement, on en conclut que le niveau est réglé. Si la bulle ne reste pas entre ses repères, on corrige la moitié de l'écart au moyen d'une petite vis de réglage, et l'autre moitié au moyen des vis calantes. On recommence la même opération jusqu'à complète satisfaction.

M. Goedseels examine ces opérations en déterminant les équations des éléments essentiels du niveau dans ses diverses positions par l'emploi des formules de transformation d'Euler. Il prouve ainsi, contrairement au sentiment des topographes :

1° Que la bulle peut rester entre ses repères après le retournement alors même que l'instrument est aussi loin d'être réglé qu'on veut ;

2° Que si l'instrument est parfaitement réglé, il faut encore que le niveau occupe une position déterminée pour que la bulle reste entre ses repères après le retournement.

M. Goedseels continuera sa communication dans une prochaine séance.

M. Goedseels expose ensuite ses idées sur l'enseignement de la géométrie descriptive : il montre, en particulier, qu'il serait souvent utile d'introduire dans cette science, dès l'origine, la notion de coordonnées.

M. Mansion lit le rapport suivant sur le mémoire de M. de Sparre, intitulé : *Sur la réduction aux fonctions elliptiques des intégrales*

$$\int \frac{Fxdx}{R^{\frac{1}{2}}},\quad \int \frac{Fxdx}{R^{\frac{3}{2}}},\quad \int \frac{Fxdx}{S^{\frac{1}{2}}},\quad \int \frac{Fxdx}{S^{\frac{3}{2}}},\ \ldots \qquad (1)$$

où

$$R = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + F, \qquad S = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D,$$

et où Fx *est une fonction rationnelle.*

« Legendre, à qui l'on doit la réduction aux trois intégrales

elliptiques de toutes les expressions analogues aux précédentes quand les exposants sont $\frac{1}{2}$, au lieu de $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, a aussi examiné les intégrales (1) ou des intégrales équivalentes, et, après lui, d'autres analystes se sont occupés de la réduction de ces intégrales aux formes normales.

M. de Sparre, ayant rencontré ces intégrales dans des questions de mécanique, a été conduit à chercher des méthodes plus expéditives que celles qui sont connues, pour opérer cette réduction, et les a exposées dans le mémoire soumis à notre section.

Pour les deux premières, il suppose R décomposé effectivement en un produit de deux trinômes réels du second degré et fait successivement les substitutions

$$x = m + \frac{n}{y}, \quad y = z - \lambda, \quad z = \frac{1}{t},$$

puis, dans un cas,

$$z^2 = \beta \operatorname{séc}^2 \varphi - \gamma \operatorname{tang}^2 \varphi, \quad \sin \varphi = \operatorname{cn}^2(u, k), \quad k^2 = \frac{1}{2},$$

dans l'autre,

$$z^2 = \beta \cos^2 \varphi + \gamma \sin^2 \varphi, \quad \sin 2\varphi = \operatorname{cn}^2(u, k), \quad k^2 = \frac{1}{2}.$$

On peut observer que ces deux cas se confondent, pour ainsi dire, si l'on remplace dans le second φ par $\varphi\sqrt{-1}$, et si l'on emploie des fonctions hyperboliques.

Pour les deux dernières intégrales, l'auteur pose d'abord $S = (x - \alpha)(ax^2 + bx + c)$. Si $b^2 - 4ac$ est inférieur à zéro, il fait successivement, pour la première,

$$x = m \operatorname{tang}(\varphi + \varphi_1) + n, \quad \operatorname{séc}^{\frac{2}{3}} \varphi = z, \quad \lambda = 2^{\frac{2}{3}}, \quad z = \lambda p u,$$
$$p'u = \sqrt{4p^3u - 1}.$$

Dans le cas où, dans S, A = 0, il suffit de faire la constante $\varphi_1 = 0$. Les calculs sont à peu près les mêmes pour la seconde des deux dernières intégrales.

Si $b^2 - 4ac$ est supérieur à zéro, on emploie les substitutions

$$x = \alpha + \frac{m}{y}, \quad y = \gamma \sin^2 \varphi + \beta \cos^2 \varphi, \quad \sin 2\varphi = z^{\frac{3}{2}}, \quad \lambda = -2^{\frac{2}{3}},$$

$$z = \lambda pu, \quad p'u = \sqrt{4p^3u + 1}.$$

Il y a des simplifications quand $A = 0$.

Dans le cas des deux dernières intégrales comme dans celui des deux premières, l'auteur traite complètement un exemple : il calcule la valeur de u, pour une valeur donnée de φ, en supposant que l'on néglige les termes en q^4, comme cela est permis ordinairement en pratique, q ayant la signification habituellement admise dans la théorie des fonctions thêta.

Comme on le voit, le mémoire de notre savant collègue de l'Université catholique de Lyon est un complément aux nombreux écrits sur les fonctions elliptiques et leurs applications qu'il a publiés dans nos *Annales* (*). Nous proposons à la section d'en voter l'impression dans le même recueil et d'adresser des remerciements à l'auteur. »

Ces conclusions sont adoptées par la section.

M. Lagasse fait deux communications, l'une sur les procédés qui lui ont servi à obtenir une température uniforme dans la salle des séances du Sénat de Belgique, l'autre sur le rôle capital de l'observation et de l'expérimentation dans l'art de l'ingénieur, à propos d'un récent travail de M. Rabut.

M. Ch.-J. de la Vallée Poussin lit ensuite le résumé suivant de la quatrième partie de ses *Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers*.

« La quatrième partie de notre mémoire a pour objet d'étendre les conclusions de la troisième partie au cas des nombres premiers représentables par une forme quadratique de déterminant positif.

(*) Voir 1886, X, 2e partie, 129-189; 1887, XI, 2e partie, 200-290; 1888, XII, 2e partie, 1-89; 1884, VIII, 2e partie, 97-120; 1885, IX, 2e partie, 205-230; 49-94; 249-258

Nous commençons par définir une certaine condition, que nous appelons la *condition* Θ et qui joue un rôle essentiel dans notre analyse :

Soit F (s) une fonction donnée par son développement de Taylor

$$F(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots + a_n s^n + \cdots;$$

nous disons que $F(s)$ vérifie la condition Θ, si l'on peut poser pour toute valeur de n supérieure à un nombre donné N

$$\text{mod}\, a_n < \left(d\,\frac{ln}{n}\right)^n.$$

où d est une constante par rapport à n.

L'importance de cette condition pour nous est une conséquence des résultats obtenus par M. Hadamard. Une fonction qui vérifie cette condition ne peut être d'un genre supérieur au premier et, si elle a une infinité de racines ρ, la série étendue à toutes ces racines, $\Sigma\rho^m$, sera absolument convergente pour $m < -1$.

Le rôle que ces propriétés ont joué dans les parties précédentes du mémoire fait pressentir l'importance que va prendre la condition Θ dans celle-ci. Grâce à la simplicité relative des fonctions à analyser, nous avons pu, dans les parties précédentes du mémoire, nous dispenser de définir et d'étudier la condition Θ, mais il n'en est plus de même dans celle-ci.

Le Chapitre Ier expose les propriétés générales des fonctions qui vérifient la condition Θ. Si plusieurs fonctions vérifient la condition Θ, il en est de même de leur somme et de leur produit. L'intégrale effectuée par rapport à un paramètre α d'une fonction qui vérifie la condition Θ conservera en général cette propriété, etc.... Parmi les fonctions qui vérifient cette condition Θ, nous indiquons e^{as}, sin as, $(s - 1)\,\zeta(s)$,... enfin les fonctions $Z(s, \chi)$ et $L(s, k)$ de la deuxième et de la troisième partie du mémoire.

Nous éclaircirons beaucoup notre résumé en indiquant les relations qui existent entre la troisième partie de notre travail et

celle que nous analysons maintenant. Rien n'est plus propre d'ailleurs à mettre en relief l'importance de la condition Θ.

Dans le résumé de la troisième partie que nous avons communiqué à la section, on a vu que l'étude des nombres premiers représentables par une forme quadratique de déterminant négatif (— Δ) repose sur l'*équation fondamentale*

$$(1) \quad . \quad . \quad L(s,k) = P(s) \prod_q \frac{1}{[1-q^{-s}k(c_q)][1-q^{-s}k(c_q^{-1})]}.$$

La même équation subsiste dans le cas d'un déterminant positif D, sauf que le sens des symboles y est très légèrement modifié, comme il suit :

Au premier membre, L (s, k) est une fonction de s liée au caractère k et qui se définit, au moyen d'une fonction Q (s, c) sur laquelle nous allons revenir, par la formule

$$(2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad L(s,k) = \sum_{i=1}^{h} k(c_i) Q(s,c_i),$$

où la somme s'étend à toutes les classes proprement primitives $c_1, c_2, \ldots c_h$ du déterminant D.

Dans le second membre, on a posé, en abrégé,

$$P(s) = \prod_p \frac{1}{1-p^{-2s}},$$

ce produit s'étendant à tous les nombres premiers p dont D est non résidu ; le produit Π_q s'étend, au contraire, à tous les nombres premiers q dont D est résidu et c_q, c_q^{-1} sont les deux classes opposées du déterminant D dans lesquelles q peut se représenter.

En somme, il n'y a de différence entre les cas des déterminants positifs ou négatifs que par la définition de Q (s, c). Nous y arrivons maintenant.

Pour définir Q (s, c), nous choisissons dans la classe c une forme

$$f = ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

où $a > 0$, et nous posons, pour $\Re(s) > 1$,

$$(3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad Q(s, c) = \sum_{x,y} \frac{1}{(ax^2 + 2bxy + cy^2)^s}.$$

Mais la somme double ne s'étend plus, comme dans le cas des déterminants négatifs, à toutes les valeurs positives et négatives de x et y qui rendent f impaire et première à D, elle s'étend seulement à celles de ces valeurs qui vérifient, en outre, les deux conditions

$$y \gtreqq 0, \quad ax + by > \frac{T}{U} y,$$

où (T, U) sont les plus petites solutions positives de l'équation de Pell : $T^2 - DU^2 = 1$.

La fonction définie, pour $\Re(s) > 1$, par la formule (3) ne dépend pas du choix de f dans la classe c, ce qui permet de choisir f de manière à simplifier les raisonnements. La formule (3) n'est valable que pour $\Re(s) > 1$, tandis que la fonction $Q(s, c)$ est, comme on le verra, une fonction uniforme dans tout le plan. Il est de la plus haute importance d'en obtenir une représentation valable sans restriction pour en déduire ses propriétés analytiques. C'est à résoudre ce problème que se résume notre tâche. On va le voir en comparant encore une fois le cas actuel au précédent.

Nous avons étudié la fonction $Q(s, c)$ dans le cas d'un déterminant négatif $(-\Delta)$; nous avons reconnu que cette fonction est méromorphe dans tout le plan qui n'a qu'un pôle $s = 1$ dont le résidu ne dépend que du déterminant Δ. Toutes les propriétés de $Q(s, c)$ dérivent de son expression valable dans tout le plan et peuvent se résumer dans la formule

$$Q(s, c) = \frac{\pi \varphi(\Delta)}{2\Delta\sqrt{\Delta}} \frac{1}{s-1} + \theta(s),$$

où $\theta(s)$ désigne en général une fonction entière qui vérifie la condition Θ. De cette formule découlent ensuite toutes les pro-

priétés de L (s, k), si bien qu'il suffit d'établir une formule analogue dans le cas d'un déterminant positif pour généraliser du même coup toutes les conclusions de la troisième partie.

Ce résultat peut être atteint; la formule qui correspond pour un déterminant positif à celle que nous venons d'écrire est la suivante :

$$(4) \quad . \quad . \quad Q(s, c) = \frac{\varphi(2D)}{4D\sqrt{D}} \log(T + U\sqrt{D}) \frac{1}{s-1} + \theta(s),$$

où $\theta(s)$ désigne encore une fonction entière dans tout le plan qui vérifie la condition Θ.

Démontrer la formule (4) est donc le but que nous poursuivons d'un bout à l'autre de notre travail. Mais cette démonstration est aussi laborieuse dans le cas actuel qu'elle était simple dans le cas précédent. La cause en est dans la diversité des éléments analytiques qu'il faut mettre en œuvre et qui réclament chaque fois une étude approfondie. La combinaison de ces éléments eux-mêmes exige ensuite la plus grande attention, car Q (s, c) se présente comme la somme d'un nombre plus ou moins considérable de fonctions présentant toutes une infinité de pôles et il faut montrer que ces pôles se détruisent réciproquement. Tel est en deux traits le résumé de la quatrième partie; nous allons la reprendre plus en détail.

Nous commençons par l'étude des éléments analytiques les plus simples.

Le Chapitre II est consacré à l'étude de la fonction $Z_h(s, u, v)$ de la variable s et qui dépend de trois paramètres u, v, γ qui sont réels et compris tous les trois entre 0 et 1 (limites exclues pour γ). Cette fonction est définie par la formule

$$(5) \quad . \quad . \quad . \quad Z_h(s, u, v) = \sum_{x=h}^{\infty} \frac{1}{[(x+u)^2 - \gamma(x+v)^2]^s},$$

où la sommation s'étend à toutes les valeurs positives et entières de x supérieures à un entier donné h.

La fonction Z_h (s, u, v) n'est définie que pour $\Re(s) > \frac{1}{2}$ par

la formule (5). Nous montrons qu'elle est uniforme dans tout le plan et possède une infinité de pôles (sauf pour $u = v$). *Mais, si l'on fait la combinaison*

$$Z_k(s, u, v) - Z_k(s, 1 - u, 1 - v),$$

les pôles se détruisent et cette fonction est entière dans tout le plan et vérifie la condition Θ.

Pour démontrer ce théorème, nous nous appuyons sur les propriétés de la fonction

$$\psi_3(\alpha, t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+\alpha)^2\pi t} - \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(n-\alpha)^2\pi t}, \quad (0 < \alpha < 1)$$

et nous montrons que cette fonction est liée à la fonction $\psi_2(\alpha, x)$ de la seconde partie du mémoire par la formule

$$\psi_3(\alpha, t) = \int_t^{\infty} \psi_2(\alpha, x) \frac{dx}{\sqrt{x - t}},$$

qui nous permet d'utiliser les propriétés fonctionnelles de $\psi_2(\alpha, x)$.

Le Chapitre III est consacré à l'étude des deux fonctions nouvelles de la variable s :

$$(6) \quad \ldots \quad \left\{ \begin{aligned} A(s, u, v) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos 2\pi (n + u) v}{(n + u)^s}, \\ B(s, u, v) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin 2\pi (n + u) v}{(n + u)^s}, \end{aligned} \right.$$

où u et v sont deux paramètres réels dont le premier u est compris entre *zéro* et *un*.

Ces fonctions ne sont définies que pour $\Re(s) > 1$ par les formules (6), mais elles subsistent dans tout le plan. *Nous montrons que ces deux fonctions sont entières dans tout le plan et vérifient la condition* Θ, *sauf pour les valeurs entières de* v.

Pour démontrer ce résultat, nous rattachons les fonctions précédentes aux fonctions auxiliaires

$$\begin{cases} \psi_1(u, v, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(n+u)^2 \pi t} \cos 2\pi (n+u) v, \\ \chi_1(u, v, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(n+u)^2 \pi t} \sin 2\pi (n+u) v, \end{cases}$$

qui possèdent les propriétés fonctionnelles

$$\begin{cases} \psi_1(u, v, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-(k+v)^2 \frac{\pi}{t}} \cos 2k\pi u, \\ \chi_1(u, v, t) = -\frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-(k+v)^2 \frac{\pi}{t}} \sin 2k\pi u. \end{cases}$$

Ces relations tiennent ici la place des propriétés de la fonction $\psi_1(\alpha, x)$ dans la seconde partie du mémoire.

Nous passons ensuite à l'étude des deux intégrales $(0 < \gamma < 1)$:

$$(7) \qquad \begin{cases} \int_0^1 \frac{A(2s-1, u, kv) + A(2s-1, 1-u, kv)}{(1-\gamma v^2)^s} dv, \\ \int_0^1 \frac{B(2s-1, u, kv) - B(2s-1, 1-u, kv)}{(1-\gamma v^2)^s} dv, \end{cases}$$

où k désigne un entier, *et nous montrons que ce sont des fonctions entières de* s *dans tout le plan qui vérifient la condition* Θ.

Le Chapitre IV est consacré à l'étude d'une nouvelle fonction de la variable s qui sert d'intermédiaire entre les fonctions précédentes et la fonction $Q(s, c)$. C'est la fonction $\mathcal{G}(s, u, v)$. Elle dépend, comme $Z(s, u, v)$, de trois paramètres réels u, v, γ

$$0 < u < 1, \quad 0 < v < 1, \quad 0 < \gamma < 1$$

et elle est définie par une somme double :

$$(8) \quad . \quad . \quad \mathcal{G}(s, u, v) = \sum_{x=1}^{\infty} \sum_{y=0}^{E(x+u-v)} \frac{1}{[(x+u)^2 - \gamma (y+v)^2]^s},$$

où l'on attribue à x toutes les valeurs entières de 1 à ∞ et où l'on donne à y, pour chaque valeur de x, les valeurs entières $\gtreqless 0$ et $< (x + u - v)$.

La formule (8) n'est valable que pour $\mathfrak{R}(s) > 1$. Mais $\mathcal{G}(s, u, v)$ est une fonction uniforme dans tout le plan et on peut l'exprimer au moyen des fonctions étudiées dans les deux chapitres précédents. Cette fonction, comme $Z(s, u, v)$, a une infinité de pôles; *mais, sauf le seul pôle* $s = 1$, *ils se détruisent tous dans la combinaison*

$$\mathcal{G}(s, u, v) + \mathcal{G}(s, 1 - u, 1 - v),$$

qui peut se mettre sous la forme

$$\frac{1}{s-1} \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \log \frac{1 + \sqrt{\gamma}}{1 - \sqrt{\gamma}} + \theta(s)$$

et $\theta(s)$ *est une fonction entière qui vérifie la condition* Θ.

Pour démontrer ce théorème, nous considérons la fonction $\mathcal{G}_h(s, u, v)$, qui s'obtient en supprimant dans $\mathcal{G}(s, u, v)$ tous les termes, en nombre limité, dans lesquels x est moindre qu'un nombre entier h, pris assez grand pour qu'on ait

$$h > \sqrt{\gamma}\,(h + 1).$$

Les propriétés que nous établissons pour $\mathcal{G}_h$ seront vraies aussi pour $\mathcal{G}$. Nous avons ainsi à considérer la combinaison

$$\mathcal{G}_h(s, u, v) + \mathcal{G}_h(s, 1 - u, 1 - v).$$

Nous développons ces fonctions en série trigonométrique par rapport à v dans l'intervalle (0, 1) sous la forme

$$(10)\quad \left\{ \begin{aligned} \mathcal{G}_h(s, u, v) &= \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos 2k\pi v + b_k \sin 2k\pi v), \\ \mathcal{G}_h(s, 1-u, 1-v) &= \frac{1}{2} a'_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a'_k \cos 2k\pi v - b'_k \sin 2k\pi v). \end{aligned} \right.$$

Les coefficients $a_0, a_k, b_k; a'_0, a'_k, b'_k$ sont des fonctions de s qui ont toutes une infinité de pôles; mais ces pôles se détruisent *tous* dans les combinaisons

$$a_k + a'_k \quad \text{et} \quad b_k - b'_k,$$

qui sont entières dans tout le plan et vérifient la condition Θ, tandis que le pôle $s = 1$ subsiste seul dans la combinaison $a_0 + a'_0$. Celle-ci peut se mettre sous la forme

$$(11) \quad . \quad . \quad a_0 + a'_0 = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \log \frac{1 + \sqrt{\gamma}}{1 - \sqrt{\gamma}} \frac{1}{s - 1} + \theta(s),$$

où $\theta(s)$ vérifie la condition Θ.

Ces conséquences résultent de l'expression des coefficients.

En supposant $u > v$, ce qui est permis, on a, en effet, par des transformations faciles effectuées sur les intégrales définies qui représentent d'abord les coefficients :

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} a_0 + a'_0 = {} & 2\left[\sum_{x=k}^{\infty} \frac{1}{(x+u)^{2s-1}} + \sum_{x=k+1}^{\infty} \frac{1}{(x-u)^{2s-1}}\right] \int_0^1 \frac{dv}{(1-\gamma v^2)^s} \\ & + 2\int_0^{1-u} \left[Z_k(s, u, u+v) - Z_k(s, 1-u, 1-u-v)\right] dv. \end{aligned} \right.$$

La fonction $(a_0 + a'_0)$ est ainsi décomposée en deux termes. Comme la fonction connue

$$\sum_{x=k}^{\infty} \frac{1}{(x + u)^s}$$

n'a qu'un seul pôle $s = 1$ dont le résidu est *un*, le premier terme n'a qu'un seul pôle $s = 1$ dont le résidu est

$$2\int_0^1 \frac{dv}{1 - \gamma v^2} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \log \frac{1 + \sqrt{\gamma}}{1 - \sqrt{\gamma}}.$$

Le second terme est, par suite de la propriété de la fonction

$Z_h(s, u, v)$, une fonction entière qui vérifie la condition Θ. On comprend ainsi comment on est conduit à la formule (11).

On a, par une transformation analogue,

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} a_k + a'_k = {} & 2\int_0^1 \frac{dv}{(1-\gamma v^2)^s}\left[A_h(2s-1, u, kv) + A_h(2s-1, 1-u, kv)\right] \\ & + 2\int_0^{1-u} \cos 2k\pi(u+v)\left[Z_h(s, u, u+v)\right. \\ & \qquad\qquad \left. - Z_h(s, 1-u, 1-u-v)\right] dv. \end{aligned}\right.$$

Dans cette formule, on a représenté par $A_h(2s-1, u, v)$ la fonction qui s'obtient en supprimant dans la fonction $A\,(2s - 1\ u, v)$, définie par la formule (6), les termes en nombre limité dans lesquels $n < h$.

Le premier terme au second membre jouit donc de la propriété établie pour la fonction (7), qui était

$$\int_0^1 \frac{dv}{(1-\gamma v^2)^s}\left[A(2s-1, u, kv) + A(2s-1, 1-u, kv)\right];$$

c'est par conséquent une fonction entière dans tout le plan qui vérifie la condition Θ. Le second terme est dans le même cas, tout comme le terme correspondant dans le développement de $a_0 + a'_0$.

Enfin, on trouve de même

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} b_k - b'_k = {} & 2\int_0^1 \frac{dv}{(1-\gamma v^2)^s}\left[B_h(2s-1, u, kv) - B_h(2s-1, 1-u, kv)\right] \\ & + 2\int_0^{1-u} \sin 2k\pi(u+v)\left[Z_h(s, u, u+v)\right. \\ & \qquad\qquad \left. - Z_h(s, 1-u, 1-u-v)\right] dv, \end{aligned}\right.$$

où B_h est défini par rapport à B comme A_h par rapport à A. On en conclut, comme dans le cas précédent, que $b_k - b'_k$ est une fonction entière dans tout le plan, qui vérifie la condition Θ.

En combinant ces résultats, on peut en déduire les propriétés que nous avons attribuées à la fonction

$$\mathcal{G}(s, u, v) + \mathcal{G}(s, 1 - u, 1 - v);$$

mais, pour que le raisonnement soit rigoureux, il y a différentes précautions à prendre qui tiennent à ce que l'on considère des séries renfermant un nombre illimité de termes. De là résultent des développements assez étendus, dont il suffit de signaler l'existence ici.

Dans le CHAPITRE V, nous étudions les propriétés de la fonction $\mathcal{G}(s, 0, v)$ qui a été exclue du chapitre précédent et nous montrons, par un raisonnement du même genre, la formule analogue

$$\mathcal{G}(s, 0, v) + \mathcal{G}(s, 0, 1 - v) = \frac{1}{s-1}\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\log\frac{1+\sqrt{\gamma}}{1-\sqrt{\gamma}} + \theta(s).$$

Enfin, dans le CHAPITRE VI, nous arrivons à la fonction $Q(s, c)$ et nous montrons que, moyennant un choix convenable (*) de la forme

$$f = ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

elle se ramène à une somme de fonctions $\mathcal{G}(s, u, v)$, en nombre limité, par la formule

$$Q(s, c) = \frac{1}{(4ab^2D^2T^2)^s}\,\underset{u,v}{S}\,\mathcal{G}(s, u, v),$$

où l'on a une sommation à faire par rapport à une série de valeurs de (u, v), tandis que γ a une valeur constante $DU^2 : T^2$ inférieure à l'unité.

Cette décomposition correspond au partage en plusieurs groupes des valeurs de x, y à substituer dans f.

(*) On suppose a, b et c positifs, a pair, a et b divisibles par D et c premier à 2D.

Par les deux substitutions successives

$$\begin{cases} x = \alpha + 2bDx', \\ y = \beta + 2aDy', \end{cases} \qquad \begin{cases} x' + y' + E\dfrac{a\alpha + b\beta}{2abD} = \alpha' + Tx'', \\ \qquad\qquad y' = \beta' + bUy'', \end{cases}$$

on réduit f à

$$f = 4ab^2D^2T^2\left[(u + x'')^2 - \gamma(v + y'')^2\right],$$

où u et v s'expriment en fonction de $(\alpha, \beta, \alpha', \beta')$. Or, on peut engendrer toutes les valeurs de x et y, en attribuant à $(\alpha, \beta, \alpha', \beta')$, donc à (u, v) certains systèmes de valeurs, en nombre limité, pour chacun desquels x'' et y'' sont assujettis aux conditions qui définissent $\mathcal{G}$.

Les différents systèmes de valeurs de (u, v) méritent d'être examinés de très près. Le paramètre v n'atteint jamais ses valeurs limites 0 et 1, mais u peut les atteindre dans certains cas. Si u n'est pas nul, au système de valeurs (u, v) correspond le système $(1 - u, 1 - v)$; si $u = 0$, au système $(0, v)$ correspond le système $(0, 1 - v)$, de sorte que $Q(s, c)$ peut se mettre sous la forme

$$(16)\quad \begin{cases} Q(s, c) = \dfrac{1}{(4ab^2D^2T^2)^s} \underset{u>v}{S}\left[\mathcal{G}(s, u, v) + \mathcal{G}(s, 1 - u, 1 - v)\right] \\ \qquad + \dfrac{1}{(4ab^2D^2T^2)^s} \underset{v>\frac{1}{2}}{S}\left[\mathcal{G}(s, 0, v) + \mathcal{G}(s, 0, 1 - v)\right], \end{cases}$$

la première somme s'étendant à tous les systèmes de valeurs (u, v) où $u > v$; la seconde aux systèmes de valeurs $(0, v)$ où $v < \frac{1}{2}$ (le système $u = 0$, $v = \frac{1}{2}$ ne se présente pas).

Le nombre total des systèmes de valeurs de (u, v) est

$$2ab^2TUD\varphi(2D),$$

et l'on est ainsi conduit, en tenant compte des propriétés des fonctions $\mathcal{G}$, à poser la formule (4), ce qui était l'objet principal de nos efforts.

Dans le Chapitre VII et dernier, nous tirons de là les conséquences que nous avons déjà signalées dans ce résumé et nous montrons que les propriétés des nombres premiers représentables par une forme de déterminant négatif, établies dans la troisième partie du mémoire, subsistent aussi pour les déterminants positifs.

Nous ne signalerons que celle-ci :

Soit h *le nombre des formes proprement primitives du déterminant positif* D, *les expressions*

$$\frac{2h}{y}\sum_{q<y} lq, \quad \text{si } c \text{ est ambiguë;}$$

$$\frac{h}{y}\sum_{q<y} lq, \quad \text{si } c \text{ n'est pas ambiguë,}$$

où les sommes s'étendent aux nombres premiers $< y$ *et représentables par la classe* c, *ont pour limite l'unité, quand* y *tend vers l'infini.* »

M. Mansion accepte la charge d'être rapporteur de cette quatrième partie du mémoire de M. de la Vallée Poussin, tout en faisant observer qu'il est loin d'avoir la compétence nécessaire pour soumettre à un examen approfondi des recherches aussi ardues.

Enfin, M. Mansion esquisse, partiellement d'après Taurinus et Lobatchefsky, un exposé très simple de la géométrie non euclidienne. Il soumettra une note sur ce point à la section dans la session de Pâques et exposera en même temps une démonstration rigoureuse de la formule qui donne en intégrale triple le volume d'un corps quelconque, en géométrie non euclidienne.

Deuxième section.

M. le Secrétaire lit le rapport suivant de M. P. Duhem, professeur de physique à la Faculté des sciences de Bordeaux, sur un travail du R. P. Leray, intitulé : *Composante normale de la tension superficielle des liquides* (*).

« Le R. P. Leray sait trop bien combien les idées dont il s'est fait le défenseur diffèrent des méthodes physiques que je préconise, pour s'étonner de me voir faire des réserves touchant les hypothèses qu'il donne pour base à la théorie de la capillarité ; je ne veux d'ailleurs, en aucune façon, prendre parti dans l'intéressante discussion qui s'est élevée entre M. Van der Mensbrugghe et lui. Ces réserves faites, je me fais un plaisir de dire avec quel intérêt j'ai lu sa démonstration, où je n'ai trouvé aucune assertion mathématique qui me semble douteuse. » (Bordeaux, 9 novembre 1895.)

Voici le travail du R. P. Leray, dont la section vote l'impression.

Composante normale de la tension superficielle des liquides.

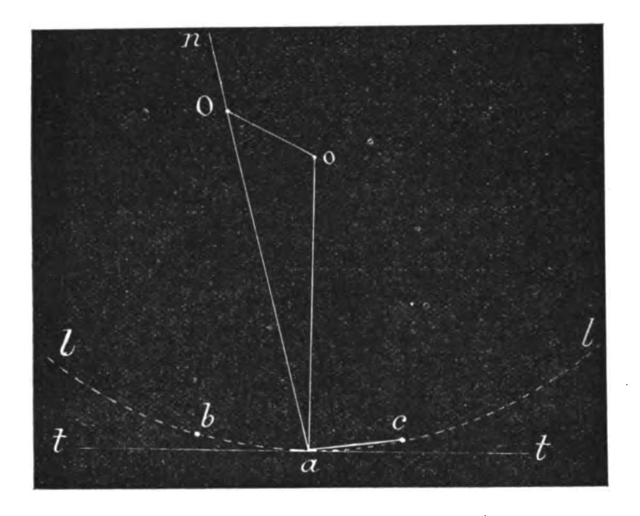
« Dans la session d'avril 1895, M. Van der Mensbrugghe a bien voulu donner lecture de mes observations relatives à la démonstration qu'il a proposée de la formule d'Young; et, après y avoir répondu, il a émis le vœu de me voir présenter à notre section une démonstration plus claire et plus satisfaisante que la sienne.

J'aurais mauvaise grâce de ne pas accéder au vœu de notre honorable confrère. Car, après avoir critiqué les autres, je semblerais vouloir me soustraire à la critique. Je vais donc exposer une démonstration qui, pour moi, est plus claire et plus satisfaisante. Le sera-t-elle pour autrui ? Je n'oserais le prétendre et je m'attends bien aussi à maintes critiques.

(*) Ce travail a été présenté à la session d'octobre 1895.

Pour abréger, je supposerai établi un point que j'ai développé dans la *Revue générale des sciences* (15 mars 1893), savoir que les centres de gravité des molécules superficielles d'un liquide sont distribués sur les lignes de courbure de la surface. Par suite, une molécule quelconque *m* est en relation directe seulement avec quatre voisines, et nous nous proposons actuellement de calculer la résultante normale des quatre tensions qui sollicitent *m*.

Soit *a* le centre de gravité de cette molécule, *b* et *c* les centres de deux molécules voisines situées sur la ligne de courbure *lal*.



Le cercle mené par les trois points *a*, *b*, *c* sera sensiblement le cercle osculateur de cette ligne en *a*, et son rayon $ao = r$ pourra être considéré comme le rayon de courbure au même point. Si nous posons $ac = \lambda$ et angle $oac = \theta$, nous aurons la relation

$$\lambda = 2r \cos \theta.$$

D'autre part, le plan mené par la tangente *tat* à la ligne *lal* et par la normale *an* à la surface, coupera cette surface suivant une section principale dont le rayon de courbure R s'obtiendra

en élevant en o une perpendiculaire au plan du cercle osculateur aco. Cette perpendiculaire rencontrera la normale an au point O tel que $aO = R$, et en appelant ω l'angle oaO, on aura

$$r = R \cos \omega.$$

Enfin, désignons par f la force de liaison ou tension superficielle qui lie les deux molécules a et c; sa composante normale τ sera

$$\tau = f \cos Oac.$$

Mais dans le trièdre rectangle $Oaoc$, on a

$$\cos Oac = \cos \omega \cos \theta.$$

Donc

$$\tau = f \cos \omega \cos \theta = \frac{f\lambda}{2R}.$$

Comme l'action de b sur a est égale à celle de c, ou du moins en diffère excessivement peu, la résultante normale des deux actions est $\frac{f\lambda}{R}$.

En nommant f', λ', R' les quantités analogues à f, λ, R rapportées à la seconde ligne de courbure $l'al'$, nous trouverons pour la résultante normale τ des quatre tensions exercées sur a par les molécules b, c, b', c',

$$T = \frac{f\lambda}{R} + \frac{f'\lambda'}{R'}.$$

Pour faire coïncider cette formule avec celle d'Young, il faut supposer $f\lambda = f'\lambda'$, égalité qui n'est pas évidente. Sans doute à l'intérieur du liquide, supposé homogène, on peut admettre que la distance intermoléculaire λ ne varie pas avec l'orientation, et il en sera de même à la surface, si elle est plane ou sphérique, et, dans ces deux cas, on aura aussi bien $f = f'$ que $\lambda = \lambda'$, d'où $f\lambda = f'\lambda'$; mais si la symétrie est moindre et si les lignes de courbure diffèrent beaucoup, ne peut-il pas arriver, comme dans les cristaux qui n'appartiennent pas au système cubique,

que les distances des molécules varient suivant la direction et que la couche superficielle du liquide ne soit pas isotrope? Peut-être; et alors, pour maintenir l'égalité $f\lambda = f'\lambda'$, on devrait avoir $\frac{f}{f'} = \frac{\lambda}{\lambda'}$; les forces de tension devraient varier en raison inverse des distances moléculaires.

A cause de l'incertitude qui plane, pour nous, sur cette proportion, nous regardons la formule d'Young comme un cas particulier de notre formule plus générale. Toutefois, comme elle a été vérifiée approximativement dans un grand nombre de cas, nous pouvons admetttre l'égalité $f\lambda = f'\lambda'$ avec le même degré d'approximation, et écrire

$$T = f\lambda\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right).$$

Cette résultante normale T est une force que l'on peut concevoir appliquée au centre de gravité de la molécule et dirigée à l'extérieur ou à l'intérieur du liquide, suivant que sa surface est concave ou convexe.

Si un élément superficiel σ contient n molécules, et si l'on admet que les n forces appliquées à ces molécules sont égales et parallèles, la résultante rapportée à l'élément σ sera égale à leur somme et l'on aura

$$T_\sigma = nf\lambda\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)$$

Mais on a aussi, sensiblement, $n = \frac{\sigma}{\lambda^2}$. Donc

$$T_\sigma = \sigma\frac{f}{\lambda}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)$$

formule d'autant plus exacte que σ est plus petit, tout en restant supérieur à λ^2.

Observons, en finissant, que la mince pellicule de liquide où s'exerce la tension superficielle pourrait contenir plusieurs couches de molécules analogues à celle que nous avons étudiée,

sans que la formule cessât d'être applicable. Le facteur $\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)$ resterait le même pour les molécules des diverses couches situées sur une même normale. L'autre facteur serait seul modifié et ne dépendrait plus uniquement du rapport $\frac{f}{\lambda}$, mais aussi de l'épaisseur de la couche active. »

Le R. P. Schaffers communique la note suivante sur *L'excitation spontanée dans les machines électrostatiques à influence.*

« L'origine de la charge spontanée qui se manifeste dans beaucoup de machines électrostatiques n'a pas encore reçu d'explication suffisante. Nous nous proposons de faire connaître une théorie que nous croyons nouvelle, et assez générale pour rendre compte de l'auto-excitation dans toutes les machines qui s'amorcent d'elles-mêmes.

Nous admettons, d'abord, que la charge initiale est due au frottement. Sur une machine qui en est dépourvue, on n'a jamais, à notre connaissance, observé l'excitation spontanée. D'autre part, on l'observe en général dans toutes celles où le frottement est assez étendu et assez énergique, quelle que soit la nature des corps frottés. Telles sont les machines de Toepler, de Voss, de Wimshurst, de lord Kelvin, et même la machine Bonetti. Cette dernière ne s'amorce pas, il est vrai, toute seule : mais, pour la mettre en marche, il suffit toujours d'un frottement supplémentaire plus énergique, par exemple celui de la main, enduite, au besoin, d'un peu d'or massif. D'autres causes, sans doute, peuvent intervenir, ou plutôt d'autres conditions peuvent favoriser ou contrarier l'électrisation; mais la cause principale et prépondérante nous paraît être le frottement.

Il reste à expliquer comment les charges électriques développées par ce frottement peuvent donner lieu à la distribution observée sur les machines en activité. C'est le point le plus délicat.

Nous croyons y être parvenu en nous appuyant sur les deux principes suivants :

1° Quand on porte un conducteur non isolé dans le champ d'un inducteur, il manifeste, en même temps que la charge main-

tenue en regard de l'inducteur, une charge momentanée plus faible à l'extrémité opposée.

2° Les signes des charges qui se développent sur deux corps frottés sont constants avec la nature de ces corps ; mais si le frottement se fait dans le champ d'un inducteur dont l'influence tendrait à les charger en sens contraire, les signes sont renversés.

Ces principes sont des corollaires de deux lois bien connues de l'électrostatique. En effet, la charge de même signe que l'inducteur, qui se produit sur l'extrémité la plus éloignée de l'induit, ne peut être refoulée instantanément dans le sol. Si le conducteur est allongé, et surtout la communication avec le sol peu parfaite, le retard peut devenir aisément appréciable. C'est le cas des conducteurs diamétraux dans les machines à influence.

De même, le système de deux corps frottés peut être assimilé à un conducteur unique, subissant donc l'influence d'après les lois ordinaires ; et par suite, si cette influence est assez énergique, elle pourra déterminer l'échange des électricités de frottement.

L'une et l'autre conclusion a, d'ailleurs, été vérifiée par l'expérience. La première, sur un long conducteur cylindrique muni de plusieurs pendules à balles de sureau, et sur un conducteur diamétral en place sur une machine électrique ; la seconde, en étudiant, au moyen d'un électromètre, le signe d'un bâton de verre et d'un bâton d'ébonite, frottés successivement sur la même pièce de flanelle ou de soie, à proximité d'une charge électrique et en dehors de son influence.

Nous allons faire l'application de ces principes à deux types de machines bien distincts : la machine Voss et la machine Wimshurst. Nous nous proposons de démontrer ailleurs qu'à ces deux types on peut ramener toutes les machines électrostatiques à influence actuellement en usage. Notre explication aura donc toute la généralité annoncée.

Pour plus de simplicité, nous ferons abstraction des secteurs, dont la présence, si elle favorise l'excitation spontanée, ne modifie pas essentiellement les phénomènes.

Commençons par une machine Voss privée de ses peignes

d'électrodes (fig. 1). On n'aura à considérer que les armatures A, A', avec leurs balais *c* et *d*, et le conducteur diamétral avec ses balais *a* et *b*.

Les quatre balais, au début, seront tous de même signe, par exemple négatifs, et, par suite, tous les quatre chargeront le plateau positivement. Les armatures étant isolées, la charge négative de leurs balais se répandra et se maintiendra sur toute leur surface, tandis que celle des balais du conducteur diamétral ira se perdre au sol. Mais une machine n'est jamais d'une symétrie absolue. L'état électrique sera donc toujours plus accusé sur un des balais que sur les autres.

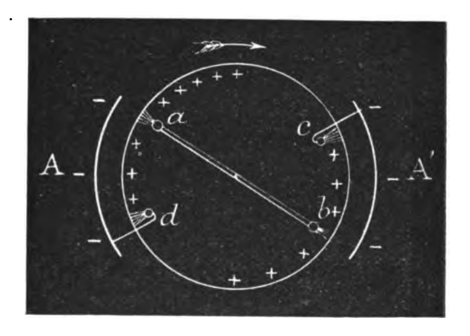


Fig. 1.

Soit *a* le balai qui développe le plus d'électricité. Examinons ce qui se passe lorsque les charges communiquées au plateau par les balais des armatures atteindront le conducteur diamétral. Le balai *a* trouvera le plateau déjà chargé positivement par le balai *d*, mais comme il donne plus que ce dernier, il continuera à fournir de l'électricité positive pour compléter la charge du plateau, d'autant plus qu'il subit déjà l'influence de l'armature négative A. Le balai *b* sera dans le même cas, en supposant qu'il donne plus que le balai *c* de la seconde armature. S'il donnait moins, son action serait fortement affaiblie ou même neutralisée.

Quand ensuite les charges développées sur le plateau par les

balais du conducteur diamétral arriveront aux balais des armatures (ce qui aura lieu après la phase considérée précédemment, parce que la distance angulaire *ac* est en général plus grande que *cb*), la charge qui se présente en *c* étant plus forte, par hypothèse, que celle qui se produit en ce point, elle changera le sens de l'électrisation de l'armature A'. Cette armature devenant ainsi positive, son influence sur le balai *b* aura pour effet de renverser les signes au contact de ce balai et du plateau. Celui-ci deviendra donc négatif (fig. 2).

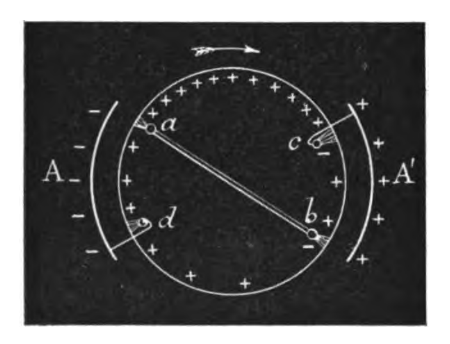


Fig. 2.

Au contraire, la charge positive qui se présente en *d* n'est pas ou n'est guère supérieure à celle de *d*, et comme d'ailleurs la charge négative de l'armature A est maintenue par l'attraction de la charge principale du plateau en *a*, le signe de cette armature ne sera pas changé.

Dès ce moment, le régime normal est établi.

Il est évident que si nous considérons maintenant une machine munie de ses collecteurs, mais privée de conducteur diamétral, le mécanisme de l'auto-excitation sera identiquement le même, le circuit des électrodes remplaçant alors celui du conducteur diamétral. Enfin, prenons une machine complète : à excitateur fermé, nous restons dans le même cas, le conducteur diamétral ne travaillant pas; à excitateur ouvert, nous retombons sur le premier.

Passons à la machine Wimshurst.

Supposons encore que les quatre balais s'électrisent simultanément et deviennent tous négatifs. Encore une fois, la symétrie étant imparfaite, une des charges l'emportera sur les autres. Soit *a* le balai prépondérant.

Dans la première phase, les plateaux prendront, au contact des quatre balais, des charges positives; mais la plus forte de ces charges sera dans la région *a*B′ (fig. 3). Supposons les balais à 60° l'un de l'autre. Après une rotation de 60°, les charges positives de chaque plateau arrivent vis-à-vis des balais de l'autre plateau et leur font subir leur influence. C'est le commencement de la deuxième phase.

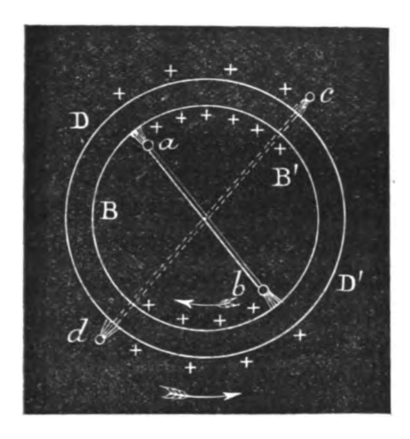


Fig. 3.

Or, la charge positive qui se trouve en B′ étant plus forte que celle qui se dépose en *c*, son influence intervertira les signes des électricités de frottement en ce point (fig. 4). D'autre part, le conducteur *cd* subissant maintenant en *c* une influence qui provoque un flux négatif, donnera aussi à son extrémité *d* un flux positif, bien que moins abondant, d'après notre premier principe. Ce dernier flux renforcera la charge positive prise par le plateau DD′ au contact du balai *d*, et contrebalancera l'effet de

l'induction de la charge positive initiale de BB' qui passe devant ce balai.

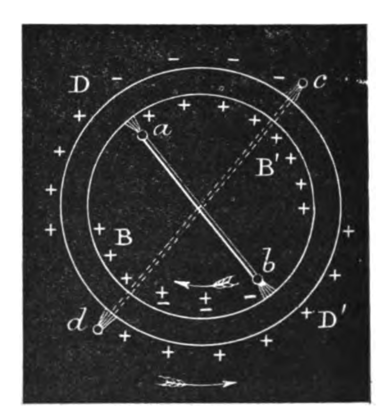


Fig. 4.

Enfin, sur le conducteur *ab*, l'influence des charges positives du plateau DD' pendant cette seconde phase aura pour effet de diminuer la production d'électricité positive en *a* et en *b*, mais sans neutraliser la première, puisque nous avons supposé la charge de *a* plus forte que toutes les autres. Quant à la seconde, elle sera peut-être neutralisée dès cette seconde phase. Sinon elle le sera dans la suivante, c'est-à-dire après une nouvelle rotation de 60°.

En effet, dans cette troisième phase, la charge négative du plateau DD', partie de *c*, arrive devant *a* et lui fait subir son influence. Celle-ci augmente le flux positif de *a* et provoque un flux négatif en *b*, et cela d'autant plus aisément qu'à ce même moment la charge positive de *d*, renforcée, comme nous l'avons vu, dans la seconde phase, arrive devant *b* et y provoque également un flux négatif. Les signes seront donc renversés au contact de ce balai.

A partir de ce moment, la distribution, comme on le voit, est celle de la marche normale, du moins pour les signes; et la suite du fonctionnement amène rapidement aussi, par l'échange

des charges et les actions mutuelles, l'équilibre des quantités d'électricité développées.

Il n'y a rien à ajouter pour tenir compte de l'action des peignes des collecteurs, dont nous n'avons pas encore parlé. Dans notre explication, en effet, la distribution normale est établie au moment où les premières charges des plateaux parviennent devant les peignes. Ceux-ci n'ont donc aucune influence sur l'établissement de cette distribution, et l'expérience démontre qu'en réalité leur présence ou leur absence, l'écartement ou le contact des électrodes, sont sans effet sur l'excitation spontanée.

Si l'on suppose qu'un des balais électrise le plateau qu'il touche, avant qu'aucune charge se soit manifestée sur les autres, la théorie devient beaucoup plus simple encore.

Reprenons la machine Voss, et soit *a* le balai où l'électrisation se manifeste d'abord (fig. 5). La charge qui s'y produit aura pour premier effet d'influencer l'armature A et de la rendre négative, ce qui, réciproquement, renforcera le débit positif de *a* et produira un commencement de flux négatif sur *b*. Transportée ensuite en *c*, elle passera sur l'armature A', où elle influencera le balai *b*, dans le même sens que l'armature A. Dès lors tout est régulier.

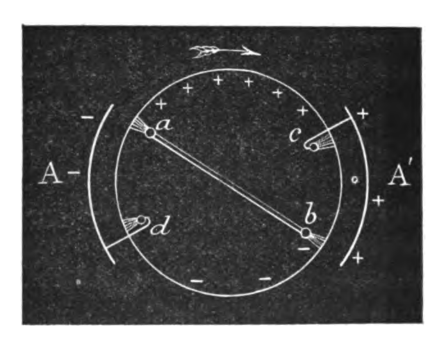


Fig. 5.

De même, dans la machine Wimshurst, soit encore *a* le seul balai actif (fig. 6). Le plateau BB' deviendra positif au contact de ce balai et influencera le balai *c*. Celui-ci donnera donc de

l'électricité négative, qui se répandra sur le plateau DD′, sera transportée vis-à-vis du balai *a* et l'influencera de manière à renforcer son débit primitif. En même temps, *d* donnera au plateau DD′ une charge négative plus faible, laquelle, transportée devant *b*, y excitera un flux négatif, facilité par l'induction exercée sur *a*.

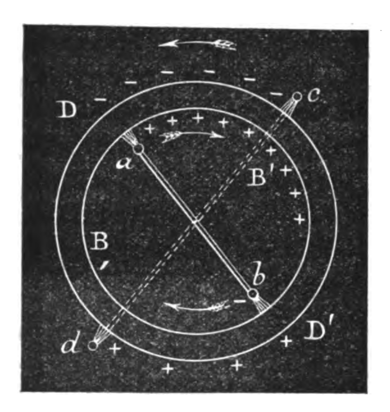


Fig. 6.

Enfin, on voit sans peine que l'amorçage au moyen d'une charge étrangère présentée devant un balai de conducteur diamétral, dans les deux types de machines, n'est que l'application immédiate de notre premier principe. Le conducteur influencé donnera deux flux de signes contraires, et à partir de ce moment, l'explication du jeu de la machine est évidente. Un des deux flux sera faible, mais néanmoins suffisant, grâce à la rapidité de la rotation, qui emporte la charge produite avant qu'elle ait pu se perdre tout entière par la communication du conducteur avec le sol.

Nous ferons remarquer que même ce cas si simple de l'amorçage par influence ne s'explique que très laborieusement dans les théories publiées jusqu'à présent, du moins sur la machine Wimshurst. La cause de cette difficulté est toujours la même. Si l'on admet qu'un conducteur ainsi influencé n'électrise le plateau que par une seule de ses extrémités, la charge qui doit se produire à l'autre extrémité ne peut évidemment y être trans-

portée que par le plateau lui-même. Or, le plateau, avant d'arriver en ce point, a dû nécessairement passer sous les peignes des collecteurs, et il s'y est déchargé. L'électrisation de la seconde moitié du plateau devient donc impossible. »

M. Van der Mensbrugghe, qui s'était proposé de démontrer, avec quelque détail, que la démonstration classique relative à l'angle des bords, en capillarité, est loin d'être satisfaisante, déclare qu'il n'a pas eu le temps de rédiger une note suffisamment explicite sur ce sujet.

Il montre toutefois que cette démonstration est absolument insuffisante pour les motifs suivants :

1° Elle ne tient aucun compte de la présence de la couche d'air, de vapeurs ou de poussières impalpables qui recouvre toujours la surface des corps solides; pour le verre notamment, on sait combien il est difficile de se débarrasser de cette couche de matières étrangères; or on comprend que, si ces dernières ne sont pas enlevées d'une manière complète, on ne peut pas supposer, en théorie, une molécule liquide soumise non seulement aux attractions du liquide en présence, mais encore aux attractions exclusives du verre;

2° On admet, dans la démonstration dont il s'agit, que la densité du corps solide est la même dans la couche superficielle et à l'intérieur de la masse; or, la théorie de l'élasticité montre nettement que la couche superficielle se compose, au contraire, de tranches dont la densité va en diminuant, à partir d'une profondeur égale au rayon d'activité de l'attraction, jusqu'à la tranche extrême en contact avec le milieu ambiant;

3° Enfin, dans la même démonstration, reproduite dans un grand nombre de traités, rien n'indique où se trouvent les particules solides et où sont les particules liquides; en un mot, on n'introduit aucune condition pour que les molécules solides ne se déplacent absolument pas. Il ne suffit pas, en effet, de supposer qu'une molécule est solide, tandis qu'une autre est liquide, si l'on n'introduit pas la force nécessaire pour assurer l'immobilité de la molécule regardée comme solide.

M. Van der Mensbrugghe espère pouvoir traiter plus amplement la question actuelle quand il exposera, devant la section, la suite de son résumé d'une nouvelle théorie capillaire.

M. le Secrétaire lit une note présentée par M. Thiry, sur une sonnerie électrique.

Le R. P. Lucas indique un procédé très simple pour empêcher l'adhérence des parties du trembleur des bobines entre lesquelles jaillit l'étincelle d'extra-courant : il suffit de donner à la pointe de contact un léger mouvement alternatif qu'entretient un petit moteur électrique.

Troisième section.

—

Après avoir voté l'insertion aux *Annales* de trois mémoires de M. F. Meunier : *Sur les chasses diptérologiques aux environs de Bruxelles*, *Sur les prétendues empreintes d'arachnides du corallien de la Bavière* et *Sur un nouveau système de classification des insectes « muscides » de M. Girschner*, la troisième section entend la communication ci-jointe du R. P. Schmitz, S.-J., directeur du Musée géologique des bassins houillers belges, sur *La signification géogénique des* STIGMARIA *au mur des couches de houille.*

« Plusieurs fois nous avons entretenu la troisième section des écoles qui cherchent à expliquer la géogénie des dépôts houillers. C'est ce qui nous engage à signaler un récent mémoire du professeur H. Potonié, de Berlin (*). Disons même, sans tarder, qu'il est à regretter que les publications de ce sagace observateur n'aient pas trouvé plus de lecteurs chez nous.

(*) H. POTONIÉ, *Ueber Autochthonie von Carbonkohlen-Flötzen und des Senftenberger Braunkohlen-Flötzes.* (Extrait du JAHRBUCH DER KÖNIGL. PREUSS. GEOLOG. LANDESANSTALT, 31 p., 6 fig. et 2 pl., 1896.)

Le mot *autochtonie* appartient à la terminologie géologique allemande et est opposé à *allochtonie.* Nous saisissons facilement le sens du premier qui rappelle l'adjectif « autochtone », usité en ethnologie. L'autochtonie répond à la formation sur place, et l'allochtonie répond à la formation par transport. Ce sont des termes heureusement créés ; ils disent par eux-mêmes presque tout ce que contiennent nos définitions.

M. Potonié est un converti à l'autochtonie. Sa thèse est celle-ci : Les couches d'*humus fossile* (les murs des couches) doivent, en *règle générale*, leur existence à la formation sur place, formation qui est d'ailleurs en parfaite harmonie avec les *causes actuelles* produisant les tourbières et les *swamps* (p. 15).

Le grand argument du savant professeur est tiré des *Stigmaria*, qu'il appelle des *appendices* (p. 3). Peu importe en effet que la morphologie en fasse plutôt des branches munies de feuilles, si leurs fonctions étaient évidemment celles d'organes radiculaires souterrains. Ces *Stigmaria* se trouvent là où elles ont crû et furent surprises par la fossilisation dans l'acte même de la vie.

On comprend aisément que cette partie de la thèse, celle qui s'appuie sur les conditions de gisement des *Stigmaria*, a toutes nos sympathies. Nous écrivions en 1894 : « Les *Stigmaria*, caractéristiques et uniquement caractéristiques du mur des veines, y sont manifestement *in situ*, c'est-à-dire qu'elles serpentent naturellement à travers la *boue pétrifiée*, portant toujours leurs radicelles divergeant en tous sens autour du rhizome (*). » Manière de voir que nous avons eu l'occasion d'accentuer souvent.

Les études du professeur de Berlin ne sont pas, comme les nôtres, appuyées sur des recherches limitées à un bassin, mais sur des recherches étendues aux bassins de Silésie et à ceux de la Wurm (Aix-la-Chapelle) et de la Saar.

Pour l'observation des faits, nous sommes parfaitement d'accord avec M. Potonié : le *mur* des veines contient presque exclu-

(*) G. Schmitz, S. J., *A propos des cailloux roulés du houiller.* (Bull. de la Soc. géol. de Belgique, t. XXI, p. LXXV.)

sivement les *Stigmaria*, racines « qui semblent encore en quête du suc nourricier (*) »; le *toit* contient plutôt des tiges, des frondes et des feuilles : organes aériens et supérieurs de végétaux.

Mais ici s'arrête notre entente; elle ne s'étend pas jusqu'aux conclusions. Il ne nous semble pas démontré que la totalité ou la presque totalité des plantes formant aujourd'hui une veine de houille, aient leurs racines au mur et leurs cimes au toit de cette veine.

A notre avis, le mur est simplement *le témoin d'une période d'autochtonie* qui a contribué, pour sa part, à la formation du lit charbonneux, mais qui rarement l'a constitué dans sa totalité. Cette manière de voir ressortira mieux dans la suite.

Notre déduction nous semble logique et peu exposée à pécher par cet excès même de généralisation que M. Potonié reproche à ses adversaires. Il nous est difficile d'admettre que les rhizomes du *mur*, les *Stigmaria*, soient les appendices radiculaires de la grande partie, et surtout de la totalité des végétaux de la veine. Voici nos principales objections :

D'abord le mur — l'humus fossile — où domine presque exclusivement la *Stigmaria*, et encore la *Stigmaria ficoïdes* Sternbg. sp., devrait contenir les racines des plantes variées que comptent les gisements houillers. Or il est encore à démontrer, et nous faisons d'actives recherches dans ce sens, que le mur contient aussi, et en proportion convenable, les racines d'autres végétaux (**). Et après cette démonstration-là il restera encore à expliquer pourquoi les *Stigmaria*, ces organes souterrains des Lépidophytes, se trouvent partout et toujours sous les lits charbonneux, et dominent même là — ce qui n'est pas rare — où le charbon lui-même et le toit ne décèlent pas la présence, en quan-

(*) G. Schmitz, S. J., *Bull. de la Soc. scientifique de Bruxelles*, t. XVIII, p. 110.

(**) La *Pinnularia*, qu'on considère généralement comme la racine des Filicinées, nous l'avons rencontrée presque exclusivement dans les schistes du toit. C'est même par crainte d'exagération que nous mettons une restriction à notre dire, vu que nous ne possédons pas au Musée d'échantillon qui nous contredise.

tité voulue, d'organes supérieurs de végétaux de cette famille, mais plutôt des Équisétinées ou des fougères.

En second lieu, d'après M. Potonié, les sédiments du *mur* représentent un banc d'argiles imperméables (Schieferthon, pp. 12 et 13). Est-ce bien démontré? Les observations si nombreuses que nous avons faites ne nous permettent pas de l'admettre pour la Belgique. Le *mur* des veines est aussi bien du grès que du schiste. Nous y voyons un sédiment comme tout autre sédiment de l'horizon houiller, mais *dans lequel une végétation est venue s'établir subséquemment.* La croissance et les diverses opérations qu'elle a produites ont donné à ce sédiment un facies tout caractéristique, plus ou moins *boueux*, qui est le résultat et non la cause du développement des végétaux et partant aussi la raison de l'imperméabilité relative de la roche.

Enfin, le savant professeur met fort bien en lumière la signification de la situation normale du mur sous les couches de houille. Mais pourquoi n'explique-t-il pas, selon sa théorie, les *murs* sans veines ou ceux qui reposent sur une veine et lui servent de *toit*? Il en avait cependant des exemples dans son mémoire même. Tâchons de les interpréter. L'occasion nous en est fournie par l'intéressant forage de 726 mètres (pp. 8 à 12) fait au charbonnage d'Oheim, au sud-ouest de Kattowitz (Silésie). La veine n° 2 a un *mur* au *toit* (*), c'est-à-dire un humus fossile au-dessus des végétaux, *sans qu'il y ait un passage charbonneux signalé,* comme nous le voyons au-dessus de la veine n° 29. Si nous ne connaissions que ce seul fait, nous pourrions croire que l'appareil de forage a rencontré un point exceptionnel, mais les bassins belges et la littérature géologique nous ont fait connaître des murs étendus qui ne portent pas de veine. Comment expliquer ce phénomène? M. Potonié ne devra-t-il pas admettre que ses tourbières ont été soumises parfois à des actions érosives fort importantes?

(*) Le dernier banc du forage, vers la cote 725, semble présenter un cas analogue, sinon identique.

D'autre part, les veines n°s 22, 23, 31 et 42 (le cas de la veine n° 28 semble plus explicable) n'ont pas de mur. Et, chose étrange, *cela arrive tout juste à deux veines* (n°s 22 et 23) *caractérisées* (*) *par l'abondance des Lépidophytes, ces végétaux mêmes auxquels les* Stigmaria *servent de racines* (**). Ces veines seraient-elles dues à la formation par transport? Mais alors, c'était le moment, pour l'auteur, de nous montrer la différence qu'il y a entre la houille de ces veines et celle des veines manifestement autochtones. Loin de s'y arrêter, M. Potonié ne signale même pas cette frappante exception à la règle générale.

Nous qui ne voyons dans les *murs* que l'indice d'une période de formation sur place et qui ne leur reconnaissons pas un *lien nécessaire* avec la houille qu'ils portent, nous ne sommes nullement gêné par ces faits : ils nous paraissent même inévitables. Le *mur* ne porte-t-il pas de charbon? C'est que les végétaux produits ont été lavés par les eaux. Porte-t-il une veinette, souvent de charbon peu pur? Ce pourrait être une formation proprement autochtone. Et dans le cas ordinaire du *mur* d'une veine de puissance normale, on pourra recourir à l'autochtonie pour la partie inférieure du lit charbonneux et expliquer le reste par allochtonie. Enfin, les lits de houille sans mur sont dus à un transport.

Les observations de M. Potonié nous encouragent dans la voie que nous suivons, puisque nous nous rencontrons avec lui sur la constatation de faits auxquels nous attachons une grande portée, c'est-à-dire l'*autochtonie des murs géologiques*, que nous appellerions volontiers avec lui de l'*humus fossile*.

A propos de la situation *in loco natali* des *Stigmaria*, citons un fait figuré par l'auteur (p. 5). Il s'agit d'un rhizome recueilli dans le forage d'Ohcim. Légèrement aplati lui-même, il porte, rayonnant tout autour de son axe, des feuilles encore cylin-

(*) Il en est bien ainsi, puisque M. Potonié les appelle *Sigillaria-Flötz* et spécifie qu'on y trouve aussi des *Lepidodendron*.

(**) Voyez notre première objection, p. 34.

driques. C'est, selon l'auteur, la forme de l'organe vivant. La rareté du fait mérite une mention spéciale.

Ce compte rendu ne peut rapporter tous les faits du mémoire qu'il analyse. Qu'on nous permette cependant de nous arrêter encore à deux points.

M. Potonié conclut à l'autochtonie de la presque totalité des veines des houilles par l'autochtonie évidente des murs, de l'humus fossile. C'est, nous semble-t-il, une généralisation fort semblable à celle que l'auteur reproche à M. L. Cremer (p. 15). M. Cremer considère le morcellement des végétaux qui se trouvent épars dans les stampes stériles — évidemment sédimentaires — de l'horizon houiller et, constatant au moins le même morcellement des végétaux qui constituent les veines mêmes, il y voit un argument en faveur de l'allochtonie de ces veines.

Nous admettons cette dernière conclusion et nous ne souscrivons pas en entier à la première, non pas à cause d'un vice de logique, mais parce que, comme nous l'avons dit plus haut, les faits nous empêchent, dans l'état actuel de nos connaissances, de laisser exister un *lien nécessaire* entre le mode de formation des murs et celui des lits de charbon.

Quant aux arguments que M. Potonié tire de la présence des *troncs-debout*, ils n'ont pas non plus l'avantage de nous convertir.

Le gisement dont l'auteur donne une savante description et de magnifiques planches (pl. III et IV) appartient au tertiaire miocène. Personne ne niera l'analogie frappante qui existe entre cette formation et celles des tourbières d'aujourd'hui. Mais nous ne voyons nullement qu'on soit contraint à inférer de là l'identité avec la formation houillère. Ne citons qu'un argument pour nous borner. M. Potonié fait remarquer (p. 19) que les *troncs-debout* de Senftenberg (Silésie) sont enracinés indistinctement dans le toit ou le mur, ou dans l'épaisseur même de la couche végétale. En est-il ainsi des *troncs-debout* du houiller? De nouveau, nous ne pouvons l'admettre pour la Belgique. Jamais nous n'avons vu de *troncs-debout* dans la veine même. Toujours, au contraire, nous avons constaté que ceux du *toit* étaient nettement

arasés (*) et que seuls ceux du *mur* présentaient, fortement accusée, la présence de puissantes racines (**).

Que les racines de plusieurs végétaux houillers soient puissantes et non pas réduites à de minces filaments, de récentes trouvailles nous en ont persuadé. Il suffirait de s'en rapporter à un autre mémoire (***) de M. Potonié, où il décrit un superbe *tronc-debout*, déposé un musée du *Königliche geologische Landesanstalt* de Berlin, dont les fortes racines atteignent une expansion qui mesure 4^{m}50 de diamètre, avant d'atteindre la troisième dichotomie.

Concluons avec M. Potonié qu'il n'est pas inutile d'étudier avec un soin scrupuleux les moindres détails de chaque phénomène, quand il s'agit d'une question aussi complexe que celle de la géogénie de la houille. Excités par le conseil et l'exemple de savants aussi marquants, ne nous lassons pas de scruter ce problème et d'enrichir sans cesse la science de faits bien discutés. C'est le seul moyen d'arriver à un résultat sérieux.

Le R. P. H. Bolsius, S.-J., professeur à Oudenbosch (Holl.), fait ensuite une communication : *Sur l'œuf de l'*Ascaris megalocephala *à divers niveaux de son trajet par l'oviducte.*

Il montre d'abord la représentation en grandeur naturelle d'un oviducte depuis l'orifice externe jusqu'à 1 décimètre audessus de la portion large. L'ovaire, qui fait suite, a une longueur démesurée (x).

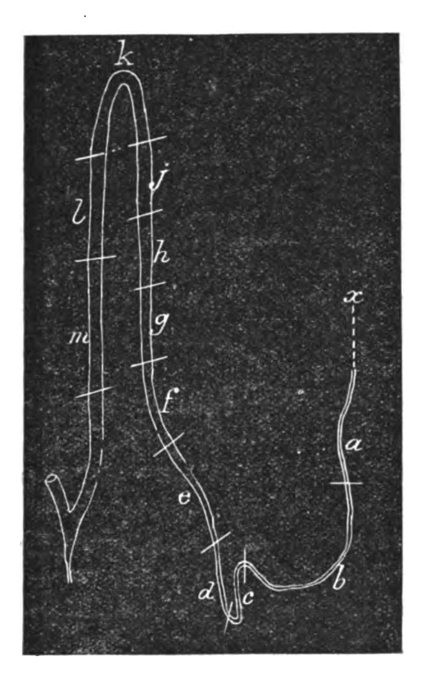
Puis il présente une série de douze porte-objets, contenant chacun des coupes microtomiques à différents niveaux. Ces niveaux sont indiqués sur la figure.

(*) G. SCHMITZ, S. J., *Un banc à troncs-debout aux charbonnages du Grand-Bac* (Sclessin, Liége). (BULL. DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 3e série, t. XXXI, p. 263.)

(**) IDEM, *Une souche d'arbre au mur d'une couche.* (BULL. DE LA SOC. SCIENT. DE BRUXELLES, t. XIX, p. 22.)

(***) H. POTONIÉ, *Der im Lichthof der Königl. geologischen Landesanstalt und Bergakademie aufgestellte Baumstumpf mit Wurzeln aus dem Carbon des Piesberges* (JAHRBUCH DER KÖNIGL. PREUSS. GEOLOGISCHEN LANDESANSTALT, pp. 246-257 et 4 pl., 1889).

En examinant ces coupes, — ce que le microscope apporté permet de faire aux membres de la section, — on peut facilement se rendre compte des diverses phases parcourues par l'œuf avant la ponte.



Au sommet de la partie rétrécie, en *a*, on rencontre des cellules-œufs ayant déjà atteint la grandeur ordinaire. Elles possèdent toutes un noyau entouré d'une membrane complète et contenant les huit tronçons du boyau nucléinien. A ce niveau, on ne trouve pas de spermatozoïdes.

Au niveau *b*, les bâtonnets nucléiniens, généralement réunis en deux groupes, n'ont pas encore quitté l'intérieur de la membrane nucléaire. Les spermatozoïdes abondent ici, et les œufs y sont comme noyés; mais pas un spermatozoïde n'a pénétré dans une cellule-œuf. La membrane externe de l'œuf est mince.

Un peu plus loin, en *c*, on observe quelques œufs qui ont

perdu la membrane du noyau. Un spermatozoïde y pénètre, phénomène qui ne se remarque pas dans les œufs qui gardent encore cette membrane nucléaire.

En *d*, les bâtonnets du noyau femelle sont rangés en figure cinétique, et le spermatozoïde est visible dans chaque œuf.

Plus loin, en *e*, on aperçoit des figures où les huit bâtonnets sont arrangés en deux îlots, sur les fils du fuseau ouvert. Le spermatozoïde est placé excentriquement, et garde encore sa queue. La membrane de l'œuf est déjà plus forte.

Arrivé en *f*, le spermatozoïde occupe régulièrement le centre de l'œuf. Il ne présente plus de queue. La membrane de l'œuf renforcée enveloppe des cellules désormais plus arrondies.

Au niveau *g*, cette membrane est devenue encore plus épaisse. La cinèse est sur le point d'effectuer l'expulsion du premier globule polaire.

Au point marqué *h*, l'expulsion se fait dans la majorité des œufs et la membrane s'est encore épaissie.

En *j*, l'expulsion s'est accomplie. Le noyau mâle semble encore en repos au centre de la cellule.

Au point *k*, les deux noyaux, mâle et femelle, présentent des mouvements cinétiques.

En *l*, l'expulsion du second globule polaire est déjà effectuée presque partout. Nos coupes n'ont donc pas atteint les régions où se prépare cette expulsion ; il faut les chercher entre *k* et *l*. Déjà, en *l*, on voit le noyau femelle reformé à côté du noyau mâle.

Au niveau *m*, les deux globules polaires se distinguent encore, le premier généralement aplati et appliqué contre la face interne de la membrane cellulaire, le second parfois adhérent encore au corps protoplasmique de l'œuf.

La membrane de l'œuf s'est encore considérablement épaissie et possède extérieurement une couche rugueuse qui a assez d'affinité pour le colorant carminique.

On constate, par la présence des deux noyaux indépendants, mâle et femelle, que même au niveau *m*, qui est déjà très rapproché de l'orifice femelle, la fécondation proprement dite, c'est-à-

dire la fusion complète des deux éléments sexuels, n'est pas faite.

Tout ce qui vient d'être dit n'est certes pas bien nouveau; tous ces points ont été étudiés en détail. « Mais il m'a semblé de quelque intérêt de présenter toute la succession des phénomènes sur des préparations d'un objet unique : peut-être les idées seront-elles par là rendues plus précises. »

L'auteur ajoute quelques détails sur la confection de ces coupes microtomiques.

Toute la pièce, fixée depuis des années et conservée à l'alcool, a été en bloc imprégnée de carmin aluné, pendant vingt-quatre heures.

Après le lavage habituel, la pièce a passé par des bains d'alcool de plus en plus fort; puis par un mélange d'alcool et d'éther. Ensuite elle a été mise dans le collodion dilué, après avoir reçu à divers niveaux des incisions entaillant les tissus sans séparer les tronçons, de façon à pouvoir déterminer encore les régions de l'oviducte. Enfin elle a été passée au collodion fort (solution de 6 °/₀).

Deux ou trois jours plus tard seulement, des tronçons ont été retirés du collodion, durcis au chloroforme pendant un quart d'heure, puis plongés dans le mélange de chloroforme et de paraffine, chauffé le moins possible, pendant une demi-heure. Enfin est venu le bain de paraffine fondant, à 45° C. environ, où ils ont passé une demi-heure encore.

Cet enrobage double a permis de prendre des coupes de 20 à 30 μ, pratiquées à sec, ce qui est un grand avantage.

Les manipulations indiquées ici ne sont pas des plus rapides; mais elles ont l'avantage de ne pas exiger une surveillance continuelle.

Un point plus important est de retrouver dans les préparations les endroits démonstratifs.

A cette fin, le microscope que présente l'auteur est muni d'un chariot, arrangé d'une façon nouvelle.

Sans entrer dans des détails, qu'il suffise de dire que ce nouveau système permet : 1° de parcourir toute l'étendue d'un

porte-objet, et 2° d'indiquer exactement telle ou telle plage de la préparation, de façon que chacun puisse la retrouver à l'aide d'un autre chariot construit sur le même modèle.

Au cours de la séance, M. J. Ballion présente divers objets d'histoire naturelle provenant de l'*Indian territory* (Mexique) : échantillon de pyrite, spécimens de papillons, d'insectes, etc. Il parle aussi de l'usage efficace qu'il a fait du formol pour la dissection d'un bison, dont l'état putride était assez avancé.

La section exprime le vœu qu'un jour de session soit consacré à la visite du Musée géologique des bassins houillers belges, en voie d'organisation à Louvain, dès que l'installation des collections sera terminée.

Quatrième section.

M. Matagne présente un malade âgé de 30 ans, d'une vie régulière et dont les antécédents de famille sont entachés de nervosisme. Ce malade a été atteint d'hémoptysie abondante, en décembre 1894. Il part au Congo en mars 1895, séjourne un an dans ce pays et y est atteint d'hématurie, de fièvre intermittente et de dysenterie grave. Il revient en Belgique et en février 1896 il présente de l'aphonie, de la dyspnée et d'abondantes hémoptysies. La fièvre intermittente le ressaisit et, depuis octobre jusqu'en janvier 1897, il a deux accès fébriles par semaine pendant lesquels la température s'élève jusqu'à 40°,5.

Le 17 décembre 1896, il est atteint pour la dernière fois d'une hémoptysie aussi abondante que les autres. Le 16 de ce même mois, il est pris d'un besoin irrésistible de dormir. Le 17, un nouvel accès de narcolepsie survient, après lequel se manifeste une hémiplégie du côté droit. Le lendemain matin, guérison complète. Depuis lors, de nouveaux et fréquents accès de narcolepsie se déclarent et sont suivis de symptômes paralytiques et spasmodiques très divers et passagers, d'hémorragies nasales. Pendant le sommeil, le malade remue les doigts et la bouche. Le

12 janvier, au sortir d'une crise de sommeil, il est frappé de paraplégie et de troubles vésicaux.

Voilà pour les désordres somatiques.

Quant aux troubles psychiques, ils se caractérisent par des mensonges combinés avec une suite et une habileté telles, qu'ils passent pendant longtemps pour des vérités que l'on ne songe pas même à mettre en doute et qui mettent leur auteur dans des situations des plus compliquées. Malheureusement, l'escroquerie n'y est pas étrangère, et notre confrère a appris à ses dépens qu'il était la dupe de son malade. On sait que les hystériques mentent parfois avec une facilité et une habileté incroyables. Le malade de M. Matagne nous le prouve à l'évidence.

M. le D[r] De Buck, de Gand, présente en son nom et au nom de M. De Moor, les notes suivantes *sur un cas de diabète insipide.*

« Le diabète insipide n'est pas une affection des plus rares, mais il est encore relativement peu connu dans son essence; en d'autres termes, la pathogénie de cette maladie n'est pas encore établie. Il y a donc intérêt à relater chaque cas observé en clinique, parce que de la comparaison symptomatologique, portant sur de nombreux cas, peuvent se dégager des éléments capables d'éclaircir certains côtés du problème ou de nous mettre en mains certaines hypothèses, dont l'expérimentateur et l'anatomo-pathologiste pourraient tirer profit. En effet, la double base expérimentale et anatomo-pathologique sur laquelle doit reposer toute pathogénie solide, est à peine ébauchée pour ce qui regarde le diabète insipide. En fait d'expériences pouvant servir à élucider le mécanisme de production de cette affection, nous n'avons guère que celles de Claude Bernard, Eckhard et Kahler, démontrant que la lésion mécanique de certaines régions comprenant la moelle allongée, le pont et le cervelet, peut déterminer la polyurie non glycosurique. L'anatomo-pathologie, de son côté, a démontré qu'il existe des polyuries symptomatiques de lésions histologiques de ces mêmes régions nerveuses. Récem-

ment, Marinesco (*) a pu observer deux cas de diabète insipide familial. Il s'agissait de deux frères, l'un de 17 et l'autre de 15 ans, dont le cadet succomba aux suites d'une méningite tuberculeuse, ce qui permit à Marinesco de faire l'examen anatomo-pathologique du bulbe. Il constata des altérations congestives et inflammatoires du côté de la neuroglie avoisinant le quatrième ventricule, les noyaux pneumogastriques, et la prolifération de l'épithélium qui tapisse le ventricule. Marinesco est porté à voir une relation pathogénique entre ces lésions et la polyurie. Mais si ces phénomènes expérimentaux et anatomo-pathologiques peuvent nous donner la clef du mécanisme de la polyurie, ils sont loin de fournir l'explication de l'ensemble symptomatologique du diabète insipide. « Il est impossible de nier, dit Krehl (**), que le problème renferme encore quantité d'inconnues. Il existe certainement des relations entre le diabète sucré et le diabète insipide. Les faits formulés n'expliquent nullement, par exemple, la polyphagie qui existe chez beaucoup de patients atteints de diabète insipide. »

Il faudra donc reprendre les recherches cliniques, expérimentales et anatomo-pathologiques sur cette maladie. Nous espérons que l'observation du cas qui suit nous permettra d'apporter un jour quelques pierres à l'édifice clinique.

Mlle De B., Camille, de Ledeberg, est âgée de 12 1/2 ans.

Antécédents héréditaires. — Le grand-père paternel avait de fréquents accès de gastralgie. Le père, cocher de tram, est un migraineux. Il a fait deux pleurésies aiguës, dont il s'est bien rétabli; il nie excès alcooliques et syphilis. La mère est morte en couches; on ne lui a connu aucune tare. Trois autres enfants sont bien portants. Tous ont présenté facilement des convulsions durant leur jeune âge.

Antécédents personnels. — Jusqu'en ces derniers temps, l'enfant fut bien portante, mais mangeait beaucoup et avait de temps en temps un embarras gastrique avec céphalalgie. Elle buvait également beaucoup. On a remarqué qu'elle allait fréquemment au cabinet. Dans ses premières années, elle a présenté des convulsions, a souffert fréquemment d'odontalgies, elle a plusieurs molaires cariées.

(*) Société de biologie, séance du 19 janvier 1895.

(**) *Grundriss der allgem. klin. Pathologie.* Leipzig, 1893.

Il y a quatre mois et demi, la petite patiente a subi une émotion violente en voyant un vélocipédiste renverser son frère cadet. Il y a huit semaines, elle eut une angine aiguë avec fièvre et céphalalgie, qui durèrent huit jours. La soif fut intense et l'appétit supprimé. Ce dernier revint peu à peu. La soif persista. L'enfant boit actuellement 43 pintes d'eau en vingt-quatre heures. Elle urine également beaucoup. La nuit, elle se réveille tous les trois quarts d'heure pour boire et uriner. Avant sa dernière maladie, elle ne se levait qu'une à deux fois la nuit. C'est aussi depuis cette dernière maladie que l'amaigrissement s'est prononcé. Elle pèse actuellement 29 kilogrammes; elle paraît relativement petite pour son âge.

Les *urines* sont incolores, acides, D = 1005. Albumine et sucre : 0. L'urée oscille entre 1.75 et 1.26 °/oo. Quant à la quantité d'urine, elle était au 13 janvier de 17 $^1/_2$ litres. L'antipyrine n'eut aucun effet sur la polyurie; l'opium (8 centigrammes d'extrait par jour) l'abaissa à 15 litres dès le second jour de son administration, à 14 au huitième jour; elle prend encore actuellement ce médicament et la quantité d'urine se maintient à 14 litres, quoique la quantité d'eau absorbée se maintienne entre 41 et 43 pintes. La soif n'est donc pas influencée.

L'enfant mange abondamment; elle a été soumise par son premier médecin à un régime antidiabétique, que nous avons supprimé. Les médicaments n'influencent pas sa polyphagie. Il n'existe ni inflammation ni ulcération de la muqueuse buccale.

Système nerveux. — Elle se plaint quelquefois de vertiges et de céphalalgie. L'intelligence est bien conservée. Le caractère a acquis un grand degré d'irritabilité; les pleurs viennent facilement; il n'y a pas de phobies. Dans le domaine de la motilité, il existe de l'affaiblissement musculaire. L'épreuve dynamométrique donne à droite 25, à gauche 20. Quand on fait exécuter des efforts répétés, la courbe dynamométrique baisse rapidement. Dans le domaine de la sensibilité, nous ne trouvons guère que de l'anesthésie pharyngée et du prurit cutané. D'ailleurs, la peau est sèche, écailleuse La vue est bonne, la pupille réagit normalement; il n'existe pas de rétrécissement du champ visuel.

Calorification. — Température subnormale, sensation de froid, chair de poule.

Système respiratoire. — Normal.

Système circulatoire. — Pouls, 24 au quart, faible, dépressible.

État général. — Nous avons déjà insisté sur le degré prononcé d'amaigrissement. Il existe de la pâleur accompagnée de coloration rosée des pommettes. Les cheveux tombent abondamment.

Sang. — L'examen morphologique du sang frais et fixé par l'acide osmique et par l'alcool absolu démontre la bonne conservation des globules rouges; il n'y a pas d'augmentation des globules blancs.

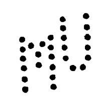
Nous croyons que le diagnostic de cette affection n'est nullement douteux : il s'agit d'un cas classique de diabète insipide,



caractérisé par les trois grands facteurs : polydipsie, polyurie et polyphagie, non temporaires, mais durables. Tous les autres symptômes, ou bien peuvent être regardés comme secondaires de ces trois facteurs principaux, ou bien appellent notre attention du côté du système nerveux. Et comme les trois éléments symptomatiques principaux, polyurie, polydipsie et polyphagie, peuvent se retrouver isolément ou simultanément dans d'autres affections du système nerveux, et notamment dans l'hystérie, il y a lieu de porter toute notre attention sur ce dernier système. D'ailleurs, l'étiologie, soit héréditaire, soit acquise, du diabète insipide est exclusivement d'ordre nerveux. Dans le cas actuel, nous retrouvons une hérédité neuro-arthritique du côté paternel, un traumatisme psychique et une affection de nature infectieuse. Or, nous connaissons l'affinité des toxines microbiennes pour le système nerveux ; c'est à ce titre que la syphilis entre pour une large part comme facteur étiologique dans la genèse du diabète insipide.

Tout ce que nous savons donc jusqu'ici de l'étiologie et de l'anatomo-pathologie de cette affection et ce que nous a appris la pathologie expérimentale nous force à regarder le diabète insipide comme une affection du système nerveux. Mais, comme le dit encore Krehl (*) : « Nous ne savons pas quels éléments nerveux sont spécialement touchés dans ce cas. Le même doute existe par rapport au point de savoir comment ces lésions produisent la polyurie. Prenant en considération, continue l'auteur, tout ce que nous savons à ce sujet, nous sommes autorisés à faire intervenir des influences vaso-motrices ; la paralysie des nerfs rénaux provoque la polyurie. C'est là une hypothèse qui explique une partie des phénomènes, mais elle est loin de les expliquer tous. » On aurait, nous semble-t-il, de la peine à réfuter l'hypothèse opposée, qui prétend que la polydipsie est primitive et la polyurie secondaire. D'autre part, comme nous l'avons déjà vu, la polyphagie reste encore toujours sans explication.

(*) *Loc. cit.*



Puisque nous sommes donc encore dans le domaine des hypothèses pour interpréter la pathogénie du diabète insipide, nous voulons à notre tour en formuler une, qui, si elle peut paraître quelque peu hardie, n'en est pas moins rationnelle et a le mérite d'expliquer complètement tout le complexus symptomatique de l'affection.

Nous nous représentons le diabète insipide comme une maladie plus ou moins étendue, probablement organique, de certains centres régulateurs situés dans la partie moyenne du système nerveux, depuis le myélencéphale jusqu'au télencéphale, y compris le cervelet. Cette région, où viennent se concentrer les neurones secondaires à conduction centripète et d'où rayonnent vers la moelle des neurones à conduction centrifuge, est le siège de tous les automatismes, de toutes les fonctions générales régulatrices d'ordre soit mécanique, soit physique, soit chimique. La physiologie n'est pas encore parvenue à établir tous ces centres, mais nous connaissons déjà bien les centres régulateurs de la respiration, de la circulation ou tension sanguine (cœur et vaisseaux), le centre régulateur général des réflexes; nous possédons des notions sérieuses sur l'existence de centres régulateurs de la station et de la locomotion (équilibre et coordination), de la glycogénie hépatique, de la calorification. Il est probable qu'au milieu de ces automatismes existent également des centres régulateurs de l'équilibre hydrique du corps, agissant par les sécrétions, et notamment par la sécrétion rénale.

Ainsi s'expliqueraient la polyurie et l'anurie d'origine nerveuse.

Enfin, des centres régulateurs de la nutrition, de l'assimilation et de la désassimilation, de la croissance, c'est-à-dire de véritables centres généraux trophiques, nous semblent encore plus importants, plus indispensables que tous les autres. Les besoins impérieux de la soif et de la faim, malgré la localisation périphérique de ces sensations, ne nous semblent pas pouvoir avoir d'autre siège qu'au niveau de ces centres régulateurs de l'état hydrique et trophique de notre organisme.

L'hypothèse qui précède nous permet d'interpréter aisément par une altération plus ou moins profonde des centres hydrique

et trophique les grands éléments symptomatiques du diabète insipide. Les phénomènes nerveux accessoires s'expliquent par une extension du processus pathologique à d'autres territoires nerveux.

L'on s'étonnera d'autant moins de la possibilité de cette régulation hydrique et trophique, gouvernée par le système nerveux, si l'on songe au fait, démontré par Hamburger, Heidenhain, de l'activité sécrétoire de l'endothélium capillaire, chargé de pourvoir aux besoins nutritifs des organes en même temps que de veiller à l'équilibre osmotique de la masse sanguine.

Quand, d'autre part, on se représente, avec Winkler, l'action trophique du système nerveux comme étant le résultat d'un influx à la fois anabolique et catabolique confié à deux sortes de fibres différentes, les cataboliques étant en même temps les fibres fonctionnelles, on comprendra encore mieux la nécessité d'un mécanisme régulateur trophique du système nerveux central.

Mais, ce qui plus est, à la lumière de notre hypothèse, les autres maladies de la nutrition s'éclairent également d'un jour nouveau et l'on comprend aisément, par une simple extension du processus pathologique, le passage, si fréquemment constaté, du diabète insipide au diabète sucré, d'autre part la coexistence et la substitution l'un à l'autre, comme subdivision d'un même processus pathologique, des différents types de maladies nutritives.

Nous ne voulons pas entrer ici dans tous les développements de notre hypothèse. Cela nous entraînerait aujourd'hui trop loin et nous aurons l'occasion d'y revenir. Disons seulement encore qu'elle explique parfaitement comment certains diabètes insipides peuvent être accompagnés d'hyperazoturie. Dans notre cas, il n'y a guère d'hyperazoturie, le diabète n'est qu'hydrurique. Disons encore que si l'on considère le diabète sucré comme une maladie nerveuse trophique, on peut plaider l'unité pathogénique de cette entité morbide, qui paraît encore aujourd'hui avoir une pathogénie si diverse. Et, en effet, il n'y aurait qu'à admettre que le pancréas agit par une sécrétion interne sur les centres trophiques du système nerveux, notamment les

centres régulateurs de la glycogénie. Or, ce fait est déjà admis, sur la foi de certaines expériences, par Lancereaux. Le produit de sécrétion du pancréas a pour rôle, pense cet auteur (*), de modérer le centre de la moelle allongée qui excite la formation du sucre au niveau du foie et d'exciter au contraire un centre voisin, frénateur de cette même action glycoso-formatrice. On comprend ainsi, selon lui, comment la lésion du pancréas et la lésion de certains territoires nerveux puissent produire un diabète relativement semblable.

Et ce fait de l'action trophique d'une sécrétion interne n'est pas isolé. Tout le monde connait aujourd'hui la fameuse influence sur la nutrition et la croissance de la sécrétion de la glande thyroïde.

Notre hypothèse est aussi en harmonie avec le fait, actuellement établi, de la coïncidence des maladies nerveuses proprement dites, des maladies de la nutrition et des déformations somatiques, fait qui éclaire si bien l'hérédité morbide (**).

Nous espérons que l'étude clinique de notre cas, dans tous ses détails et dans toutes les phases de son évolution, nous permettra d'apporter quelque argument démonstratif en faveur de l'hypothèse ci-dessus formulée. Peut-être que l'influence de certains facteurs thérapeutiques contribuera à éclaircir le problème. Un fait déjà significatif est que jusqu'ici les meilleurs résultats ont été obtenus par le traitement électrique. Clark (***) prétend avoir obtenu certains résultats en administrant l'extrait de capsules surrénales.

La séance se termine par une communication des plus remarquables de M. le professeur Guermonprez sur le *Traitement de la paralysie infantile*. Ce travail sera l'objet d'une analyse ultérieure. L'orateur ne fait que l'exposer dans ses grandes lignes et

---

(*) Congrès français de médecine, 1894.

(**) Voyez FÉRÉ, *L'hérédité tératologique*. (*Journ. des Conn. médicales*, avril 1896, nos 15, 16, 17.)

(***) *Brit. med. Journ.*, mai 1895.

il attire aujourd'hui tout particulièrement notre attention sur l'influence étonnante des manipulations des parties lésées, même dans les cas en apparence les plus désespérés.

Cinquième section.

—

En tête de l'ordre du jour figurait une communication de M. Hector Lambrechts, attaché au Ministère du Travail, sur la situation des couturières en chambre à Bruxelles. Cette communication n'a malheureusement pu être faite. Elle a été reportée à l'ordre du jour de la prochaine réunion. La cinquième section pourra, à cette occasion, examiner si, comme le pense M. Lambrechts, la situation des ouvrières en chambre nécessite des mesures législatives spéciales, dirigées contre les différents abus signalés, et autres que le régime de réglementation de la grande industrie.

L'assemblée a continué ensuite la discussion de l'étude sur le bimétallisme, et plus spécialement sur les conséquences immédiates de son introduction, étude que M. Ed. Van der Smissen, professeur à l'Université de Liége, avait présentée à la dernière réunion.

MM. le comte van der Straeten-Ponthoz, Léon t' Serstevens, Vollen, le R. P. Castelein ont pris part à la discussion, qui sera reprise à la session d'avril.

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE.

L'après-midi, à 2 1/4 heures, a eu lieu, dans la salle de l'*Émulation*, l'assemblée générale sous la présidence de M. F. Dewalque, professeur à l'Université de Louvain, premier vice-président en exercice de la Société.

M. A. Vierendeel, ingénieur en chef directeur du service technique de la Flandre occidentale, professeur à l'Université de Louvain, fait une conférence sur *l'architecture du fer*. Voici le résumé qu'en a publié, le lendemain, un des journaux représentés à la conférence, le *Patriote* :

« M. Vierendeel a défini très explicitement, dès le début, le titre de sa conférence : parler de l'art de construire en fer ou en acier, — ces deux métaux sont frères, — en y mettant un certain accent de poésie, le mot « poésie » étant pris dans son sens originel, dans le sens de création, d'intuition, d'inspiration.

Le savant conférencier a d'abord traité de l'alliance qui, rationnellement, doit exister entre la formule nécessaire, d'une part, et la liberté du constructeur, de l'architecte, d'autre part.

On ne peut avoir, a-t-il dit, ni le dédain ni le fétichisme de la formule. Le Beau, dans l'ordre constructif, c'est le Vrai, éclatant sous l'aspect Stabilité puissante, hardie, élégante, ornée ou non ornée, mais toujours stabilité.

Or nous devons, dans la poursuite du Beau, c'est-à-dire du Vrai, suppléer à l'insuffisance de la formule, combler un déficit, une lacune.

A quelle source puiser ce qui nous manque? Dans l'intuition, facteur nouveau; dans notre intuition de constructeur, qui est un écho plus ou moins distinct, un reflet plus ou moins clair de la Vérité absolue.

La plupart des grandes inventions, depuis l'origine des temps,

ne se sont-elles pas faites par intuition? Voyez, par exemple, le calcul infinitésimal. La démonstration scientifique n'en a été faite qu'après coup.

L'orateur, dans un remarquable aperçu, passe en revue les stades de l'architecture de la pierre, selon le tempérament des artistes qui l'utilisèrent, à l'époque grecque, romaine, byzantine, gothique. Depuis, on a marqué le pas.

Le métal, lui, se prête merveilleusement à l'inspiration : il a les qualités de résistance de la pierre et d'autres qualités que n'a pas la pierre. Avec le métal, l'architecte est complètement libre dans l'étude de ses effets esthétiques ; il est aussi indépendant de la matière que le peintre ou le sculpteur. En un mot, le fer libère l'artiste de la matière.

Quelle source d'originalité, pour l'architecture qui saura en user avec tact et intelligence! Et comme cette originalité sera différente de l'architecture de la pierre !

Un bonheur pour l'architecture du fer et son originalité, c'est l'absence d'archéologie : obligation de rentrer en soi!

Pas d'archéologie ! Enfantement, pénible peut-être, mais riche d'avenir! Trop de fois, en ce siècle, l'archéologie, si respectable d'ailleurs, a chassé l'inspiration. Avec l'usage du fer, élément nouveau, cela ne sera plus possible.

Notre état d'âme, en cette fin de siècle, est tout autre qu'à n'importe quelle époque de l'histoire. Le Grec était policé, se piquait de civilisation raffinée; son architecture est calme, sereine, fine. Le Romain se glorifiait de sa force et de sa puissance; son architecture est grande, luxueuse.

Le Gothique était pieux et mystique : dans son architecture, les lignes convergent toujours vers le zénith céleste. Nous, nous avons la sensation d'être devenus rois dans notre création terrestre, dominateurs sur notre planète.

Nous ne rencontrons plus d'obstacles. Nous avons rayé de nos dictionnaires le mot « impossible » : de là un sentiment de puissance qui doit se refléter dans les beaux-arts, et particulièrement dans le premier d'entre eux, dans l'architecture.

Au surplus, les besoins de notre vie moderne justifient la

nouvelle architecture en voie d'élaboration. Mais le fer ne sera pas, ne peut pas être seul. Il doit avoir recours à la pierre. Nécessité heureuse, qui imprimera un cachet de variété à la nouvelle architecture.

Ces principes exposés avec une remarquable lucidité, l'orateur est entré dans d'intéressants détails techniques, puis il a parlé du système décoratif de l'architecture du fer, architecture qui, sans décoration, ne serait naturellement pas complète.

Cette décoration doit être discrète, respecter les lignes, ne pas disloquer l'harmonie des masses. Pour cela, nous avons la ferronnerie, qui est au fer ce que la sculpture est à la pierre. Nous avons encore la céramique émaillée qui peut se sertir, comme des joyaux, sur les parois en fer.

Au-dessus de la céramique, peut-être, il y a, comme adjuvant décoratif, la polychromie — décor qui, employé avec tact, peut produire des merveilles. Plusieurs constructions métalliques polychromées d'Angleterre sont, à ce point de vue, à étudier sérieusement par nos constructeurs de gares.

Évidemment, l'épanouissement de l'architecture du fer est encore lointain : mais cette architecture est sortie de la période du laid; nous y découvrons déjà des fleurs de beauté; on commence, avec le fer, à obtenir des résultats artistiques; avec le temps, il en sortira du grand art.

De chaleureux applaudissements ont accueilli les dernières paroles du savant et convaincu conférencier. »

A. M. Vierendeel succède à la tribune M. Jules Leclercq, qui entretient l'assemblée des *Monuments indo-javanais*. Voici le résumé de cette intéressante et charmante causerie.

Lors de son récent voyage aux Indes néerlandaises, le conférencier a étudié les vestiges de la civilisation hindoue à Java. Parmi ces vestiges, le plus beau, le plus vaste est le célèbre temple de Boroboedor, qui fait songer aux pyramides d'Égypte par sa forme et par sa grandeur, mais une pyramide ouvrée de haut en bas, comme un bijou de filigrane.

C'est un immense temple à ciel ouvert, dont les terrasses

escaladent les flancs d'une montagne d'une forme si régulière, qu'il a suffi de peu de travail pour y asseoir l'édifice. La montagne était sans doute naturellement carrée, il a fallu en égaliser les quatre pans, en aplanir le faîte en forme d'esplanade; puis on a construit les terrasses successives dont les six premières sont de forme polygonale et les trois dernières de forme circulaire. C'est un monument unique sur la terre, surpassant en beauté tous les monuments connus du monde bouddhique. L'unité en est si frappante, qu'il faut admettre que l'édifice est l'œuvre d'un seul architecte. Les archéologues s'accordent à dire que le Boroboedor date de mille ans au moins. C'est ce qu'attestent les inscriptions dont les caractères datent de l'an 800 de l'ère Sjâka, qui correspond au IXe siècle de notre ère. La signification religieuse du Boroboedor ne peut laisser aucun doute : c'est le plus pur monument bouddhique de Java; les pèlerins y venaient vénérer les cendres de Bouddha dont la vie et les enseignements sont retracés sur les bas-reliefs qui, mis bout à bout, représenteraient un développement total de 3 kilomètres.

A une demi-lieue du Boroboedor se trouve un autre monument bouddhique d'une grande beauté, le Tjandi Mendoet, qui appartient manifestement à la même époque. C'est un petit sanctuaire contenant une chambre carrée surmontée d'une coupole en forme de pyramide creuse, dont les pierres font saillie les unes sur les autres. Cette coupole abrite trois statues colossales, dont celle du milieu représente Bouddha.

Après le célèbre Boroboedor, les plus beaux monuments de Java sont les temples de Parambanan, situés dans une plaine que domine le volcan Mérapi, au centre de Java. Ce n'est que tout récemment que ces ruines ont été révélées dans toute leur beauté, grâce aux travaux exécutés par les soins de la Société archéologique de Djokjakarta. Elles se composent d'un groupe de temples comprenant six grands sanctuaires érigés sur une terrasse carrée, autour de laquelle cent soixante petits temples formaient trois rangées successives disposées en carrés. Les statues retrouvées dans les sanctuaires de Parambanan attestent que le culte de Siva florissait à Java à côté du culte de Bouddha.

Non loin de ce groupe de temples, on trouve un autre groupe remarquable, les *Mille Temples,* dont on connaît la date exacte par un document javanais qui nous apprend qu'ils furent achevés en l'an 1018, ce qui correspond à l'année 1094 de notre ère. Le groupe des Mille Temples est le plus vaste de tous ceux qu'on a trouvés à Java. Il comprend deux cent quarante petits temples disposés en quatre rangées, en forme de carré, autour du temple principal.

A cent lieues plus à l'est, d'autres ruines indo-javanaises abondent dans les environs de la ville de Malang. Les plus curieuses se trouvent à Singosari et à Toenpang; elles rappellent, par leur style, celles de Parambanan.

M. Fr. Dewalque, président, après avoir remercié et félicité les orateurs, déclare close la session de janvier 1897 de la Société scientifique.

SESSION DES 27, 28 ET 29 AVRIL 1897

A BRUXELLES

SÉANCES DES SECTIONS

Première section.

Mercredi, 28 avril 1897. — La section procède au renouvellement de son bureau. Sont élus :

Président :	MM. CH. LAGASSE-DE LOCHT.
Vice-Présidents :	D'OCAGNE.
	E. PASQUIER.
Secrétaire :	H. DUTORDOIR.

M. Goedseels fait connaître les résultats principaux d'un travail sur les prismes topographiques qu'il fera paraître probablement sous peu dans une publication nouvelle : *La Revue des travaux techniques*, publiée par les officiers du génie belge.

Il commence par montrer l'importance que ces prismes ont acquise par suite de leurs applications à la télémétrie militaire.

Il fait en quelques mots l'historique de la question, et montre les lacunes qui y existent.

Pour arriver à exposer clairement comment on peut s'y prendre pour combler ces lacunes, M. Goedseels considère une section droite dans un prisme. En outre, il suppose, comme on le fait toujours du reste, qu'on ait pris des dispositions pour que le plan de cette section renferme les rayons visuels qui pénètrent dans le prisme en se réfractant, et se réfléchissent intérieurement sur les faces pour en sortir enfin en se réfractant une deuxième fois. Il suppose, en outre, qu'on ait placé dans le plan de section droite un limbe, gradué de zéro à 400 grades, et mené par le

centre de ce limbe des rayons parallèles à toutes les directions situées dans le plan de section droite et dont on a à s'occuper.

C'est ainsi qu'il désigne par les lettres N_0, M_1, M_2, M_3, ... M_t, N, R_0, R, les graduations qui correspondent :

N_0 à la normale à la face d'entrée vers l'intérieur du prisme;

N à la normale à la face de sortie vers l'extérieur du prisme;

M_1, M_2, M_3, ... M_t aux faces du prisme sur lesquelles le rayon visuel vient se réfléchir successivement;

R_0 à la direction du rayon qui se présente à l'entrée du prisme;

R à la direction du rayon qui en émerge.

Enfin, l'auteur appelle caractéristique d'un prisme, et désigne par la lettre C, l'expression suivante qui joue un rôle prépondérant dans son étude :

$$2\{M_1 - M_2 + M_3 \ldots - (-1)^t M_t\} - N_0 + (-1)^t N.$$

M. Goedseels rappelle : 1° qu'un rayon de lumière solaire se disperse en pénétrant dans un prisme; 2° que chaque rayon de lumière simple peut se réfléchir intérieurement sur une face ou sur plusieurs faces successives, et sortir enfin par une face d'émergence.

Les divers rayons simples peuvent sortir du prisme parallèlement à une direction unique, mais ils peuvent aussi en sortir dans des directions divergentes.

On cite, dans les traités de physique, le prisme à base triangulaire isocèle comme jouissant de la propriété de fournir un faisceau de rayons émergents parallèles, lorsque la réflexion intérieure a lieu sur la base du triangle.

M. Goedseels a recherché d'abord les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un prisme quelconque, dans lequel les rayons lumineux suivent un certain parcours, fournisse un faisceau de rayons parallèles.

Il a démontré à cet effet la formule suivante dans l'étude prérappelée :

$$(1) \quad \sin NR = (-1)^t\left[\cos C \sin N_0R_0 - \sin C\sqrt{n - \sin^2 N_0R_0}\right].$$

NR est l'angle du rayon sortant avec la normale à la face de sortie, c'est-à-dire l'angle de réfraction.

N_0R_0 est l'angle d'incidence du rayon entrant R_0.

n est l'indice de réfraction.

Cette formule permet de résoudre immédiatement la question posée, ainsi que les autres questions relatives aux prismes.

D'abord, pour qu'un prisme ne disperse pas la lumière, il faut et il suffit que l'angle NR soit indépendant de l'indice de réfraction.

Il faut et il suffit donc que sin C = 0.

L'examen des valeurs que peut prendre C prouve que cette relation revient à $C = m.\ 400$, m étant ou bien zéro ou bien un nombre entier positif ou négatif.

Par conséquent :

Pour qu'un prisme donne naissance à un faisceau émergent parallèle, il faut et il suffit que la caractéristique correspondant aux faces rencontrées soit m. 400.

Les prismes qui satisfont à cette condition peuvent être rangés en deux catégories selon que le nombre t des réflexions internes est pair ou impair.

Lorsque t est impair, on a, en vertu de la relation (1),

$$NR = -N_0R_0.$$

Le rayon émergent R fait avec la normale N, à la face de sortie, un angle égal en valeur absolue, mais de signe contraire à l'angle N_0R_0 que fait le rayon entrant R_0 avec la normale N_0 à la face d'entrée.

Un petit croquis montre immédiatement que le prisme fait subir aux rayons lumineux une déviation identique à celle qui résulterait d'une réflexion sur un miroir bissectant les normales N et N_0.

Lorsque t est pair, on a :

$$NR = N_0R_0.$$

Un petit croquis montre de même dans ce cas que le rayon

émergent fait avec le rayon sortant un angle constant et égal à l'angle des normales N et N_0.

Les prismes appartenant à cette deuxième catégorie sont appelés des équerres à prismes, alors même que l'angle N_0N est différent d'un angle droit.

Ce sont les équerres à prismes qui sont presque exclusivement employés dans les télémètres actuels.

L'auteur de la communication termine par l'exposé de quelques exemples intéressants.

Le R. P. Lucas présente à la section une balance de précision et explique les perfectionnements qui y ont été réalisés, notamment en vue d'assurer la conservation des couteaux de support.

M. le secrétaire donne lecture du rapport suivant de M. Humbert sur le mémoire de M. de Salvert *sur l'attraction du parallélipipède ellipsoïdal*, présenté à la section le 24 avril 1895 :

« Le mémoire de M. de Salvert est relatif à l'attraction du parallélipipède ellipsoïdal : M. de Salvert appelle ainsi le corps limité par deux ellipsoïdes, deux hyperboloïdes à une nappe et deux hyperboloïdes à deux nappes, ayant les mêmes coniques focales; il cherche les composantes de l'attraction exercée par un pareil corps sur le centre commun des surfaces qui le limitent.

Chacune de ces composantes s'exprime par une intégrale triple étendue au volume du corps; par un calcul relativement simple et très symétrique, l'auteur ramène l'intégrale triple à une combinaison linéaire de six intégrales doubles de la forme

$$I^{(\varpi)} = \iint \frac{s-t}{\sqrt{s+t+\varpi-h}} \frac{ds}{\sqrt{g^2+hs-s^2}} \frac{dt}{\sqrt{g^2+ht-t^2}},$$

où ϖ, h, g sont des constantes, et dont le champ est un rectangle de côtés parallèles aux axes des s et des t.

Pour calculer l'intégrale $I^{(\varpi)}$, l'auteur emploie ensuite le changement de variables $s+t=\theta+h$; $st=\omega-g^2$, θ et ω étant

les nouvelles variables; après une discussion assez longue et délicate, où diverses positions de figure sont à considérer, il montre que l'intégration par rapport à ω s'effectue aisément, et que l'intégrale en θ qui subsiste se ramène aux intégrales elliptiques.

Le problème est donc résolu. M. de Salvert ne se borne pas à cette vue générale, il donne d'une manière explicite, et pour tous les cas possibles, les formules définitives. Dans toutes ces recherches, il a recours aux notations et aux théories de son mémoire *Sur le système orthogonal triplement isotherme*, publié de 1889 à 1894 dans les *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, et affirme ainsi, une fois de plus, les avantages du système de coordonnées adopté par lui.

Le travail actuel de M. de Salvert se termine par une vérification directe des formules obtenues, lorsque le parallélipipède se réduit à l'octant d'une croûte ellipsoïdale, renfermé dans le trièdre positif des axes : la vérification n'est nullement immédiate, parce que les intégrales elliptiques de troisième espèce, qui figurent dans les deux résultats à comparer, ont des modules complémentaires et des paramètres différents. A cet ordre d'idées se rattache une note finale, relative aux fonctions de troisième espèce appartenant à deux modules complémentaires.

Nous estimons que ce mémoire mérite d'être inséré aux *Annales de la Société scientifique :* les calculs, souvent longs et difficiles, sont toujours présentés avec l'ordre et la clarté dont l'auteur a l'habitude; les résultats sont précis et suivis dans tous leurs détails. Nous ne nous permettrons que deux observations.

Tout d'abord, le changement de variables $s + t = \theta + h$; $st = \omega - g^2$, n'est peut-être pas le plus simple à adopter pour ramener l'intégrale double $I^{(\varpi)}$ à une intégrale elliptique : il nous semble que les discussions seraient plus courtes par la méthode suivante, que nous esquissons brièvement.

Posons

$$\frac{ds}{\sqrt{g^2 + hs - s^2}} = du, \quad \frac{dt}{\sqrt{g^2 + ht - t^2}} = dv,$$

c'est-à-dire

$$s-\frac{h}{2}=\sqrt{g^2+\frac{h^2}{4}}\sin u,\quad t-\frac{h}{2}=\sqrt{g^2+\frac{h^2}{4}}\sin v;$$

l'intégrale double devient, à un facteur constant près,

$$J=\iint\frac{(\sin u-\sin v)\,dudv}{\sqrt{\sin u+\sin v+K}},$$

k étant une constante. Le champ est encore un rectangle de côtés parallèles aux axes des u et des v. Posons maintenant

$$u+v=2x,\quad u-v=2y;$$

on aura

$$J=2\iint\frac{2\sin y\cos x\,.\,dxdy}{\sqrt{2\sin x\cos y+K}}.$$

Le champ est cette fois un rectangle de côtés parallèles aux bissectrices des axes Ox et Oy. L'intégrale J se décompose alors en trois autres; l'une d'elles est, par exemple, à un facteur constant près

$$\int_{x_0}^{x_1}dx\int_{-x+\alpha}^{x+\beta}dy\frac{\sin y\cos x}{\sqrt{2\sin x\cos y+K}}$$

$$=-\int_{x_0}^{x_1}dx\cot g\,x\left[\sqrt{2\sin x\cos y+K}\right]_{-x+\alpha}^{x+\beta}.$$

Par suite, J se ramène à une somme d'intégrales telles que

$$\int_{x_0}^{x_1}\cot g\,x\,dx\sqrt{2\sin x\cos(x+\beta)+K},$$

et l'on fait apparaître les intégrales elliptiques sans difficulté.

Cette méthode semble avoir l'avantage de supprimer la discussion relative au signe du Jacobien et l'introduction de la quantité que M. de Salvert appelle Θ, quantité qui disparaît à la fin des calculs.

Enfin, il nous paraît que la vérification qui termine le mémoire pourrait être supprimée, ou tout au moins très réduite, sans diminuer l'intérêt du travail. Il ne s'agit là que d'une question de pur calcul dans le système ordinaire de coordonnées rectilignes, et qui conduit à une recherche « assez laborieuse » et « plus longue que difficile », pour employer les expressions de l'auteur. La méthode générale de M. de Salvert est exposée auparavant avec tant de précision et les développements en sont si nets que le lecteur n'éprouve aucun besoin de vérification.

Le second rapporteur, M. de Sparre, se rallie aux conclusions du rapport précédent.

La section vote l'impression dans les *Annales* du mémoire de M. de Salvert, en laissant à l'auteur le soin de tenir compte dans la mesure où il le jugera convenable des observations des rapporteurs.

M. Eug. Ferron présente un mémoire intitulé : *Contribution à la théorie de la flexion et de la torsion des tiges élastiques et son application aux constructions métalliques.*

Ce travail se divise en cinq paragraphes :

Dans le premier, l'auteur établit les conditions de l'équilibre de la pièce sollicitée par des forces quelconques.

Le second paragraphe est consacré à l'étude d'un mode de sollicitation spécial d'une pièce prismatique ou cylindrique encastrée à l'un des bouts. L'auteur cite à l'appui de ses vues théoriques certains faits d'expérience.

Dans son troisième paragraphe, l'auteur propose, comme application de ses idées, une théorie sur la génération des courbes gauches.

Dans les quatrième et cinquième paragraphes, il fait connaître deux applications pratiques qu'il a faites de sa théorie aux constructions métalliques.

Le mémoire de M. Ferron est le développement d'un travail présenté antérieurement par lui à la section.

Il donne lieu à une discussion à laquelle prennent part MM. Ch.-J. de la Vallée-Poussin et Dutordoir.

MM. De Tilly et d'Ocagne sont nommés commissaires pour l'examen du mémoire de M. Ferron.

M. Mansion adresse à la section le résumé suivant d'une communication faite par lui de vive voix à la séance de janvier 1897, *sur une méthode élémentaire d'exposition des principes de la géométrie non euclidienne.*

1. *Caractéristique des trois géométries.* α. *Définition générale de la droite :* La droite est une ligne indéfinie, homogène, entièrement déterminée par deux quelconques de ses points suffisamment rapprochés. En pratique, un fil tendu très fin réalise autant que possible ce concept général de la droite.

β. *Postulat des deux droites* (6ᵉ postulat d'Euclide). Deux droites ne peuvent enclore un espace.

γ. *Postulat des trois droites* (5ᵉ postulat d'Euclide). Deux droites d'un plan qui font d'un même côté, avec une troisième, des angles dont la somme est inférieure à deux angles droits, se rencontrent de ce côté.

La géométrie euclidienne a pour base les propositions α, β, γ.

La géométrie lobatchefskienne a pour base les propositions α, β.

La géométrie riemannienne a pour base les propositions α, γ.

2. *Géométrie riemannienne.* On peut déduire *péniblement*, de α, γ, les propriétés suivantes d'un triangle riemannien ABC, rectangle en A et ayant pour côtés *a, b, c* :

$$\cos a = \cos b \cos c, \quad \cos B = \frac{\operatorname{tang} c}{\operatorname{tang} a}, \quad \cos C = \frac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} a} \quad . \quad (\gamma')$$

Au contraire, grâce à la complète identité des formules (γ′) avec celles de la trigonométrie sphérique, on peut *aisément* déduire γ de α et de ces formules (γ′), prises pour définitions d'un triangle riemannien, rectangle en A, et de ses angles B et C; de α, γ, γ′, on tire ensuite toute la géométrie riemannienne, soit dans le plan, soit dans l'espace.

3. *Géométrie lobatchefskienne.* On peut déduire *péniblement*

de α, β les propriétés d'un triangle lobatchefskien ABC, rectangle en A, et ayant pour côtés a, b, c :

$$\mathrm{Ch}\,a = \mathrm{Ch}\,b\,\mathrm{Ch}\,c, \quad \cos \mathrm{B} = \frac{\mathrm{Th}\,c}{\mathrm{Th}\,a}, \quad \cos \mathrm{C} = \frac{\mathrm{Th}\,b}{\mathrm{Th}\,a}. \quad . \quad .(\beta')$$

Au contraire, grâce à la grande ressemblance analytique des formules (β') avec celles de la trigonométrie sphérique, puisqu'on passe de l'une à l'autre en changeant simplement les fonctions circulaires des côtés en fonctions hyperboliques correspondantes, on déduit *aisément* β de α et des formules (β'), prises pour définition d'un triangle lobatchefskien rectangle en A et de ses angles B et C; de α, β, β' on tire ensuite toute la géométrie lobatchefskienne, plane et solide.

4. *Conclusion.* Taurinus, en 1826, a déduit, par induction, les formules (β'), les formules (γ') et une foule d'autres relations de géométrie lobatchefskienne, sans parvenir à leur trouver un sens raisonnable; mais Lobatchefsky qui, au fond, emploie le même procédé dans sa *Géométrie imaginaire* (1837, *Journal de Crelle*, XVII, pp. 295-320), a la pleine conscience de la légitimité du système de géométrie établi directement sur α et β'. Le mode d'exposition de la géométrie non euclidienne, fondé sur α et γ' et sur α et β', est le plus élémentaire et le plus simple qui ait été trouvé jusqu'à présent. On peut employer un mode d'exposition analogue pour la géométrie euclidienne.

M. Mansion communique la note suivante *sur l'expression analytique du volume d'un corps en géométrie non euclidienne.*

Soient, dans un espace riemannien, α, β, γ, ρ les distances d'un point à trois plans coordonnés rectangulaires et à leur point de rencontre, r la constante riemannienne. Posons :

$$x = \sin\frac{\alpha}{r}, \quad y = \sin\frac{\beta}{r}, \quad z = \sin\frac{\gamma}{r}, \quad u = \cos\frac{\rho}{r},$$

$$\mathrm{V} = r^3 \iiint \frac{dx\,dy\,dz}{u},$$

l'intégrale étant étendue à tout l'espace compris à l'intérieur

d'un corps quelconque. On prouve aisément que l'on a

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 1,$$

et que V se transforme en une expression de même forme, au moyen de nouvelles coordonnées x', y', z', u', quand on prend de nouveaux plans coordonnés rectangulaires. Par suite, on peut prendre l'expression V pour définition du volume du corps considéré.

Dans un espace lobatchefskien, la même formule où r^3 est remplacé par l^3 peut aussi servir à définir le volume d'un corps pourvu que l'on pose

$$x = \mathrm{Sh}\,\frac{\alpha}{l}, \quad y = \mathrm{Sh}\,\frac{\beta}{l}, \quad z = \mathrm{Sh}\,\frac{\gamma}{l}, \quad u = \mathrm{Ch}\,\frac{\rho}{r},$$

l étant la constante lobatchefskienne. Dans ce cas

$$x^2 + y^2 + z^2 - u^2 = -1.$$

Pour r ou l infini, V devient l'expression connue du volume d'un corps en géométrie euclidienne.

Ce qui précède s'applique évidemment aux aires planes, *mutatis mutandis.*

La théorie purement analytique des aires et des volumes que nous venons d'esquisser est probablement la seule qui permette de surmonter toutes les difficultés que présente, au point de vue purement logique, la théorie de l'équivalence des figures, même en géométrie élémentaire.

Dès son premier écrit sur la géométrie qui porte son nom, Lobatchefsky est arrivé, par induction, aux formules exactes pour les aires planes et les volumes, sous une forme différente de celle que nous indiquons plus haut, mais complètement équivalente.

M. le vicomte de Salvert présente la communication suivante :

La notion des intégrales elliptiques envisagées comme fonctions de leur module joue, comme on le sait, un rôle considérable dans l'Analyse. Aussi tous les traités complets de cette Science rapportent-ils, dans cet ordre d'idées, plusieurs formules

importantes déduites de la différentiation de ces fonctions par rapport à leur module. Mais, par contre, la plupart ne font mention d'aucune formule explicite qui provienne de l'intégration des mêmes fonctions par rapport à ce module.

Nous avons donc lieu de penser qu'on ne jugera pas dénuées d'intérêt, à ce point de vue, deux formules très simples, appartenant à cette dernière catégorie, auxquelles nous avons été conduits, dans nos recherches sur l'*Attraction du Parallélipipède Ellipsoïdal*, par une intégration directe effectuée au moyen d'un changement de variables, et que nous énoncerons, pour plus de clarté, sous la forme d'un théorème d'Analyse, dans les termes suivants :

« *Si l'on convient de représenter par les symboles* $F_1(z, k)$ *et*
» $F_2(z, k)$ *les deux intégrales elliptiques normales de première*
» *et de deuxième espèce, savoir*

$$(1)\qquad F_1(z,k)=\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},\qquad F_2(z,k)=\int_0^z \frac{k^2z^2dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

» *et conformément à l'usage, par* $\Pi(\varphi, h, k)$ *la fonction elliptique*
» *de troisième espèce, on aura la formule de quadrature*

$$(2)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_g^k F_2\left(\frac{x}{k}, k\right)\frac{2kdk}{\sqrt{(g^2-k^2)(1-g^2+k^2)}} - \int_g^k F_1\left(\frac{x}{k}, k\right)\frac{(g^2-k^2)2kdk}{\sqrt{(g^2-k^2)(1-g^2+k^2)}} \\ \qquad = 2i\sqrt{1-g^2}\left[\Pi(\varphi_2, h_2, k_2) - \Pi(\varphi_1, h_1, k_1)\right], \end{cases}$$

» *dans laquelle, g désignant un paramètre arbitraire (auquel on*
» *pourrait attribuer la dénomination de* module du second
» ordre), *les valeurs des six éléments* φ_1, h_1, k_1, φ_2, h_2, k_2 *sont*
» *définies par les égalités :*

$$(3)\qquad \begin{cases} k_1=\dfrac{\sqrt{1-k^2}}{ik}, & \operatorname{sn}(h_1, k_1)=\dfrac{ik}{\sqrt{1-g^2}}, & \operatorname{sn}(\varphi_1, k_1)=\dfrac{ix}{\sqrt{1-x^2}}, \\ k_2=\dfrac{\sqrt{1+x^2-g^2}}{\sqrt{x^2-g^2}}, & \operatorname{sn}(h_2, k_2)=\dfrac{\sqrt{x^2-g^2}}{\sqrt{1-g^2}}, & \operatorname{sn}(\varphi_2, k_2)=\dfrac{\sqrt{-g^2+k^2}}{\sqrt{1-g^2+k^2}}. \end{cases}$$

« *Pour la valeur particulière de la constante* $g = 1$, *cette for-*
» *mule prend la forme limite*

$$(4)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_1^k F_2\left(\frac{x}{k}, k\right)\frac{dk}{\sqrt{1-k^2}} - \int_1^k F_1\left(\frac{x}{k}, k\right)\sqrt{1-k^2}\,dk \\ \displaystyle = -\left[xF_1\left(\sqrt{1-k^2}, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) + \sqrt{1-k^2}F_1\left(x, \frac{1}{k}\right)\right], \end{cases}$$

» *formule que l'on pourra encore écrire sous cette autre forme*

$$(4^{bis})\quad \begin{cases} \displaystyle\int_1^k F_2\left(\frac{x}{k}, k\right)\frac{dk}{\sqrt{1-k^2}} - \int_1^k F_1\left(\frac{x}{k}, k\right)\sqrt{1-k^2}\,dk \\ \displaystyle = i\left[xF_1\left(\frac{\sqrt{1-k^2}}{ik}, \frac{ix}{\sqrt{1-x^2}}\right) - \sqrt{1-k^2}F_1\left(\frac{ix}{\sqrt{1-x^2}}, \frac{\sqrt{1-k^2}}{ik}\right)\right], \end{cases}$$

» *dont on remarquera l'analogie avec celle dite* de l'échange de
» l'amplitude et du paramètre *pour la fonction elliptique de*
» *troisième espèce.* »

Nous allons indiquer rapidement les points essentiels d'une démonstration *a posteriori* de la formule générale (2) qui précède.

Convenant de désigner respectivement par I et J les deux membres de cette formule à vérifier, et remarquant qu'en faisant $z = \frac{x}{k}$ dans les définitions (1), le premier membre en question devient

$$I = \int_g^k \left(\int_0^x \frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)(k^2-x^2)}}\right)\frac{2kdk}{\sqrt{(g^2-k^2)(1-g^2+k^2)}}$$
$$-\int_g^k \left(\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(k^2-x^2)}}\right)\frac{(g^2-k^2)2kdk}{\sqrt{(g^2-k^2)(1-g^2+k^2)}},$$

on trouvera, d'une part, presque immédiatement,

$$(5)\quad \frac{\partial^2 I}{\partial x \partial k} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial I}{\partial k}\right) = \frac{2k(x^2+k^2-g^2)}{\sqrt{(1-x^2)(k^2-x^2)(g^2-k^2)(1-g^2+k^2)}}.$$

D'autre part, après avoir fait, pour abréger,

(6) $\Pi(\varphi_1, h_1, k_1) = \Pi_1, \quad \Pi(\varphi_2, h_2, k_2) = \Pi_2, \quad$ d'où $\quad J = 2i\sqrt{1-g^2}(\Pi_2 - \Pi_1),$

rappelant qu'en faisant $\mathrm{sn}\,(\varphi, k) = t$ dans la définition de la fonction de troisième espèce $\Pi\,(\varphi, h, k)$, celle-ci devient

$$\Pi(\varphi, h, k) = \int_0^t \frac{k^2 \,\mathrm{sn}\, h \,\mathrm{cn}\, h \,\mathrm{dn}\, h \,.\, t^2 dt}{(1 - k^2 \,\mathrm{sn}^2 h \,.\, t^2)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},$$

et appliquant, en conséquence, cette transformation aux deux fonctions précédentes Π_1 et Π_2, pour lesquelles on aura respectivement, d'après les définitions (3),

(7) $\quad t_1 = \mathrm{sn}(\varphi_1, k_1) = \dfrac{ix}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad t_2 = \mathrm{sn}(\varphi_2, k_2) = \dfrac{\sqrt{-g^2+k^2}}{\sqrt{1-g^2+k^2}},$

si l'on remarque alors que, d'après les mêmes définitions, pour la fonction Π_1, l'argument φ_1 seul dépend de x et non h_1 ni k_1, et de même, pour la fonction Π_2, l'argument φ_2 seul dépend de k et non h_2 ni k_2, il en résultera immédiatement les expressions

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_1}{\partial x} &= \frac{k_1^2 \,\mathrm{sn}\,(h_1, k_1)\,\mathrm{cn}\,(h_1, k_1)\,\mathrm{dn}\,(h_1, k_1)}{1 - k_1^2 \,\mathrm{sn}^2\,(h_1, k_1)\,.\,t_1^2}\;\frac{t_1^2 \dfrac{\partial t_1}{\partial x}}{\sqrt{(1-t_1^2)(1-k_1^2t_1^2)}}, \\ \frac{\partial \Pi_2}{\partial k} &= \frac{k_2^2 \,\mathrm{sn}\,(h_2, k_2)\,\mathrm{cn}\,(h_2, k_2)\,\mathrm{dn}\,(h_2, k_2)}{1 - k_2^2 \,\mathrm{sn}^2\,(h_2, k_2)\,.\,t_2^2}\;\frac{t_2^2 \dfrac{\partial t_2}{\partial k}}{\sqrt{(1-t_2^2)(1-k_2^2t_2^2)}}, \end{aligned}\right.$$

lesquelles, étant calculées explicitement en partant des définitions (3) et (7), fourniront, sans autre difficulté que des écritures un peu longues, finalement les valeurs

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial x} = -\varphi(x)\frac{k'^2 \mathrm{E}}{\mathrm{A}}, \qquad \frac{\partial \Pi_2}{\partial k} = \psi(k)\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{A}},$$

dans lesquelles il est fait, pour abréger,

$$(8)\quad \begin{cases} A=1-g^2+(g^2-k^2)x^2, \quad B=\dfrac{x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{x^2-k^2}}, \qquad C=1-g^2+x^2, \\ D=1-g^2+k^2, \qquad E=\dfrac{\sqrt{g^2-k^2}\sqrt{1-g^2+k^2}}{\sqrt{x^2-k^2}}, \qquad k'^2=1-k^2, \\ \varphi(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{1-g^2}\sqrt{1-x^2}}, \qquad \psi(k)=\dfrac{k\sqrt{g^2-k^2}}{\sqrt{1-g^2}\sqrt{1-g^2+k^2}}, \end{cases}$$

et qui donnent dès lors :

$$(9)\qquad \frac{\partial}{\partial k}\left(\frac{\partial \Pi_1}{\partial x}\right)=-\varphi(x)\left[\frac{1}{A}\frac{\partial . k'^2 E}{\partial k}-\frac{k'^2 E}{A^2}\frac{\partial A}{\partial k}\right],$$

$$(10)\qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Pi_2}{\partial k}\right)=\psi(k)\left[\frac{C}{A}\frac{\partial B}{\partial x}+B\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{C}{A}\right)\right].$$

Or, comme on trouve aisément, en partant des définitions (8),

$$(11)\qquad C=\left[1-g^2+(g^2-k^2)x^2\right]-(g^2-k^2)x^2+x^2=A+(1-g^2+k^2)x^2=A+Dx^2,$$

$$\frac{C}{A}=1+D\frac{x^2}{A}, \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{C}{A}\right)=D\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2}{A}\right)=D.(1-g^2)\frac{2x}{A^2},$$

la seconde dérivée (10) devient donc

$$(12)\qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Pi_2}{\partial k}\right)=\psi(k)\left[\frac{C}{A}\frac{\partial B}{\partial x}+B.D(1-g^2)\frac{2x}{A^2}\right],$$

et par le moyen de ces deux valeurs (12) et (9), la définition (6) de J donnera

$$(13)\qquad \frac{\partial^2 J}{\partial x \partial k}=2i\sqrt{1-g^2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Pi_2}{\partial k}\right)-\frac{\partial}{\partial k}\left(\frac{\partial \Pi_1}{\partial x}\right)\right]=2i\sqrt{1-g^2}\left(\frac{G}{A}+\frac{H}{A^2}\right).$$

en faisant de nouveau

$$\left\{\begin{aligned} G &= \psi(k)\,C\frac{\partial B}{\partial x} + \varphi(x)\frac{\partial\,.\,k'^2E}{\partial k},\\ H &= \psi(k)\,D(1-g^2).2Bx - \varphi(x)\,k'^2E\frac{\partial A}{\partial k},\end{aligned}\right.$$

expressions dont la seconde, étant calculée à l'aide des définitions (8), est trouvée très facilement avoir pour valeur $H = 2k\varphi(x)\,EA$, en sorte qu'en ayant égard en même temps à la première, l'égalité précédente (13) devient :

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 J}{\partial x\partial k} &= 2i\sqrt{1-g^2}\left(\frac{G}{A}+\frac{2k\varphi(x)EA}{A^2}\right) = \frac{2i\sqrt{1-g^2}}{A}\Big(G + 2\varphi(x)\,kE\Big)\\ &= \frac{2i\sqrt{1-g^2}}{A}\left[\left\{\psi(k)\,C\frac{\partial B}{\partial x} + \varphi(x)\left(k'^2\frac{\partial E}{\partial k} - 2kE\right)\right\} + 2\varphi(x)\,kE\right]\\ &= \frac{2i\sqrt{1-g^2}}{A}\left[\psi(k)\,C\frac{\partial B}{\partial x} + \varphi(x)\,k'^2\frac{\partial E}{\partial k}\right].\end{aligned}\right.$$

Or, comme on déduit également, sans trop de peine, des mêmes définitions (8) les valeurs

$$\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{-(k^2-2k^2x^2+x^4)}{(x^2-k^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{1-x^2}},\qquad \frac{\partial E}{\partial k} = \frac{k[A + D(k^2+g^2-1-x^2)]}{(x^2-k^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{g^2-k^2}\sqrt{1-g^2+k^2}},$$

en les remettant, ainsi que celles (11) de C, et (8) de $\psi(k)$, $\varphi(x)$, et k'^2, dans l'expression (14) précédente, et réduisant ensuite au même dénominateur, celle-ci prendra la forme

$$(15)\quad \frac{\partial^2 J}{\partial x\partial k} = \frac{2i\sqrt{1-g^2}}{A}\,\frac{k}{\sqrt{1-g^2}\sqrt{g^2-k^2}\sqrt{1-g^2+k^2}\sqrt{1-x^2}}\,\frac{L}{(x^2-k^2)^{\frac{3}{2}}},$$

dans laquelle il est fait successivement, d'abord

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} L &= -(g^2-k^2)(A+Dx^2)(k^2-2k^2x^2+x^4)+x^2(1-k^2)[A+D(k^2+g^2-1-x^2)]\\ &= (k^2-g^2)(k^2-2k^2x^2+x^4).(A+Dx^2)+(1-k^2)\left[Ax^2+Dx^2(k^2+g^2-1-x^2)\right]\\ &= M.A + N.Dx^2,\end{aligned}\right.$$

puis de là, en conséquence,

$$(17)\quad \left\{ \begin{array}{l} M = (k^2 - g^2)(k^2 - 2k^2x^2 + x^4) + (1 - k^2)x^2, \\ N = (k^2 - g^2)(k^2 - 2k^2x^2 + x^4) + (1 - k^2)(k^2 + g^2 - 1 - x^2). \end{array} \right.$$

Or, comme en développant, puis ajoutant et retranchant le terme g^2x^2, on trouve aisément la valeur $N = A\,(2k^2 - x^2 - 1)$, l'expression précédente (16) de L devient donc par là

$$L = M.A + A(2k^2 - x^2 - 1).Dx^2 = A\left[M + D(2k^2x^2 - x^4 - x^2)\right]$$
$$= A\left[M + D\left\{(k^2 - x^2) - (k^2 - 2k^2x^2 + x^4)\right]\right.,$$

valeur qui, en ayant égard à la définition (17) de M et à celle (8) de D, se réduira très facilement à la suivante,

$$L = -A(x^2 - k^2)(x^2 + k^2 - g^2),$$

par le moyen de laquelle l'expression ci-dessus (15) de $\frac{\partial^2 J}{\partial x \partial k}$ sera définitivement, en multipliant haut et bas par i, puis supprimant de même le facteur commun $\sqrt{1 - g^2}A\,(x^2 - k^2)$,

$$\frac{\partial^2 J}{\partial x \partial k} = \frac{2k\,(x^2 + k^2 - g^2)}{\sqrt{(1 - x^2)(k^2 - x^2)\,(g^2 - k^2)(1 - g^2 + k^2)}},$$

valeur identique à celle (5) obtenue tout d'abord pour $\frac{\partial^2 I}{\partial x \partial k}$.

On aura donc nécessairement

$$(18)\qquad I = J + \varpi(x) + f(k),$$

f et ϖ désignant des fonctions arbitraires. Or, par leurs définitions mêmes, I et J sont nuls chacun, soit pour $x = 0$ quel que soit k, soit pour $k = g$ quel que soit x; ces deux hypothèses donnant dès lors séparément

$$0 = \varpi(0) + f(k) \qquad \text{ou} \qquad f(k) = -\varpi(0) = C',$$

et

$$0 = \varpi(x) + f(g) \qquad \text{ou} \qquad \varpi(x) = -f(g) = C'',$$

l'équation précédente (18) se réduit donc ainsi en réalité à celle-ci

$$I = J + C' + C'',$$

laquelle, se réduisant elle-même à $C' + C'' = 0$, quand on y fait à la fois $x = 0$, $k = g$, n'est autre, par conséquent, que $I = J$, c'est-à-dire précisément la formule (2) que nous nous proposions de démontrer directement par la seule différentiation.

On vérifierait de même, à l'aide d'un calcul analogue, mais beaucoup plus simple, les deux formules (4) et (4bis), si l'on n'aime mieux les déduire, comme cas-limite de celle que nous venons de démontrer, par le moyen de formules connues de la théorie des fonctions elliptiques.

Deuxième section.

—

Séance du mardi 27 avril 1897. — La section procède au renouvellement de son bureau; sont élus :

Président :	MM. Van der Mensbrugghe.
Vice-Présidents :	Maurice Delacre.
	Paul Henry.
Secrétaire :	L'abbé Coupé.

La section remet au bureau le choix de la question de concours.

M. Félix Leconte entretient l'assemblée *d'un procédé nouveau de renversement des cheminées d'usine.* Il propose l'usage du fil d'acier dit à triple torsion, employé maintenant pour le sciage mécanique des blocs de granit.

Il scierait ainsi obliquement un tronçon de cheminée qui viendrait s'abattre tout à côté de la portion restée debout.

M. Thiry présente des modèles réduits de deux de ses inventions. L'un de ces modèles représente un système de support du câble dans les chemins de fer aériens.

L'autre, une torpille remontante obéissant à une double action du courant électrique. Au premier contact la torpille, retenue au fond de l'eau, est dégagée, remonte pour s'accrocher aux flancs du navire ; au deuxième contact la torpille éclate.

M. Louis Henry, professeur à l'Université de Louvain, fait une communication *sur les alcools nitrés.*

M. Van der Mensbrugghe présente le travail suivant : *Étude sur l'influence exercée par un champ électrique sur un mince jet d'eau.*

1. A propos des effets de l'élasticité des liquides, j'ai signalé récemment (*) un fait observé pour la première fois par un constructeur à Épéries, en Hongrie, et qui a exercé depuis longtemps la sagacité des physiciens, à savoir qu'à l'approche d'un corps faiblement électrisé, un jet d'eau très effilé et dirigé de bas en haut cesse tout à coup de se résoudre en gouttelettes, demeure continu jusqu'au sommet, puis retombe jusqu'à l'orifice, pour se relever encore, et ainsi de suite. Ce phénomène a été attribué aux causes les plus diverses.

2. Par exemple, M. Fuchs (**) a admis d'abord que les gouttelettes séparées se tournent de manière à présenter les unes aux autres leurs parties chargées d'électricités contraires, et qu'elles se réunissent ensuite par l'attraction mutuelle de ces dernières.

La même année, il a changé d'avis; après s'être réfuté lui-même, il attribue la résolution en gouttes à l'adhésion entre

---

(*) *Sur les nombreux effets de l'élasticité des liquides* (BULL. DE L'ACAD. ROY. DE BELG., 3e série, t. XXVII, p. 270, 1896).

(**) *Ueber das Verhalten eines feinen Springsbrunnen innerhalb einer elektrischen Atmosphäre* (BULL. DE LA SOC. DES SCIENCES NATUR. DE PRESBURG, 1856).

l'orifice et le liquide; en effet, il trouve que si l'électricité n'agit que sur la portion inférieure du jet, celui-ci est continu, tandis qu'il ne l'est pas quand la partie supérieure de la veine est seule soumise à l'influence électrique. Fuchs a constaté de plus qu'avec un orifice en laiton mouillé d'huile, un petit jet abandonné à lui-même demeure continu dans toute sa longueur. Il conclut de là que l'influence électrique agit simplement en détruisant l'adhésion du liquide avec l'orifice. L'auteur fait toutefois ses réserves, « car, dit-il, les phénomènes sont les mêmes, que l'orifice soit pratiqué dans du métal ou dans du verre ».

3. En 1860, Reitlinger (*) réfute à son tour la première explication de Fuchs. Il soumet à l'action électrique soit directe, soit par influence, un petit jet d'un liquide non conducteur, l'essence de térébenthine; cette action ne modifie pas la résolution en gouttes.

L'auteur adopte la deuxième explication de Fuchs; seulement il admet la formation d'une couche gazeuse très mince, due à l'électrolyse de l'eau. Avec le mercure, le jet libre est continu; toutefois quand l'orifice est amalgamé, la veine se résout en gouttelettes, mais l'électricité n'agit en rien sur un jet de mercure discontinu.

4. En 1871, W. Beetz (**) déclare qu'il ne peut être question de la destruction de l'adhérence du liquide à l'orifice; « car, » dit-il, si pareil effet se produisait, on pourrait, par l'approche » d'un corps électrisé, faire changer la hauteur capillaire d'une » colonne liquide suspendue entre des parois de verre ou de » métal; or, cela est impossible ».

Il déclare de plus que, pour empêcher la continuité du jet, ce n'est pas l'orifice qu'il faut garantir contre l'influence électrique, mais bien la partie inférieure, déjà cohérente de la veine.

L'auteur réalise un jet dont la partie continue n'a que 3 centi-

---

(*) *Ueber die Entwickelung der Elektricität auf Springbrunnen* (SITZUNGSBER. DE L'ACAD. DE VIENNE, t. XXXIX, p. 390, 1860).

(**) *Ueber die Einwirkung der Elektricität auf Flussigkeiten* (ANN. DE POGG., t. CXLIV, p. 443).

mètres, et la hauteur totale 20 centimètres; l'orifice est très petit; une plaque en fer-blanc, percée au milieu d'une ouverture de 5 millimètres de diamètre, est disposée horizontalement et de manière que la veine passe à travers le trou; les gouttes retombent à côté du bord de l'écran, à cause de la légère obliquité de la veine. Un anneau en fil de fer, communiquant avec un conducteur isolé, entoure le jet; cet anneau est électrisé une fois pour toutes négativement. Si l'on abaisse l'écran de façon que l'extrémité de la partie cohérente se trouve au-dessus, tandis que l'anneau entoure le jet à une hauteur quelconque (par exemple à 12 centimètres au-dessus de l'orifice), la partie continue s'allonge. Si l'on élève l'écran de manière que cette dernière soit au-dessous, et se trouve dans l'ombre électrique, il n'y a aucun changement. Au contraire, la partie continue s'allonge de nouveau, dès que l'anneau est au-dessous de l'écran.

Avec le pétrole, il n'y a pas d'influence électrique; les choses se passent comme avec l'essence de térébenthine.

Voici l'explication proposée par le physicien allemand :

La couche extérieure de la partie continue se compose de particules d'eau qui, par frottement à l'orifice, ont subi des chocs excentriques; elles tournent par conséquent vers l'extérieur, et se séparent graduellement du noyau, afin de poursuivre leurs trajectoires paraboliques. Or, si la partie continue est électrisée par influence, l'électricité positive qui se trouve sur la surface est enlevée par les gouttes détachées; dès lors, les gouttes intérieures non électrisées sont entourées par d'autres gouttes électrisées, et celles-ci sont déviées de leurs trajectoires et rapprochées de l'axe; le jet ne devient pas entièrement continu; c'est à peine si l'extrémité de la partie cohérente s'élève un peu plus haut. Dès que l'action électrique devient trop forte, la répulsion mutuelle des gouttes l'emporte sur l'attraction vers l'axe, et le jet est éparpillé. L'action principale a lieu, non pas à l'orifice, mais à l'extrémité de la partie continue; on ne peut donc pas invoquer un changement d'adhésion sous l'influence de l'électricité.

Avec le mercure, Beetz n'a pu obtenir un jet nettement

divisé quand l'orifice était pratiqué dans du cuivre amalgamé. Il a pu constater qu'avec un orifice assez grand, la colonne est continue; avec un orifice suffisamment petit, le jet est discontinu même quand l'ajutage est en verre. Une veine sortant d'un orifice très petit était complètement discontinue presque à partir de l'orifice.

5. En 1872, Joseph Plateau (*) s'est demandé si l'électricité agit par elle-même pour s'opposer à la transformation spontanée du jet, c'est-à dire si, en se portant à la surface du liquide, le fluide électrique détermine une répulsion entre les molécules de la couche superficielle et diminue conséquemment les forces capillaires. A cet égard, il cite des expériences que j'avais faites pour prouver que l'électricité statique ne modifie nullement la tension des surfaces liquides. L'illustre physicien s'est même assuré, par des observations directes, que l'électricité ne change en rien le phénomène de la transformation d'un cylindre mince de mercure.

C'est pour ce motif que Plateau a admis avec Fuchs et Reitlinger que le fait de la continuité de la veine est dû à une destruction de l'adhésion du liquide au bord de l'orifice. Seulement, le physicien belge, qui sans doute ne connaissait pas le travail de Beetz, a attribué cette destruction à la répulsion mutuelle du liquide et du solide sous l'influence de l'électricité. Si le jet de mercure observé par Reitlinger est continu, c'est qu'il n'y a pas d'adhésion entre l'orifice et le liquide. De même, si, avec un orifice huilé, le jet ne se divise pas, c'est encore par défaut d'adhésion suffisante.

6. En 1874, M. Abendroth (**), après avoir exposé les résultats déjà obtenus, décrit ses propres expériences; il a opéré sur un jet à peu près vertical, sortant d'un orifice d'environ 1 millimètre de diamètre sous une pression de $1^m,30$; la hauteur du jet

---

(*) *Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires*, t. II, p. 446.

(**) *Ueber elektrisirte Flüssigkeitsstrahlen. Neue Versuche und Erklärungen* (PROGRAMM DES GYMNASIUMS ZUM HEILIGEN KREUZ, Dresden, 1874).

était de près de 1 mètre ; à l'aide d'un disque tournant muni de fentes, il a reconnu toujours trois parties distinctes : la première, d'environ 15 centimètres de longueur, est entièrement continue et montre de très faibles renflements et étranglements de plus en plus marqués vers le haut; la deuxième est constituée par une série de petites gouttes rondes, montant en ligne les unes derrière les autres, et montrant d'abord les attaches cylindriques; outre cette ligne de gouttes, formant la trajectoire principale de la veine, on voit des gouttelettes extrêmement fines et jaillissant latéralement parfois jusqu'à l'extrémité supérieure de la deuxième partie; dans la troisième, le liquide s'éparpille dans tous les sens.

Pour expliquer la production de ces trois parties distinctes, M. Abendroth invoque des mouvements vibratoires dus au frottement du liquide à l'orifice, ainsi que la transformation des cylindres liquides démontrée par Joseph Plateau, dans les veines descendantes; abordant ensuite les effets de l'électricité sur un jet ascendant, il en distingue trois principaux; en premier lieu, la contraction de la veine, consistant en ce que les gouttelettes latérales et celles qui s'éparpillent vers le haut se réunissent en un ensemble cohérent; le deuxième effet, déjà connu depuis Désaguliers, c'est l'attraction de la veine entière par un corps électrisé ; enfin le troisième, déjà signalé par Gordon et Nollet, n'est autre que l'éparpillement de la partie supérieure de la veine en gouttelettes très fines et fort nombreuses.

Abendroth estime que les deux derniers effets s'expliquent aisément; car, dit-il, tout corps très mobile, bon ou mauvais conducteur, est attiré par un corps électrisé, ce qui rend compte du phénomène de Désaguliers; quant à l'éparpillement général, l'auteur l'attribue à la répulsion mutuelle des gouttelettes chargées toutes de la même électricité.

Enfin, pour rendre compte de la réunion des différentes séries de gouttelettes en un tout cohérent jusqu'en haut, Abendroth pense que l'adhésion à l'orifice produit des rotations dans la partie continue, lesquelles persistent dans les gouttes déjà détachées; par l'influence électrique, ces rotations cesseraient

et les gouttes seraient attirées entre elles grâce à leur polarité opposée. Je dois reconnaître ici que je n'ai pas bien compris cette partie du travail du savant allemand.

7. Malgré les expériences si nombreuses et si variées, la question n'était pas encore regardée comme résolue. En effet, en 1878, Lord Rayleigh (*) reprend l'étude du phénomène : il admet que le jet suffisamment mince se transforme en gouttelettes conformément à la loi classique de Plateau; d'après le physicien anglais, les gouttes, au moment où elles se séparent entre elles, sont poussées les unes contre les autres par l'élasticité de la couche superficielle, et aussi par suite du retard des gouttes supérieures par rapport à celles qui les suivent; bien que lancées les unes contre les autres, au lieu de se réunir, elles rebondissent, se séparent et tombent de toutes parts. Mais qu'on approche un bâton de cire à cacheter faiblement électrisé, et aussitôt les gouttes s'attirent entre elles avec une force suffisante pour briser la couche d'air intermédiaire et pour opérer leur réunion.

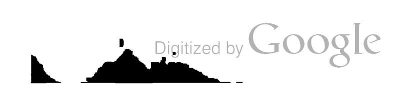
A l'appui de cette explication, Lord Rayleigh cite l'expérience de deux jets dont l'un est coloré en rouge, l'autre incolore, et qui se rencontrent sous un très petit angle : au lieu de se réunir, l'un des jets rebondit sur l'autre; mais à l'instant où s'exerce une faible influence électrique, les deux jets se rejoignent sans se séparer.

Le physicien anglais trouve encore qu'une goutte de lait dans 30 grammes d'eau pure suffit pour empêcher l'éparpillement du jet; le mercure ne se sépare pas non plus, même lorsqu'il passe à travers une ouverture amalgamée dans une plaque de laiton, l'orifice ayant $1^{mm},2$ de diamètre.

D'après M. Bidwell, il suffit de passer une flamme fumeuse à travers un jet d'eau qui s'éparpille pour le rendre continu. M. Boys (**), qui rappelle le fait, ne l'explique pas davantage.

(*) *The influence of electricity on colliding drops* (PHILOS. MAGAZ, t. XXVIII, p. 406). Voir aussi : *Further Observations upon liquid Jets* (PROCEED. OF THE ROY. SOC. OF LONDON, t. XXXIV, p. 130, 1882).

(**) *Soap-bubbles and the Forces which mould them*, London, p. 100, 1890.



Lord Rayleigh déclare que si l'eau jaillit par un orifice de $0^{mm},25$ à $0^{mm},3$ de diamètre, la division ne peut plus être empêchée par une influence électrique ; c'est qu'alors, dit-il, les répulsions électriques deviennent trop fortes pour permettre la réunion.

8. Le petit historique qui précède nous permet de conclure que l'effet produit par un faible champ électrique sur une veine liquide mince a été attribué à des causes bien différentes. Parmi les physiciens qui se sont occupés de la question, les uns ont invoqué spécialement l'adhésion plus ou moins grande à l'orifice; les autres, au contraire, se sont attachés à l'examen des phénomènes qui se passent dans la portion du jet déjà réduite en gouttelettes séparées, mais personne, à ma connaissance, n'a recherché l'effet des réactions dues à l'élasticité du liquide et développées dans la partie continue de la veine; n'est-ce pas un résultat inévitable de l'habitude si fortement enracinée de regarder les liquides comme incompressibles? Si je ne me trompe, c'est seulement après avoir étudié les réactions dont il s'agit, que l'on peut émettre une opinion quant à l'effet probable de l'électricité sur une veine liquide ascendante.

9. Pour plus de clarté, rappelons d'abord que, dans un vase contenant du liquide à une hauteur h au-dessus de l'orifice o par où, à un moment donné, on veut faire jaillir le jet ascendant, les pressions dues aux couches horizontales successives, réparties sur la hauteur h, iront en croissant depuis le niveau jusqu'à la tranche horizontale passant par o. Or, à ces pressions croissantes correspondent nécessairement des degrés de plus en plus marqués de compression, et par conséquent aussi des forces élastiques de plus en plus grandes. Il suit de là que si l'on ouvre l'orifice, le liquide jaillira en vertu de la force élastique appartenant à la tranche horizontale qui passe par l'ouverture.

Voyons maintenant comment doit varier la force élastique dans la veine liquide ascendante, en faisant abstraction de la résistance de l'air. Aussitôt que les premiers éléments liquides arrivent à l'air libre, ils perdent l'excès de force élastique dû aux pressions développées dans le vase. Mais poursuivons ces éléments dans leur marche ascensionnelle.

Soient t, $t + \Delta t$ les temps écoulés depuis que deux particules de la veine ont quitté l'orifice; pour évaluer leur distance à ce moment précis, il suffit évidemment de prendre la différence entre les deux espaces parcourus; si a est la vitesse à l'orifice, on aura pour cette distance :

$$a(t + \Delta t) - \frac{g}{2}(t + \Delta t)^2 - \left(at - \frac{g}{2}t^2\right) = \Delta t \left\{ a - \frac{g}{2}(2t + \Delta t) \right\}.$$

Pendant l'intervalle suivant Δt, elle deviendra

$$\Delta t \left\{ a - \frac{g}{2}(2t + 3\Delta t) \right\};$$

elle a donc diminué de la quantité $g\overline{\Delta t}^2$. On voit que cette diminution est la même pour deux points quelconques sortis l'un Δt secondes avant l'autre.

Cela posé, faisons successivement $t = 0$, Δt, $2\Delta t$, ... $n\Delta t$; nous aurons pour les distances δ_0, δ_1, ... δ_{n+1} correspondantes aux temps 0, Δt, ... $n\Delta t$:

$$\delta_0 = \Delta t \left(a - \frac{g}{2}\Delta t\right), \qquad \delta_1 = \Delta t \left(a - \frac{3g}{2}\Delta t\right), \ldots$$

$$\delta_n = \Delta t \left(a - \frac{2n + 1}{2} g\Delta t\right).$$

Nous pouvons conclure de là qu'au bout de n intervalles de temps égaux à Δt, l'unité de longueur prise au départ sera réduite à

$$\frac{a - \dfrac{2n + 1}{2} g\Delta t}{a - \dfrac{g}{2}\Delta t}.$$

Ce calcul montre clairement que grâce à l'action de la pesanteur, l'unité de longueur initiale de chaque filet vertical du jet va

constamment en diminuant, et tend théoriquement à s'annuler au moment où $\frac{2n+1}{2}g\Delta t$ devient égal à la vitesse de sortie a. Comme le phénomène se passe en une très petite fraction de seconde, nous devons déduire de ce qui précède que, dans tous les filets verticaux, il se produit une compression croissante et, par conséquent, une force élastique augmentant de plus en plus dans un temps extrêmement court.

10. Mais il y a encore une autre force qui développe un accroissement continu de la force élastique au sein de la petite colonne ascendante. En effet, les premières portions liquides qui sortent de l'orifice circulaire se disposent évidemment de manière à dessiner un petit cylindre terminé en haut par une calotte sphérique convexe; or, tous les éléments du petit cylindre sont entourés d'une couche terminale extrêmement mince et soumise à la force contractile T qui caractérise le liquide employé (par millimètre de longueur, T est égal à $7^{mgr},5$ pour l'eau pure, à $3^{mgr},6$ pour l'huile d'olive, etc.). Or, cette tension agira sur la force élastique de la colonne de deux manières différentes.

Et d'abord, puisque l'orifice est nécessairement immobile, la couche superficielle ne peut tendre à se contracter que du haut vers le bas; la force contractile doit donc agir comme force retardatrice et faire naître dans les portions voisines de petits retards consécutifs d'autant plus nombreux que ces portions sont arrivées plus haut; or, la succession rapide de ces retards donnera lieu à une compression spéciale du liquide et par conséquent à une augmentation graduelle de la force élastique.

Quant à la deuxième façon d'agir de la tension superficielle, rappelons que cette force fait naître sur chaque unité de surface courbe une pression égale à $T\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)$, R et R′ étant les rayons de courbure principaux de la surface aux points considérés. Au sommet de la colonne, cette pression est égale $\frac{2T}{r}$, r étant à un moment donné le rayon de la calotte sphérique; en outre, elle est dirigée vers l'intérieur du liquide, c'est-à-dire de haut en bas. D'autre part, tout le long de la surface latérale du jet règne sur chaque unité de surface une pression capillaire $\frac{T}{r_1}$, r_1 étant

le rayon de la section droite considérée; cette pression est aussi dirigée partout vers l'intérieur du liquide.

Par la double action de la tension superficielle, il doit donc aussi se produire en un temps très court une compression croissante vers le haut, et d'autant plus forte que l'orifice est plus petit.

11. Les raisonnements qui précèdent font voir sans peine que, si la veine liquide est suffisamment mince, l'accroissement de force élastique développé par l'action combinée de la pesanteur et de la tension superficielle deviendra presque instantanément très marqué, et cela bien avant que le liquide ait pu atteindre le haut de sa course; les parties de la colonne où la compression s'est le plus accentuée, ne pourront demeurer plus longtemps continues; car la force élastique, jointe au reste de vitesse non encore compensé par l'action de la pesanteur, sera devenue subitement plus que suffisante pour vaincre la pression capillaire; il se détachera nécessairement alors des gouttes en un ou plusieurs points de la surface latérale; comme le liquide afflue sans cesse dans un état de compression soudaine, le phénomène de projection des gouttes aura lieu sans interruption; il s'ensuit que le jet sera composé nécessairement d'une partie continue et d'une gerbe de gouttelettes lancées plus haut et dessinant des trajectoires orientées d'une façon irrégulière autour de l'axe de la veine.

La cause de la discontinuité de la veine ascendante réside-t-elle réellement dans la compression trop forte du liquide dans certaines portions du jet? S'il en est ainsi, il faudra que tous les moyens propres à diminuer cette compression aient pour effet de retarder ou même d'empêcher l'éparpillement du liquide; cette remarque nous engage à soumettre la théorie précédente à des vérifications aussi variées que possible.

A. *Influence de la tension superficielle du liquide.*

12. J'ai réalisé un jet d'eau à fort peu près vertical, ayant une hauteur totale de 40 centimètres, et sortant d'un orifice d'envi-

ron 1 millimètre de diamètre, sous la pression de 70 centimètres. Le jet était composé d'une partie continue d'environ 20 centimètres de longueur et d'une partie plus ou moins discontinue; sur la partie latérale, au-dessus de la partie continue, se produisaient des jets très minces et discontinus; plus haut encore la veine s'épanouissait en une gerbe de gouttelettes orientées dans tous les sens.

J'ai voulu opérer ensuite avec l'alcool ordinaire dont la tension superficielle est environ trois fois moindre que celle de l'eau pure; si je ne pouvais diminuer ainsi l'influence de la pesanteur sur la compression du liquide, j'espérais du moins faire décroître sensiblement l'effet dû à la force contractile; effectivement, j'ai constaté que dans les conditions ci-dessus, la partie continue avait plus de 26 centimètres de longueur (6 de plus qu'avec l'eau); à partir de là commençait la discontinuité latérale; plus haut avait lieu l'éparpillement en gouttelettes.

Si l'orifice n'a qu'un diamètre inférieur à $0^{mm},4$, les compressions dues aux forces capillaires deviennent tellement considérables que le jet d'eau pure est toujours discontinu, et cela à partir d'une très petite distance à l'orifice; par exemple, si l'ouverture n'a que $0^{mm},25$, la pression latérale par millimètre carré est de 60 milligrammes; une pareille pression, combinée avec le retard dû à la pesanteur et à la force retardatrice de la tension superficielle, ne peut manquer de donner lieu à une gerbe de gouttelettes dans le voisinage même de l'orifice.

Si l'on a soin d'enduire d'huile un orifice de 1 millimètre environ de diamètre, pendant que le jet d'eau pure manifeste les phénomènes d'éparpillement décrits plus haut, à l'instant même la veine paraît cohérente dans toute son étendue; c'est que dans le cas actuel la tension a été réduite dans le rapport de 7,5 à 5 environ, et que la gaine d'huile, grâce à sa viscosité, permet l'élargissement de la section droite de la veine; ainsi l'éparpillement latéral se trouve empêché.

C'est ce qui explique également l'effet observé par Bidwell, en passant une lampe fumeuse à travers la veine, et par Lord Rayleigh, en ajoutant quelques gouttes de lait à l'eau du jet.

B. *Action d'un faible champ électrique.*

13. Une deuxième manière de diminuer la compression du liquide dans un jet d'eau de très petit diamètre consiste, selon moi, à électriser faiblement la partie continue de la veine.

A ce propos, je rappellerai qu'en 1875 (*), j'ai démontré que l'électricité statique n'influe pas directement sur la tension superficielle des liquides bons conducteurs. Cela n'est pas étonnant, car la couche liquide libre, où siège la tension, est d'une minceur extrême, et de plus est elle-même un bon conducteur; or, le fluide électrique se distribue toujours dans une couche extérieure au corps et se répartit dans le diélectrique ambiant (air sec, verre, ébonite, etc.). D'autre part, on sait que les molécules du diélectrique électrisé se repoussent d'autant plus fortement qu'elles sont moins écartées entre elles.

Il suit de là que si l'on électrise par influence le cylindre limité par une veine d'eau très mince, le fluide électrique sera distribué sur une portion de la gaine cylindrique d'air qui entoure le jet. Cela étant, nous avons vu plus haut que les différents filets verticaux de la veine tendent à se ramasser sur eux-mêmes, et par conséquent à élargir la section transversale du cylindre; c'est, nous l'avons vu, cette tendance trop rapide due à l'action combinée de la pesanteur et de la force contractante, qui développe subitement une réaction élastique capable d'éparpiller graduellement la veine.

Si donc on peut faciliter d'une manière quelconque l'accroissement des sections transversales, bien entendu entre certaines limites, la réaction due à l'élasticité deviendra moins intense, et le liquide ne s'éparpillera pas. Or, la portion électrisée de la gaine très mince entourant le jet, tend précisément à s'élargir en vertu des répulsions électriques; il paraît rationnel d'en conclure que cette répulsion doit favoriser l'accroissement de la

(*) *L'électricité statique exerce-t-elle une influence sur la tension superficielle d'un liquide?* (MÉM. IN-4° DES SAV. ÉTR. DE L'ACAD. ROY. DE BELG., t. XL, 1875).

section transversale du jet, et par suite maintenir la cohérence de celui-ci, ainsi que l'expérience permet de le constater.

L'accroissement de section de la veine doit être très faible, puisque la compression du liquide est elle-même très peu marquée; aussi, dès qu'on approche trop le corps inducteur, les répulsions électriques favorisent au contraire l'éparpillement du liquide, comme nous l'avons vu précédemment.

14. Si l'explication que je propose est vraie, il faudra que l'électricité ne produise aucun effet si le jet est formé par un liquide mauvais conducteur, comme le pétrole, l'essence de térébenthine, car alors il ne se formera pas de gaine électrisée régulièrement.

De plus, si le jet est formé par un liquide bon conducteur, mais très dense, tel que le mercure, l'électricité demeurera sans effet si le jet se divise, car le liquide opposera trop de résistance à l'accroissement convenable des sections transversales.

Enfin, si l'orifice n'a qu'une fraction très petite de millimètre de diamètre, l'eau elle-même donnera toujours un jet discontinu, malgré l'action de l'électricité; celle-ci demeurerait encore sans effet, si le jet avait un diamètre supérieur à 4 millimètres.

Les diverses conséquences que je viens de signaler sont parfaitement conformes à l'observation.

On le voit, l'explication que je propose rend compte à la fois de la transformation du jet et du maintien de sa forme nouvelle sous l'influence de l'électricité.

Quant à l'expérience de lord Rayleigh consistant à faire rebondir un jet liquide sur un autre, elle s'explique sans peine d'après ce qui précède : en effet, j'ai constaté que pour qu'elle réussisse le mieux, il convient de faire rejaillir l'un sur l'autre deux jets ascendants faisant entre eux un très petit angle; dès lors, l'approche d'un corps électrisé opère immédiatement leur réunion; cela ne doit pas nous surprendre, si nous nous rappelons que le liquide est comprimé dans deux jets ascendants et que le fluide électrique tend à élargir la section de chacun d'eux; de cette manière la compression est diminuée, et les deux jets n'en font plus qu'un seul. Cette explication me paraît suffisante même

dans le cas de deux veines descendantes, puisque aux points où s'opère le choc, il y a nécessairement une compression notable du liquide.

C. *Action d'une boule creuse soutenue par un jet d'eau.*

15. Pour soumettre ma théorie à un troisième genre d'épreuves, j'ai répété une expérience bien connue, consistant à introduire dans un jet d'eau vertical une boule creuse très légère (celle dont je me suis servi pesait environ 1^{gr},75 et avait un diamètre de 27 millimètres). On sait que la boule demeure soutenue par le jet, en exécutant des mouvements plus ou moins prononcés de va-et-vient suivant la verticale; l'orifice avait environ 2 millimètres; je ne pouvais pas en employer de plus étroit, car alors la boule n'était plus soutenue.

La charge était assez grande pour maintenir la boule à une hauteur moyenne de 40 centimètres au-dessus du jet; or, j'ai constaté que, dans ces conditions, la veine ne donnait pas de gerbes liquides latérales dans la partie inférieure à la boule. Au contraire, dès que j'enlevais celle-ci, les gerbes de gouttelettes latérales se montraient aussitôt. J'en ai conclu que la boule empêche la compression trop grande du liquide au-dessous d'elle; cela se conçoit, car le liquide doit s'épanouir sans cesse pour mouiller la surface inférieure de la boule et pouvoir s'échapper autour de cette dernière; dès lors, il ne peut acquérir le degré de compression nécessaire pour produire un éparpillement plus ou moins prononcé dans le sens latéral.

Conclusions.

16. Le travail précédent montre bien, selon moi, qu'on ne peut étudier avec fruit les mouvements des liquides, si l'on regarde *a priori* ces derniers comme incompressibles; sans doute, il est exact de dire que des forces considérables ne produisent qu'une très petite diminution du volume d'un liquide; mais on n'est nullement en droit, pour cela, de négliger les réactions

élastiques développées par des diminutions de volume pour ainsi dire insensibles; c'est pour n'avoir pas tenu compte de ces réactions que les physiciens ont été pendant si longtemps embarrassés quand il s'agissait de faire découler des actions moléculaires la force contractile d'un liquide quelconque.

Une autre conséquence à tirer des considérations développées plus haut, c'est que la tension superficielle constitue une force retardatrice très efficace pour empêcher un jet d'eau d'atteindre la hauteur théorique; généralement, on n'ose invoquer à cet égard que la résistance de l'air, résistance dont on exagère sans doute l'effet.

Le R. P. Lucas entretient l'assemblée des modifications récentes apportées dans la construction des interrupteurs des bobines de Ruhmkorff. Sa communication paraîtra dans la *Revue des questions scientifiques.*

Les membres de la section passent ensuite dans une salle transformée en chambre obscure, où se trouvent installés tous les appareils nécessaires à la production et aux applications les plus intéressantes des rayons X, et assistent aux expériences que veut bien reproduire devant eux le R. P. Lucas.

Troisième section.

—

Séance du mardi 27 avril 1897. — La section vote le maintien au concours de la question proposée en 1896.

Il est donné lecture d'un mémoire de M. J.-H. Fabre sur les *Nécrophores.* La section propose la publication de ce mémoire dans la *Revue des questions scientifiques* (voir livraison de juillet 1897).

M. F. Meunier continue son travail sur *Les chasses diptériologiques aux environs de Bruxelles,* deuxième partie : Syrphidae, Leptidae, Bombylidae.

Puis il entretient la section des formes hyménoptérologiques et diptérologiques de la Bulgarie septentrionale. L'auteur signale, au cours de sa causerie, la belle collection d'orchidées du frère Albert, de l'école catholique de Sofia. A propos d'une observation de M. le marquis de Trazegnies et du R. P. Van den Gheyn, M. Meunier fait remarquer que les hyménoptères de la Bulgarie sont en nombre considérable et qu'elles constituent, non pas de multiples variétés, mais de multiples espèces. Il y a des espèces propres au Nord, à l'Orient (Roumanie), à l'Asie (Indes, etc.). Cela ne doit pas étonner, car les espèces s'adaptent à tous les climats et deviennent par le fait cosmopolites.

Le R. P. Bolsius et M. l'abbé Meunier sont nommés commissaires pour examiner les travaux de M. F. Meunier.

Le partage politique de l'Afrique fait l'objet de la communication suivante de M. le capitaine Van Ortroy :

La carte d'Afrique s'est métamorphosée depuis un quart de siècle. Aux grands blancs est venue se substituer une rare richesse de détails, et les nombreux petits potentats ont fait place à des gouvernements réguliers, sur lesquels la civilisation peut fonder les espérances les plus légitimes.

Si nous exceptons les États et les tributs indigènes sans principe gouvernemental bien défini, deux catégories d'États bien distincts se partagent le continent africain.

D'un côté, quelques gouvernements autochtones bien assis, admis au rang d'États souverains : Égypte, Tripolitaine, Tunisie, Maroc, République de Libéria, État libre d'Orange, République sud-africaine, Éthiopie, Zanzibar. De l'autre, huit puissances européennes qui se sont réellement lancées à l'assaut de l'Afrique et en poursuivent le morcellement : Allemagne, Espagne, État indépendant du Congo, France, Grande-Bretagne, Italie, Portugal, Turquie.

L'Allemagne possède quatre groupes de territoires ou colonies : dans l'Afrique orientale, dans l'Afrique sud-occidentale, au Cameroun et au Togo.

La part de la couronne de Castille n'est pas considérable : outre quelques iles et des présides au Maroc, elle est établie sur la côte du Sahara et dispute à la France les rives de la rivière Muni.

On connait le vaste bloc formé par l'État du Congo; il débouche à la côte de l'Atlantique par un étroit mais important couloir.

Le récent échec de l'Italie réduit considérablement son domaine africain. Il lui restera une bande le long de la mer Rouge et l'Hinterland de la ligne de côtes de l'Océan Indien, au nord du Djuba.

L'Égypte et la Tripolitaine sont tributaires de la Turquie, mais l'Angleterre est bien puissante au Caire.

Madère, les Açores, les iles du Cap Vert, une enclave en Guinée, une autre au nord, proche du Congo et surtout les provinces d'Angola et de Mozambique constituent le lot, fort enviable, du Portugal.

Il nous reste à mentionner les deux colosses africains : la République française et la Grande-Bretagne. Elles se sont préparé toutes les deux un immense domaine. A l'Angleterre appartiennent la Gambie, Sierra Leone, la colonie de la Côte-d'Or, Lagos et les territoires de la Royal Niger Company, la colonie du Cap et ses accroissements jusqu'au Tanganika; enfin, pour l'Afrique orientale, les États du Sultan de Zanzibar, l'East Africa Protectorate, l'Ouganda et une enclave à la côte somalienne. Nous mentionnons l'Égypte pour mémoire.

La France est établie au Congo et bien près du Tchad, à Madagascar, au golfe de Tadjourah, en Tunisie, en Algérie, au Sénégal, au Soudan, et a pied sur la Côte-d'Ivoire et sur la Côte des Esclaves.

Si l'on excepte l'Afrique du nord-est, le partage du continent noir est presque achevé. On peut même prévoir que, grâce au réglement des affaires d'Égypte, nos cartes ne tarderont pas à prendre, au point de vue politique bien entendu, leur physionomie définitive. Ce sera le couronnement de la période de tâtonnements. Doit maintenant succéder la conquête *méthodique*

du sol et des habitants, si l'on veut que l'Afrique prenne ses envolées puissantes, fécondes et pacifiques, et participe ainsi à l'œuvre civilisatrice commune.

Séance du mercredi 28 avril 1897. — Le R. P. Bolsius, S. J., professeur au collège d'Oudenbosch (Hollande), présente à la section un petit instrument de son invention, destiné à être appliqué aux microscopes, pour faciliter les recherches micrographiques. Il propose de l'appeler *chariot universel,* pour les raisons suivantes :

1° Le *chariot universel* est construit de manière à s'adapter à *toute espèce* de statif, avec platine soit circulaire, soit carrée, soit oblongue. La largeur de la platine peut varier de 6 à 12 centimètres et plus. La profondeur, du centre à la tige du statif, peut être aussi grande qu'on veut, mais ne doit pas descendre au-dessous de 4 centimètres;

2° Le *chariot universel* a un mouvement si étendu qu'il permet de parcourir *d'un bout à l'autre* les porte-objet anglais;

3° Le *chariot universel* permet d'inscrire la place d'un objet ou d'un détail par la mesure *véritable* de ses distances *réelles* aux bords du porte-objet;

4° Le *chariot universel* peut se transporter d'un microscope à l'autre sans aucun changement de construction et *sans porter atteinte à l'exactitude des indications.*

Le R. P. fait la démonstration de son instrument, qu'il exposera à la section scientifique de l'Exposition internationale de Bruxelles, avec nombre de préparations contenant les détails des planches de quelques-uns de ses mémoires. A l'occasion, il démontrera là aussi, à ses collègues, les avantages de ce système de chariot.

Le mémoire de l'auteur est renvoyé à l'examen du R. P. Hahn

M. Proost, directeur général de l'Agriculture, soulève une question biologique dont l'examen est intéressant.

Dans le numéro du 20 avril 1897 de la *Revue des questions scientifiques,* page 408, dit-il, M. le Dr Surbled cite un passage

de Béclard déclarant que jamais on n'a pu fournir la preuve que le système lymphatique fût plus développé chez les individus qu'on désignait autrefois sous le nom de lymphatiques.

M'étant occupé jadis de faire des analyses optiques du sang, j'ai eu l'occasion de constater à plusieurs reprises un fait intéressant qui se rattache étroitement à la solution du problème soulevé par M. Surbled.

C'est d'abord la proportion moindre, toutes choses égales d'ailleurs, de globules rouges chez trois enfants d'un tempérament lymphatique, et l'augmentation sensible de ces globules en peu de semaines par l'exercice au grand air. Cette observation, dont les résultats étaient faciles à prévoir, me suggéra l'idée d'examiner régulièrement le sang d'une personne adulte présentant tous les caractères du tempérament en question, mais jouissant cependant d'une excellente santé. L'analyse optique, après un séjour à la campagne de trois mois et un traitement physique régulier, permit de constater aussi une augmentation sensible dans le nombre des globules rouges, absolument comme chez les enfants. J'en conclus qu'il serait facile de rétablir le rapport normal entre cet élément respiratoire du sang et les *leucocytes* ou globules blancs par une hygiène rationnelle et, peut-être, de modifier radicalement le tempérament, en s'y prenant d'assez bonne heure. Il est en effet indiscutable que, dès que la proportion des globules rouges diminue dans le sang, la vitalité diminue en raison directe du ralentissement de la combustion organique. Ce sont là des indications qu'il nous paraît utile de signaler à tous ceux qui s'occupent à un titre quelconque de l'éducation de l'homme.

Le R. P. Schmitz, S. J., directeur du Musée géologique des bassins houillers belges, fait part à la section de la découverte d'un nouveau banc à troncs-debout. Il doit cette intéressante trouvaille à M. A. Briart, membre de l'Académie royale de Belgique, et à MM. Edm. Briart et Mausy, ingénieurs aux charbonnages de Bascoup, à Chapelle lez-Herlaimont.

Il a observé ce gisement, en compagnie de M. le chanoine

de Dorlodot, au siège de Sainte-Catherine, à la profondeur de 243 mètres. C'est un véritable amas de *calamites* que le bouveau (galerie) a traversé; les ouvriers prétendent en avoir compté plus de cent. Comme le charbonnage, que le P. Schmitz visitera prochainement, a eu l'obligeance de faire de nouvelles recherches, il se borne à exposer les quelques points déjà acquis.

Son intention est simplement de donner à la section la primeur de cette nouvelle, car il se propose de présenter le mémoire détaillé à l'Académie.

A la fin de la séance, le R. P. J. Van den Gheyn, S. J., bollandiste, conservateur à la section des manuscrits de la Bibliothèque royale de Bruxelles, fait l'intéressante communication suivante :

Le manuscrit batta de la Bibliothèque royale de Bruxelles.

Dans un fonds de réserve qui n'avait pas été dépouillé jusqu'à présent et dont j'ai inventorié naguère un certain nombre de pièces, la bibliothèque royale de Bruxelles possède un manuscrit batta, coté maintenant II, 1771. Les Battas ou Bataks sont une peuplade qui habite le nord de l'île de Sumatra.

Voici les renseignements que j'ai recueillis relativement à la façon dont ce manuscrit est entré à la bibliothèque de Bruxelles. Ce manuscrit fut rapporté en Belgique par un nommé Pierre-Louis Druz, soldat de la colonie expéditionnaire hollandaise dans le Haut-Sumatra, en 1878. Il avait été donné à Druz par un autre soldat mortellement blessé. A son passage à Charleroi, en mai 1883, Druz proposa à la bibliothèque royale l'acquisition de ce manuscrit, et le 13 juin 1883, le marché fut conclu pour la somme de vingt-cinq francs, sur l'avis favorable et le rapport émis à cet effet le 18 mai 1883 par M. Charles Ruelens, conservateur à la section des manuscrits (*).

L'acquisition n'était pas mauvaise, car les manuscrits battas

(*) Voir le dossier au secrétariat de a bibliothèque royale, indicateur, n° 3924 litt. O.

sont assez rares, du moins en Europe, où un petit nombre seulement de bibliothèques en possèdent.

Le manuscrit batta de Bruxelles est écrit sur une longue lanière d'écorce de bambou; quand on la déplie, elle a une longueur totale de 2m,60. C'est en effet l'usage constant de ce peuple, d'écrire, non pas sur des feuillets détachés, mais sur une lanière d'écorce à laquelle on laisse tout son développement. Un manuscrit conservé à l'Université de Kief mesure à peu près 6 mètres de long (*); un autre, décrit dans *Ausland*, a 11 pieds de longueur (**). Aussi je crois que le manuscrit de Bruxelles n'est plus entier et qu'il avait originairement une étendue plus considérable. La lanière de bambou est divisée par des plis en vingt-six feuillets. Aujourd'hui le manuscrit de Bruxelles est déchiré à peu près par le milieu; les deux fragments se composent chacun de douze et de quatorze feuillets.

Chaque feuillet a 10 $^1/_2$ centimètres de longueur sur 12 $^1/_2$ centimètres de largeur, et il y a en moyenne quinze lignes d'écriture sur chaque feuillet, sauf sur quelques-uns qui contiennent divers dessins très grossièrement exécutés, et dont le sujet est peu définissable.

A l'encontre de la plupart des manuscrits de l'Inde et de la Malaisie qui sont écrits à la pointe sur des feuillets détachés de palmier ou de latunier, le manuscrit batta est écrit à l'encre, une encre très noire et très épaisse. Toutefois, le procédé est ancien; aujourd'hui les Battas se conforment à l'usage général de tracer leurs caractères à la pointe. Aussi, à Sumatra même, les manuscrits à l'encre sont-ils devenus très rares; on les conserve comme des reliques et dans le pays on n'en trouve plus guère qu'à Tobah. Il est difficile d'assigner une date quelconque au manuscrit que possède la bibliothèque royale; toutefois, il ne saurait être antérieur au XVIe siècle, ni postérieur au XVIIe.

(*) Décrit par KOEPPEN, *Bulletin scientifique publié par l'Académie impériale des sciences de Saint-Pétersbourg*, t. VI, 1840, pp. 203 à 205. Cf. *Athenaeum*, 1838, p. 186.
(**) *Ausland*, 1838, p. 371.

Le manuscrit batta de la bibliothèque royale est très fatigué, il a été beaucoup manié; comme je le disais plus haut, il semble lacéré; en tous cas, il lui manque les deux planchettes qui servent ordinairement de couverture aux livres battas. Je n'ai pas fait déterminer l'espèce d'écorce sur laquelle est tracé le manuscrit de Bruxelles; c'est une écorce fibreuse. Le manuscrit de Kief est écrit sur l'écorce du *Daphne Gardneri*, et les planchettes qui gardent plusieurs autres manuscrits proviennent d'un *Meliacea*.

Le contenu du manuscrit batta de Bruxelles est, comme la plupart des manuscrits littéraires de ce peuple, assez peu intéressant; il renferme des recettes pour guérir des morsures, des blessures et d'autres accidents pathologiques.

La langue batta est aujourd'hui parfaitement connue, grâce surtout aux travaux de M. le Dr H.-N. van der Tuuk, qui résida pendant huit ans parmi les Battas. Il publia successivement les ouvrages suivants : *Over schrift en uitspraak der Tobasche taal* (1855); *Bataksch Leesboek*, en quatre volumes (1861-62); *Bataksch-Nederduitsch Woordenboek* (1861), et *Tobasche Spraakkunst* (1864-67). D'après M. van der Tuuk, le batta est apparenté de très près à l'ancien javanais et au tagal; toutefois, un philologue allemand rapproche cet idiome du malais propre (*).

L'écriture batta se lit de gauche à droite, mais on assure que les scribes tracent, comme les copistes syriens et mandchoux, leurs caractères de bas en haut. L'alphabet semble être d'origine indienne et se rattacher au type de l'alphabet pâli (**); en tout cas, la façon d'indiquer les voyelles est identique, sauf la délinéation des signes, au procédé de la langue sanscrite. C'est aussi un nom sanscrit, *pustaha*, que les manuscrits battas portent dans leur pays d'origine (***).

D'ailleurs, l'ensemble de la civilisation des Bataks démontre les intimes rapports qui les unissent avec l'Inde, dont ils sem-

---

(*) *Die Battas in ihrem Verhältniss zu den Malaien von Sumatra*, 1875.
(**) PLEYTE, *Bataksche Vertalingen*, Utrecht, 1894
(***) JUNGHUHNS, *Die Battaländer auf Sumatra*, 1847, t. II, p. 272.

blent provenir, comme bon nombre de peuples de la Malaisie (*).

Séance du jeudi 29 avril 1897. — La section procède d'abord au renouvellement de son Bureau pour l'année 1897-98. Sont élus, après deux tours de scrutin :

Président :	R. P. Bolsius.
Vice-Présidents :	MM. C. de Kirwan.
	le chanoine de Dorlodot.
Secrétaire :	le capitaine Van Ortroy.

M. l'abbé Bourgeat a adressé un travail intitulé : *Quelques mots sur le glaciaire du Jura dans la région comprise entre Saint-Claude et Salins*. Ce travail est renvoyé à l'examen de deux commissaires, MM. C.-L.-J. de la Vallée Poussin et le chanoine de Dorlodot, professeurs à l'Université de Louvain. En même temps, sur la proposition de M. l'abbé Maurice Lefebvre, la section émet le vœu qu'une esquisse soit jointe au mémoire de M. l'abbé Bourgeat.

Quatrième section.

Séance du mercredi 28 avril 1897. — M. Glorieux présente un malade atteint de paralysie faciale double. Cette affection est survenue à la suite d'un tamponnement de la tête entre deux wagons de chemin de fer. Le début en fut à peu près celui d'une fracture de la base du crâne. L'accident, survenu en 1889, laissa comme suite la paralysie faciale double qui existe encore aujourd'hui. L'absence d'atrophie musculaire et d'autres symptômes de lésions névritiques ou nucléaires a fait croire à M. Glorieux qu'il s'agit bien d'une nécrose traumatique, d'autant plus qu'il y a eu

(*) Sur les Bataks, on peut consulter surtout les ouvrages récents de MODIGLIANI, *Fra Battachi indipendente*, Roma, 1892; VON BRENNER, *Besuch bei den Kannibalen Sumaras*, Würzburg, 1894.

en même temps des troubles dépendant d'une dépression cérébrale. Notre confrère admet un pronostic relativement bénin, du moins en ce qui concerne la vie du malade. M. le Dr De Buck est du même avis. M. Cuylits, au contraire, croit à une lésion anatomique et appréhende des suites graves.

Le R. P. Lucas, de Namur, réalise ensuite des démonstrations radiographiques d'un très haut intérêt.

M. le Dr De Buck n'a pu, faute de temps, communiquer son travail annoncé *sur un cas d'hématomyélie spontanée.* Nous sommes heureux d'en donner néanmoins le résumé :

Un homme, atteint de dégénérescence athéromasique profonde de toutes les artères du corps, à la suite d'un effort énergique, se fait un mal intense dans la région dorso-lombaire. Le mal se localise surtout à gauche de la colonne vertébrale. Pas de perte de conscience, pas de paraplégie. Le médecin appelé diagnostique un lombago et applique un vésicatoire *loco dolenti.* L'homme, malgré sa douleur, continue d'exercer son métier de charpentier. Durant quatre semaines, il ne constate guère qu'une faiblesse dans les membres inférieurs et quelquefois des contractions douloureuses survenant la nuit.

La faiblesse des membres inférieurs augmente et, la quatrième semaine, il s'y ajoute des sensations paresthésiques, localisées surtout au niveau du genou gauche (la sensation de froid prédomine), et quelques douleurs en ceinture.

La sixième semaine, il est forcé de cesser le travail et entre à notre Institut, où nous trouvons les symptômes suivants : Homme maigre, à état général mauvais, athéromasique. La région sacrolombaire gauche est douloureuse à la pression, la droite, moins. Pas de sensibilité ni de raideur de la colonne. Atrophie musculaire aux deux membres inférieurs et autour du bassin, dans le domaine des nerfs crural, sciatique et obturateur. Parésie des mouvements correspondants, mais pas de paraplégie. Diminution très forte de la contractilité électrique, mais pas de réaction de dégénérescence. Sensibilité intacte dans ses divers modes. Pas de troubles des sphincters ni de la fonction génitale.

Réflexes cutanés (plantaire, crémastérien, abdominal, fessier) diminués ou abolis.

Réflexes tendineux : rotuliens abolis, réflexe du tendon d'Achille plutôt augmenté. On parvient à provoquer un certain clonus du pied.

De plus, forte irritabilité mécanique de tous les muscles des membres inférieurs, secousses fibrillaires, contractions mécaniques et électriques lentes et ondulatoires.

Élévations thermiques vespérales : 38°-39° C.

Urines : ni albumine ni sucre.

Tronc, membres supérieurs, cerveau : influencés par le mauvais état général, mais rien qui dénote un trouble nerveux spécial.

Le début brusque de l'affection médullaire chez un athéromasique nous a fait porter le diagnostic d'hématomyélie.

Cette hématomyélie est spontanée et centrale. Elle siège dans les segments d'origine des nerfs crural, sciatique et obturateur, donc dans les cinq segments lombaires et les deux ou trois premiers segments sacrés. Elle a épargné le cône médullaire, qui innerve les sphincters et les organes génitaux. Ce siège correspond à la région comprise entre la neuvième vertèbre dorsale et la première lombaire.

Voilà pour l'étendue verticale. Quant à l'étendue transversale, elle est remarquable en ce sens qu'elle n'entame que les cornes antérieures (neurones moteurs primaires) et probablement les cordons pyramidaux. L'atteinte de ces derniers peut être due à un processus myélitique secondaire, déterminé par l'épanchement.

Les cas d'hématomyélie centrale signalés par Minor et d'autres comportent presque tous une abolition, dès le début, de la motilité et de la sensibilité, et, ultérieurement, une évolution à caractères syringomyélitiques. Dans notre cas, l'épanchement, moins abondant et produit aux dépens d'un des vaisseaux antérieurs de la moelle, n'aurait pas dépassé les cornes antérieures. Il n'aurait pas été suffisant pour produire des troubles moteurs directs, mais bien pour amener postérieurement la dégénérescence de neurones moteurs primaires.

M. le Dr A. Delcroix, chef du service de chirurgie infantile et orthopédique à l'Institut chirurgical, présente la communication suivante sur le ***Traitement de la bosse du mal de Pott par la méthode de Calot :***

Notre sympathique Secrétaire a bien voulu me demander de parler ici d'un sujet tout d'actualité : le traitement du mal de Pott par la méthode de Calot; j'accède d'autant plus volontiers à son désir que, ayant eu l'occasion d'appliquer cette nouvelle méthode de traitement à bon nombre d'enfants atteints de mal vertébral, je deviens de plus en plus convaincu et de son innocuité et de son efficacité. A mon avis, c'est la seule méthode vraiment rationnelle de traitement du mal de Pott, tout comme l'immobilisation prolongée des articulations tuberculeuses des membres, après correction des attitudes vicieuses de ces derniers, si elles existent déjà, est la méthode de choix pour le traitement des tumeurs blanches.

Procédons par comparaison et prenons, par exemple, la tumeur blanche du genou, où les indications thérapeutiques sont précises : A quelque période que soit arrivée la lésion, qu'il y ait ou non suppuration, il faut maintenir ou ramener le membre inférieur en bonne position, c'est-à-dire mettre la jambe en extension sur la cuisse et immobiliser ensuite non seulement le genou malade, mais encore les articulations qui se trouvent immédiatement au-dessus et au-dessous du genou atteint.

Le traitement préconisé par Calot pour combattre le mal de Pott est basé sur le même principe. Lorsque l'affection est au début, on immobilise par un grand appareil plâtré le segment rachidien malade et les articulations situées au-dessus et au-dessous de ce dernier, jusques et y compris, d'une part, la tête et, d'autre part, le bassin. Mais il faut, au préalable, avoir placé la colonne vertébrale en hyperextension.

Si déjà la colonne vertébrale est incurvée en arrière, il est nécessaire de réduire la gibbosité aussitôt que possible et, la réduction obtenue, on immobilise comme dans le cas précédent.

Vous connaissez la technique opératoire du redressement d'une gibbosité. L'enfant, anesthésié, est retourné sur le ventre :

un aide ayant saisi la tête, un second les cuisses, ils exercent les tractions en sens inverse suivant la longueur du rachis; deux autres aides repoussent en haut et en dehors, l'un les clavicules et le sternum, l'autre le bassin ou la colonne lombaire, tandis que l'opérateur, par des pesées bien graduées, abaisse au niveau des autres vertèbres les vertèbres déplacées. Pendant ce temps de l'opération, des craquements perceptibles par la main et parfois audibles à l'oreille indiquent le désengrènement, le glissement des vertèbres les unes sur les autres. Ces manœuvres corrigent non seulement la gibbosité, mais également la scoliose qui accompagne ordinairement celle-ci.

La colonne vertébrale, bien redressée, est maintenue ensuite en hyperextension par un grand appareil plâtré, circulaire, enveloppant le bassin, le ventre, la poitrine et la tête. Cet appareil doit rester en place trois, six et même dix mois, suivant le cas.

On a fait au redressement brusque de la gibbosité de graves reproches; reproches, j'ai hâte de l'affirmer, bien immérités. La correction de la gibbosité, a-t-on dit, ne peut être obtenue qu'au prix d'une fracture de la colonne vertébrale, ce qui est vrai; et, ajoute-t-on, la moelle épinière est ainsi exposée au danger de compression, de lésion par des esquilles, ce qui est une erreur. Si nous nous rappelons le mode de production des fractures de la colonne vertébrale, nous savons que les fractures par causes directes, très rares, intéressent surtout les parties postérieures des vertèbres, tandis que les fractures, par causes indirectes, de beaucoup les plus fréquentes, ont pour siège les parties antérieures des vertèbres, les corps vertébraux. Dans ces derniers cas, il se produit ordinairement une *flexion forcée* de la colonne vertébrale; les corps vertébraux se brisent, leurs fragments se déplacent forcément en arrière et viennent comprimer ou déchirer la moelle épinière. Pareils accidents ne sont guère à craindre dans le redressement d'un bossu. Les lames vertébrales, rarement atteintes dans cette affection, ne se brisent pas; ce qui doit se rompre, ce sont les brides osseuses de nouvelle formation occupant les parties malades de la vertèbre, les corps vertébraux. C'est ce qui arrive en effet, mais de telle façon que la moelle

n'en est ni comprimée ni lésée, car la fracture se produit ici, la colonne étant, non pas *en flexion* comme dans les fractures par causes accidentelles, mais *en extension*. Toutes les manœuvres des assistants et de l'opérateur lui-même concourent à obtenir l'hyperextension du rachis, de telle sorte que, s'il existe des fragments, ceux-ci ne sont plus forcés de chevaucher en arrière. Ceci est tellement vrai que, jusqu'à présent, on n'a vu, à la suite de l'opération du redressement, aucun signe de compression de la moelle. Jamais on n'a observé ni troubles de la motilité ni troubles de la sensibilité; les selles et les urines ont continué à être émises volontairement. Et cependant le nombre de ces opérations est actuellement considérable. Le 20 mars dernier, Calot avait opéré plus de cent trente enfants atteints du mal de Pott; Redard, le chirurgien du dispensaire Furtado-Hein de Paris, que j'ai eu le plaisir de retrouver à Berck, avait, à cette date, redressé une douzaine d'enfants; moi-même j'ai pratiqué, avec succès, quinze fois cette opération. Voilà donc, à ma connaissance, cent soixante opérations de redressement sans qu'une seule fois des troubles dénotant une lésion de la moelle se soient produits. Il est donc permis d'affirmer que le premier temps de l'opération expose à peu de danger.

Arrivons au second temps de l'opération. L'application de l'appareil plâtré est très difficile et expose à des complications s'il exerce des pressions trop fortes en certains points du corps. Calot a vu de la parésie se produire quelques jours après un redressement; le relâchement de l'appareil plâtré au niveau du segment rachidien comprimé a amené rapidement la disparition de la paralysie.

L'escarre est un accident plus fréquent. Chez un petit garçon, nous avons eu une escarre de la mâchoire; chez une autre enfant, une escarre de la partie postérieure de la tête : ces accidents disparaissent d'ailleurs assez vite et sans laisser de traces.

Mais le traitement est-il efficace? Les résultats immédiats de l'intervention sont de nature à satisfaire les plus difficiles. Chez mes petits opérés, j'ai vu les douleurs en ceinture se calmer,

l'appétit renaître; les enfants ont repris rapidement de l'embonpoint. Chose curieuse, aucun d'eux n'a accusé de douleurs dans le dos, là où de fortes pressions ont été exercées. Les meilleurs juges en cette occurrence, ce sont certainement les mères; elles se montrent enchantées et vous disent que depuis longtemps leurs enfants n'ont moins souffert, n'ont mieux mangé.

Parmi les petits opérés de Calot se trouvent quatre enfants paralysés des membres inférieurs; deux fois, la paralysie a cédé rapidement après l'intervention; dans les autres cas, la paralysie existe encore.

L'amélioration consécutive à l'opération du redressement brusque persistera-t-elle dans l'avenir? Ou, en d'autres termes, peut-on espérer voir une affection tuberculeuse du rachis guérir sans déformation, sans bosse? A l'heure actuelle, une dizaine d'enfants opérés depuis plus d'un an et qui sont soustraits à tout traitement, conservent leur colonne vertébrale redressée. Nous avons vu à Berck les enfants à peine délivrés du grand appareil plâtré immobilisateur marcher avec facilité, la taille droite.

En terminant et comme conclusion, je crois que l'on peut dire avec Calot qu'il est tout aussi légitime de vouloir redresser un bossu que de tenter la correction de la boiterie due à une coxalgie.

Cinquième section.

Séance du jeudi 29 avril 1897. — A 9 $^1/_2$ heures, réunion de la section, sous la présidence de M. le comte Vander Straeten Ponthoz.

M. Hector Lambrechts, attaché au Ministère du Travail, y donne lecture d'une étude sur le travail à domicile.

M. Lambrechts est l'auteur d'un livre qui vient de paraître sur le travail des couturières en chambre et sa réglementation. Il a soumis à la discussion les conclusions auxquelles il est arrivé dans son étude. Ces conclusions sont les suivantes : Il y a lieu de modifier l'organisation actuelle du travail en chambre.

Cette modification a besoin du concours de l'autorité. Ce concours ne doit pas adopter une formule simpliste, mais procéder par mesure de détail pour chaque industrie et même pour chaque abus dans chaque industrie. Ces conclusions ont été vivement discutées par les membres de l'assemblée, et plusieurs membres, tout en félicitant vivement l'auteur, n'ont pas caché que leur opinion différait de la sienne sur plus d'un point.

ASSEMBLÉES GÉNÉRALES.

I

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE DU MARDI 27 AVRIL 1897.

La séance est présidée par M. A. Witz, professeur aux Facultés catholiques de Lille, président de la Société.

Il est donné lecture, au nom de M. P. Mansion, secrétaire général de la Société, que l'état de sa santé empêche d'assister à la session, du Rapport sur les travaux de la Société, dont voici le résumé.

Publications. I. Pendant l'année 1896-1897, la Société a entrepris l'impression des tomes XX et XXI des *Annales*, sans parvenir à achever la publication du premier de ces volumes, qui contient les mémoires présentés dans les diverses sections pendant l'année sociale 1895-1896. Diverses circonstances expliquent ce retard : l'absence prolongée du secrétaire pendant les mois d'été de 1896, la mort inopinée du R. P. George, enfin les difficultés que présente l'impression d'un mémoire de mathématiques assez étendu qui terminera ce tome XX. Nous espérons que, dans peu de semaines, nous pourrons achever la

publication de ce volume et le faire expédier, sans nouveau retard, à chacun des membres de la Société. Quant au tome XXI, il est en bonne voie ; presque tous les mémoires présentés dans les sessions d'octobre 1896 et de janvier 1897 sont déjà imprimés.

II. Les quatre livraisons de la *Revue des questions scientifiques*, d'avril 1896 à janvier 1897, ont paru régulièrement. Nous ne pouvons donner une meilleure idée de l'importance des matières qui y ont été traitées qu'en insérant ici une liste sommaire des principaux articles.

J. Thirion, S. J., Tisserand. — *R. T.*, Distinctions scientifiques (K. Gegenbaucr, A. Geikie, C. V. Boys, J. B. Grassi, etc.). — *de Kirwan*, Fresnel, Faraday, les électriciens et les forces à distance. — *Lucas*, S. J., Les rayons X. — *J. Van Geersdaele*, S. J., Le spectre infra-rouge et le bolomètre. — *P. Duhem*, L'évolution des théories physiques du XVII[e] siècle jusqu'à nos jours. — *G. Hahn*, S. J., L'électricité et la vie. — *A. Renard*, Les fondateurs de la minéralogie. — *G. Schmitz*, S. J., L'âge de la houille. — *J. de la Vallée Poussin*, L'expédition belge projetée aux régions antarctiques. — *Van Ortroy*, Le voyage de Nansen. — *G. Hahn*, S. J., Huxley et M. de Varigny. — *A. de Lapparent*, Daubrée. — *J. Thirion*, S. J., Pasteur. — *E. Beauvois*, Pratiques et institutions religieuses d'origine chrétienne chez les Mexicains du moyen âge. — *de Nadaillac*, L'évolution et le dogme. — *de Nadaillac*, Les cliff-dwellers. — *de Kirwan*, Les Alpes, leurs forêts et les hommes primitifs. — *D[r] Surbled*, Raison et folie. — *D[r] de l'Écluse*, L'immunité. — *M. de Baets*, Le quatrième Congrès d'anthropologie criminelle. — *J. Heymans*, Le cœur. — *Van Gehuchten*, Structure du télencéphale, centres de projection et centre d'association. — *Monthaye*, La question coloniale en Belgique ; étude d'économie et de géographie politiques. — *Lambrechts*, L'œuvre sociale du Reichstag allemand en 1896. — *Mac Aigne*, L'École polytechnique et l'agriculture française. — *Van Tricht*, S. J., L'année scientifique et religieuse. — *Van Tricht*, S. J., Le R. P. George. — *P. Mansion*, La question des humanités d'après le R. P. Verest. — *Peeters*, S. J.,

Langage et pensée. — Comptes rendus de cinquante et un ouvrages et Revue des recueils périodiques relatifs à l'astronomie, la physique, la chimie, la géologie, la géographie, la botanique, la zoologie, la physiologie, l'anthropologie, l'agriculture, la sylviculture, l'hygiène, les sciences industrielles et les sciences sociales.

Qu'il nous soit permis, à propos de cet aride résumé, de faire quelques remarques. D'abord, toutes les sections de la Société y sont largement représentées, aussi bien la cinquième et la quatrième que la seconde ou la troisième; nous mettons la première hors de cause, les mathématiques ne se laissant pas traduire dans une langue autre que la leur, sauf dans des cas exceptionnels. Ensuite, les deux événements scientifiques de l'année 1896, la découverte des rayons X et l'expédition polaire de Nansen y sont exposés avec tous les détails qu'ils comportent, de manière à satisfaire à la fois les savants et les profanes. Enfin, maintes questions qui touchent aux confins de la science et de la philosophie sont abordées et traitées dans la *Revue*, avec une science et une autorité incontestables, par divers de nos collaborateurs. Nous faisons-nous illusion ? Il nous semble que bien des pages de la *Revue* de cette année sont une démonstration détaillée de cette vue géniale de Sa Sainteté Léon XIII, que la philosophie thomiste sainement entendue a des affinités naturelles avec la science contemporaine. Sans doute, il existe parfois, entre les physiciens ou les biologistes d'une part, les métaphysiciens d'autre part, quelques dissidences de langage, même des malentendus provenant d'imperfections de forme dans l'expression de leur pensée. Mais, pour un observateur impartial, les uns et les autres sont sur des routes qui se rapprochent sans cesse l'une de l'autre, et l'on entrevoit le jour où l'union sera complète entre tous ceux qui, selon le mot de Mivart, prennent des leçons de la nature, cette œuvre de Dieu, les uns en étudiant la matière, les autres en étudiant l'esprit (*Lessons from Nature in Mind and Matter*).

Sessions. Les sessions d'avril 1896 et de janvier 1897 se sont tenues à Bruxelles, suivant l'usage; celle d'octobre, à Malines.

Ce qui a caractérisé notre session d'avril 1896, ç'a été l'inauguration de séances du soir avec projections, le premier jour de la session. Cette innovation a parfaitement réussi, non seulement à cause du talent du conférencier et de l'intérêt présenté par le sujet traité : les rayons X, mais aussi parce qu'elle répond à un besoin. Une foule d'amis de la Société scientifique, retenus ailleurs pendant la journée, par des occupations absorbantes ou par des devoirs de famille, ne peuvent, en effet, lui témoigner leur sympathie ou profiter des occasions de s'instruire qu'elle leur offre, qu'aux heures du soir, après le labeur quotidien, et alors ils associent leur famille à leur récréation intellectuelle, en l'amenant à nos séances. Cette année, comme vous le savez, le Conseil de la Société a de nouveau organisé une assemblée du soir avec projections, et nous y convions, comme l'an dernier, tous ceux qui ont à cœur le succès des séances de la Société scientifique.

Notre session d'octobre, à Malines, a été particulièrement brillante, grâce au patronage qu'a bien voulu lui accorder Son Éminence le Cardinal-Archevêque. Monseigneur Goossens a poussé l'obligeance jusqu'à interrompre sa tournée de confirmation pour venir présider notre assemblée générale de l'après-midi. Un savant conférencier, M. le professeur Van Gehuchten, de l'Université de Louvain, nous y a entretenus d'un sujet ardu s'il en fut : la constitution du cerveau, avec une clarté et une compétence exceptionnelles. Après cette belle conférence, Son Éminence a adressé à l'assemblée une magnifique allocution, où elle a exposé avec une grande élévation de pensée et un grand sens pratique le but poursuivi par la Société scientifique. Nous ne doutons pas que la parole autorisée du Primat de la Belgique devant un auditoire où se trouvait réunie l'élite de la haute société ecclésiastique de Malines et de Louvain ne nous conquière de nouvelles sympathies dans le clergé belge.

M. Witz, notre président, a remercié Son Éminence des précieuses paroles d'encouragement et de direction qu'elle venait de nous adresser. Il a remercié aussi tous ceux qui avaient contribué au succès de la journée : les membres des diverses sections

venus à Malines pour y faire des communications scientifiques, plus nombreux qu'à aucune autre session en province, particulièrement à la section de médecine; M. le chanoine Swolfs, qui avait bien voulu veiller à tous les détails d'organisation de la session; M. le chanoine Ballaer, directeur du Collège Saint-Rombaut, qui nous avait donné l'hospitalité dans le magnifique établissement confié à ses soins. Nous saisissons l'occasion que nous offre ce rapport annuel pour réitérer à tous, spécialement à S. E. Monseigneur le Cardinal-Archevêque de Malines, l'expression de nos bien vifs sentiments de gratitude.

État actuel de la Société. L'an dernier, à pareille époque, le nombre de nos membres était de 403. Il est aujourd'hui de 405 seulement, bien que nous ayons admis 15 nouveaux membres, et que nous ayons une seule démission à enregistrer cette année.

Mais la mort, hélas ! a frappé cruellement dans nos rangs. Près de nous, elle nous a enlevé brusquement le plus dévoué, le plus humble, le plus aimable des collaborateurs, le R. P. George, qui pendant sept ans et demi, depuis la mort du R. P. Carbonnelle, a porté en réalité tout le fardeau du secrétariat. Ceux-là seuls qui, comme ses frères en religion ou comme nous qui avons eu le bonheur de l'avoir pour aide, ont pu voir sa vie intime de près, savent tout ce qui se cachait de bonté et d'abnégation modestes dans cette âme d'élite. Qu'il nous soit permis ici de révéler un trait touchant qui prouve combien son aménité affectueuse savait gagner le cœur de tous ceux qui étaient en relation avec lui. A la nouvelle de sa mort, les typographes chargés de l'impression des *Annales* nous ont écrit spécialement pour nous prier d'exprimer à ses proches et à ses frères en religion les regrets que leur causait la mort du *bon Père* George. Personne de nous, sans doute, n'a oublié le bon Père dans ses prières, mais nous vous exhortons à lui donner un dernier témoignage d'affection chrétienne en assistant demain, à Sainte-Gudule, au service célébré au nom de la Société scientifique pour le repos de son âme.

Parmi ceux qui nous ont quittés pour une patrie meilleure,

permettez-moi de vous citer encore Alfred Dewèvre, l'un de nos jeunes membres les plus zélés, frappé là-bas, comme tant d'autres, sur la terre africaine où il était allé, plein d'enthousiasme et d'ardeur, s'associer à l'œuvre civilisatrice tentée par notre Roi. En 1894, il nous faisait une savante conférence sur *Les principaux produits végétaux du Congo belge*; le 6 juin 1895, il partait pour l'Afrique; le 27 février de cette année, il était emporté par une de ces maladies meurtrières qui ont déjà moissonné tant de précieuses existences dans les régions équatoriales.

Cette année, nous avons aussi perdu deux de nos membres les plus illustres, arrivés l'un et l'autre à une vieillesse paisible et honorée, après une vie consacrée tout entière à la science, Daubrée et d'Abbadie. « Daubrée, a dit M. de Lapparent, qui a écrit dans notre *Revue* et ailleurs de savantes notices sur son maître, Daubrée n'était pas seulement le doyen incontesté des géologues français; il était même, depuis la mort de Dana, le doyen des géologues du monde entier. Son œuvre scientifique se distingue par un rare cachet d'homogénéité, unie à un caractère essentiellement original. Daubrée a été vraiment le créateur de la géologie expérimentale, et ses recherches synthétiques, toujours guidées par une haute pensée directrice, ont jeté une vive lumière sur plusieurs des problèmes les plus importants de la géologie. »

Antoine d'Abbadie a été l'un de nos membres fondateurs et l'un des membres les plus zélés de la Société scientifique, dont il fut Président en 1880. Comme vous le savez, il appartenait à l'une des plus vieilles races européennes, à cette nation basque qui a donné au monde deux héros, deux saints : Ignace de Loyola et François Xavier et qui lui donne tous les ans encore des missionnaires et des colons intrépides. D'Abbadie était un digne représentant de cette race énergique, comme il l'a prouvé par son incroyable odyssée en Abyssinie, de 1837 à 1848. Jamais voyageur, croyons-nous, ne s'est identifié aussi complètement avec le pays qu'il a étudié : langue, institutions, coutumes, usages de l'Abyssinie, il s'est tout approprié au point de

se faire recevoir dans le corps enseignant de cette vieille nation sémitique; au point aussi, lui, le montagnard des cimes pyrénéennes, de parvenir à marcher pieds nus dans ce pays singulier où les rustres et les lépreux seuls portent des sandales! Ni les hommes, ni les grands fauves de l'Afrique, ni les fleuves, ni les montagnes n'ont pu l'empêcher d'explorer en tous sens le pays où il voulait introduire et où il a réellement introduit des missionnaires catholiques : sa persévérance invincible a renversé ou tourné tous les obstacles. En même temps, il a fait une œuvre scientifique durable en inventant la géodésie expéditive et en appliquant, dans sa *Géodésie d'Ethiopie*, les procédés à l'Abyssinie. Ce livre restera, parce qu'il repose sur des observations exactes, reliées entre elles par la forte trame des vérités mathématiques.

La Société scientifique de Bruxelles gardera toujours avec reconnaissance le souvenir de ce grand savant chrétien qui lui avait voué toutes ses sympathies.

Distinctions. Comme les autres années, après vous avoir entretenus de nos deuils, qu'il nous soit permis de vous parler des distinctions scientifiques obtenues par plusieurs de nos membres, distinctions dont l'éclat rejaillit sur la Société scientifique elle-même.

Tout récemment, MM. les professeurs Denys et Van Gehuchten, bien connus dans le monde savant par leurs recherches sur la sérothérapie et sur le système nerveux, ont été nommés Correspondants de l'Académie royale de médecine de Belgique. Peu auparavant, M. Amagat, déjà Correspondant de l'Institut de France, était nommé Associé étranger, à la fois, de la Société royale de Londres et de la Société royale d'Édimbourg, à l'occasion de difficiles et profondes recherches sur les gaz, où il s'est montré depuis longtemps le digne continuateur de Regnault. M. le professeur J.-F. Heymans a de nouveau remporté, cette année, le prix Alvarenga à l'Académie royale de médecine (en collaboration avec M. Masoin); en outre, il a été couronné à l'Académie royale de Belgique, pour le travail fait avec M. Van der Stricht, sur *Le système nerveux périphérique de l'Am-*

phioxus. En juin dernier, l'Académie des sciences morales et politiques de France accordait sa première médaille au concours des antiquités nationales, à M. le professeur Kurth, pour ce livre sur *Clovis* où il a fait apparaître pour la première fois, dégagée des scories de la légende, la grande figure du héros franc salien, disons plus clairement du héros flamand auquel la Belgique, bien plus que la France, est en grande partie redevable de sa foi catholique. Quelques mois plus tard, le prix quinquennal d'histoire était décerné, à Bruxelles, à M. Kurth encore, pour son *Histoire poétique des Mérovingiens*, ouvrage qui, comme vous le savez, est la base scientifique de celui qui a été couronné par l'Institut de France.

Nous sommes heureux d'être l'interprète de la Société scientifique tout entière en adressant à MM. Kurth, Heymans, Denys, Van Gehuchten, Amagat (à d'autres encore, s'il y en a d'oubliés peut-être dans cette revue rapide) nos plus cordiales félicitations à l'occasion de ces distinctions si méritées dont ils ont été l'objet pendant l'année écoulée.

En terminant ce rapport, nous ne pouvons passer sous silence le suprême hommage rendu à la mémoire de l'un de nos anciens membres, du plus illustre de tous, Pasteur; nous voulons parler de la translation de ses restes mortels, de l'une des chapelles de Notre-Dame de Paris à la crypte construite sous le vestibule d'entrée de l'Institut qu'il a fondé. Vous avez tous lu, dans la *Revue des questions scientifiques*, les pages éloquentes consacrées à cette touchante cérémonie par le religieux dévoué qui a bien voulu prendre la succession du bon Père George auprès de nous. Nous ne pouvons rien ajouter à cette belle notice : nous nous contenterons d'appeler votre attention sur un des emblèmes empruntés au symbolisme chrétien, qui y sont si bien décrits. Sous la coupole qui domine le tombeau de Pasteur, quatre anges aux ailes déployées représentent la Foi, l'Espérance, la Charité et la Science. C'est la première fois, croyons-nous, que dans l'art religieux, la science est ainsi associée aux vertus théologales. Mais comme cette association est bien justifiée en ce dix-neuvième siècle où la science joue un si grand rôle; comme elle répond

bien à cette grande pensée du Concile du Vatican que la science conduit à Dieu, sa grâce aidant; comme elle répond bien à l'idée directrice qui a présidé à la fondation, qui préside au développement et à la vie de la Société scientifique de Bruxelles! Associons donc toujours, Messieurs, dans nos intelligences et dans nos cœurs, ces sœurs immortelles dont les images dominent le tombeau de Pasteur, la Foi, l'Espérance, la Charité et la Science, sans oublier jamais toutefois que *major autem horum est charitas*.

M. Witz prend ensuite la parole pour exposer une invention nouvelle, appelée à rendre les plus grands services au commerce et à l'industrie : *le halage des bateaux sur les canaux par l'électricité*. Des ingénieurs éminents ont entrepris, dans ces dernières années, d'organiser un tractionnement mécanique des péniches : des remorqueurs à vapeur, des toueurs sur chaîne ou sur câble, des locomotives roulant sur berge, des câbles marcheurs ont été essayés par MM. Büsser, Bouquié, Rigoni, Orcôlle, Maurice Lévy; ces solutions du problème étaient pour la plupart satisfaisantes au point de vue technique, mais elles n'ont pu être appliquées que dans des circonstances toutes spéciales, parce qu'elles ne rémunéraient pas les capitaux absorbés par leur établissement. Des électriciens sont alors intervenus dans l'étude de ces procédés, et, pleins de foi dans l'admirable transmetteur d'énergie dont ils disposent, ils ont essayé de la propulsion, du touage ou du halage électrique. Les tentatives faites dans cette direction remontent assez loin déjà, puisqu'en 1839 Jacobi naviguait sur la Néva dans un canot actionné par le courant d'une batterie de piles; plus tard, on a essayé les accumulateurs, dont le grand poids constitue une moindre entrave dans l'espèce que leur volume encombrant. MM. Molinos et de Bovet ont appliqué l'électricité au touage, et ce système a permis à MM. Fontaine et Galliot d'organiser un service excellent dans le tunnel de Pouilly, sur le canal de Bourgogne. En Amérique, sur le canal Érié, M. Hawley a fait de la propulsion et M. Lamb du halage. Le trolley roulant sur conducteurs aériens était le plus

généralement employé par ces inventeurs. C'est encore le dispositif qui vient d'être appliqué sur le canal de Bourgogne par MM. Denèfle et Cie; le courant actionne soit un tricycle circulant sur le chemin de halage, soit une hélice montée sur le gouvernail, qui devient ainsi propulseur. M. Witz rapporte les résultats d'essais qu'il a faits : par 3,450 watts, il a halé deux bateaux, portant près de 400 tonnes, à une vitesse de 2 kilomètres à l'heure. Des photographies et des réductions d'appareils passent sous les yeux des auditeurs et leur permettent de se rendre compte de l'organisation générale du système et des détails de construction des appareils. Le fonctionnement excellent constaté sur le canal de Bourgogne permet d'espérer que le halage électrique pourra être appliqué avantageusement sur les voies de navigation intérieure.

Une étude sur la question sera publiée dans le prochain numéro de la *Revue des questions scientifiques*.

SÉANCE DU MARDI SOIR.

La séance est présidée par M. A. Witz, président de la Société.

M. Gaston t'Serstevens a fait, à 7 heures du soir, une conférence avec projections : *Voyage en Égypte; du Caire à la seconde cataracte du Nil*, récit plein de charme d'une excursion récente au pays des Pyramides, que le conférencier a visité en artiste et en homme de science.

II

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE DU 28 AVRIL 1897.

L'assemblée générale est présidée par M. A. Witz, président de la Société.

M. Ch. de Kirwan, délégué de la Société bibliographique de Paris, donne lecture du rapport suivant sur les travaux de cette société pendant l'année écoulée :

Messieurs,

Sœur et devancière, chronologiquement, de la Société scientifique de Bruxelles, la Société bibliographique de Paris tend, par des voies un peu différentes, au même but : elle poursuit la justification, ou même la démonstration par les faits, de cette sentence du Concile du Vatican qui est devenue la devise de votre Société et l'épigraphe de toutes ses publications : *Nulla unquam inter fidem et rationem vera dissensio esse potest.*

Vaste et varié est ce domaine de la raison de l'homme que l'Église définit comme ne pouvant jamais être en dissentiment réel avec la foi. Vous justifiez, Messieurs, la parole du Concile par rapport à cette province du domaine rationnel qui a nom *la science,* dans l'acception un peu restreinte qu'on donne à ce terme aujourd'hui et qui s'étend seulement à la connaissance des lois de la nature et de celles des grandeurs et des quantités. Nous nous efforçons d'accomplir la même tâche plus spécialement dans le champ des sciences historiques, de l'érudition, de la critique et des lettres, sans d'ailleurs exclure systématiquement aucune des branches du savoir.

Ce n'est pas tout.

Nous ne sommes pas seulement une société *bibliographique*; nous sommes aussi une société de *publications populaires,* dans le but de propager dans les diverses classes le goût des saines lectures, afin de contrebalancer, dans la mesure du possible, la propagande effrénée que fait, dans notre malheureux pays, l'esprit d'impiété, d'athéisme et de démoralisation.

A l'heure présente, ce deuxième but est peut-être, sinon le plus important, du moins le plus urgent. Aussi la Société bibliographique prend-elle à tâche, autant qu'elle le peut, de pourvoir à ce besoin.

Durant l'année écoulée (*), le nombre des demandes qui lui ont été adressées pour obtenir des envois de livres, brochures de propagande, almanachs, volumes pour distributions de prix

(*) Avril 1896 à mars 1897 (Cf. les *Bulletins* mensuels de la Société).

dans les écoles libres et autres destinations pieuses, a atteint le chiffre de 293.

Avec le concours de l'OEuvre des campagnes, la Société a procuré, par abonnements, 81 collections de livres pour bibliothèques paroissiales.

Les dons gratuits au profit des bibliothèques de bons livres créées ou soutenues par des œuvres privées, ont été de 257, représentant, en nature de livres, une valeur argent de plus de 7,000 francs (*), dont 250 francs concernant les bibliothèques chrétiennes de Nancy, 235 francs celles du département de la Sarthe, et 200 francs concernant une bibliothèque d'officiers, à ... Yang-tse-Kiang !

Une caisse de livres envoyée à une mission située sur un autre point de la Chine, à Wu-Hu, a valu à notre dévoué et aimé président, le marquis de Beaucourt, une chaleureuse lettre de remerciements du supérieur de la mission, le R. P. Debrix.

Outre ces dons ou abonnements, il a été procuré à diverses bibliothèques chrétiennes, paroissiales ou autres, 138 dépôts renouvelables de livres par collections de 25 ou 50 volumes, suivant le prix — 5 ou 10 francs — d'abonnement annuel (**).

Enfin, grâce au concours aussi bienveillant que dévoué de nos Dames patronesses, il a été subvenu, tant dans l'intérieur de Paris que dans sa banlieue, aux besoins de 104 bibliothèques circulantes.

*
* *

L'OEuvre des publications populaires ne se borne pas à procurer ou à favoriser l'alimentation de lectures gratuites ou peu coûteuses aux classes populaires ou peu aisées. Elle s'occupe aussi de faire paraître et de tenir à jour un *Catalogue de livres choisis à l'usage des gens du monde*. Publié d'abord vers 1880 et suivi de

---

(*) Exactement 7121 francs.

(**) Il n'est pas hors de propos de rappeler, à cette occasion, que tout membre de la Société bibliographique peut, moyennant cet abonnement, obtenir l'envoi de volumes pour bibliothèque locale ou circulante, envoi renouvelable contre retour de la collection précédemment expédiée.

toute une série de suppléments, ce catalogue a été repris à nouveau, entièrement refondu et publié en seconde édition, en mai 1896. C'est un volume in-12 de trois cents pages environ, contenant les indications de titre, auteur, éditeur et prix fort de cinq à six mille ouvrages distribués, conformément à la répartition adoptée dans le *Manuel du libraire* et dans le *Polybiblion*, sous les cinq rubriques générales de *Théologie*, — *Jurisprudence*, — *Sciences et arts*, — *Belles-lettres*, — *Histoire*, chacune de ces grandes divisions se partageant suivant toutes les subdivisions qu'elle comporte.

Ce catalogue, destiné, comme son titre l'indique, aux *gens du monde*, c'est-à-dire à l'ensemble des personnes nanties d'une culture générale, mais sans spécialité professionnelle ou déterminée, ne s'adresse pas, assurément, aux savants, aux érudits, aux spécialistes, du moins en général. Mais, sous la garantie de la Société bibliographique, il offre aux esprits cultivés l'indication d'ouvrages écrits tous dans un esprit soit nettement chrétien, soit tout au moins impartial ou même bienveillant.

J'ai nommé tout à l'heure le *Polybiblion*. Je ne crois pas avoir besoin, Messieurs, de vous parler de ce double recueil mensuel de bibliographie de tous les pays : vous le connaissez tous, au moins de réputation, et M. le chanoine Delvigne a bien voulu, l'an dernier, vous donner à son sujet des indications suffisantes.

Mais il ne me paraît pas inutile de vous entretenir d'autres travaux exécutés par la Société elle-même ou par ses membres, ou d'œuvres qu'elle encourage de ses sympathies.

Parlons d'abord des congrès :

L'an prochain, se tiendra à Paris le troisième Congrès décennal de bibliographie universelle.

Mon collègue et ami, le comte de Vorges, vous a parlé, en 1895, du brillant Congrès provincial tenu à Montpellier en février de ladite année, sous l'active et puissante protection du vaillant évêque de ce diocèse, Mgr de Cabrières. Je demande, à mon tour, à vous dire quelques mots de celui qui a eu lieu à Nancy en mai 1896, avec l'efficace concours d'un non moins courageux prélat, Mgr Turinaz.

Le Congrès avait distribué ses travaux entre trois sections seulement : 1° *La Société bibliographique*; 2° *L'étude*; 3° *La propagande.* La seconde section avait réparti ses objets d'études en six groupes afférents respectivement à l'Histoire générale, — aux Bibliothèques et Sociétés, — aux corporations et paroisses, — aux abbayes, — à la Révolution, — enfin aux objets divers; c'est une revue générale de tout ce qui intéresse l'histoire de la Lorraine. La première section s'est occupée de l'action et de l'influence de la Société bibliographique dans cette célèbre province. La troisième a été principalement marquée par un magistral et surtout très pratique rapport sur la propagande des bonnes lectures populaires par leur vente bien organisée; il avait pour auteur un prêtre du diocèse de Nancy, M. l'abbé Grandjean, curé de Dombasle-sur-Meurthe.

Une visite détaillée à la riche bibliothèque de la ville, suivie d'un pèlerinage, religieux d'abord, mais en même temps archéologique, au sanctuaire de Saint-Nicolas-du-Port, a dignement clos cette suite de fêtes intellectuelles.

Permettez-moi d'ajouter que, dans une autre réunion, étrangère, il est vrai, celle-là, à la Société bibliographique, — je veux parler du Congrès ecclésiastique de Reims, — cette Société a été désignée, dans un substantiel rapport sur les bibliothèques populaires, comme le centre naturel où doivent converger toutes les œuvres qui s'y rattachent (*).

* * *

Sans parler des nombreuses conférences faites tant à Paris qu'en province par les soins du Comité de défense religieuse, et auxquelles la Société bibliographique a fourni la plupart de ses orateurs, mentionnons celle qui a été donnée à la Société elle-même par l'un des plus distingués de ses membres, M. le baron Carra de Vaux, professeur à l'Institut catholique de Paris, sur

(*) Ce rapport est dû à M. l'abbé Le Conte, vicaire général honoraire de Châlons-sur-Marne.

les massacres d'Arménie : l'orateur a tracé, avec une émotion poignante, le tableau des atrocités sans nom, de la barbarie sauvage des populations musulmanes contre leurs compatriotes chrétiens; il a justement flétri l'inaction des puissances de l'Europe, restant spectatrices indifférentes de ces attentats de lèse-humanité. Hélas! ni en France ni ailleurs, nous ne sommes plus au temps des croisés!

Quant aux publications de la Société elle-même, leur seule liste remplirait plusieurs pages : mieux vaut renvoyer au *Bulletin* de janvier 1897, où elles sont énumérées en détail.

Les ouvrages, mémoires, articles de revues ou de recueils divers dus, pendant le courant de l'année, aux membres de la Société, atteignent, outre les conférences signalées tout à l'heure, le nombre de cent vingt. Nous ne saurions les désigner tous; mentionnons-en quelques-uns, pris un peu au hasard, parmi les plus importants : c'est le tome second des *Lettres de Marie-Antoinette* recueillies par MM. de la Rocheterie et le marquis de Beaucourt; c'est *Napoléon d'après ses récents historiens,* par M. Geoffroy de Grandmaison; c'est encore *Marie-Antoinette Dauphine,* que nous donne M. Pierre de Nolhac après nous avoir donné précédemment *La reine Marie-Antoinette*; c'est *Le duc de Richelieu en Russie et en France,* par M. de Crouzas-Crétet; l'*Histoire de Mac-Mahon, maréchal de France, duc de Magenta,* par M. Léon Laforge; une *Philosophie morale et sociale,* par M. l'abbé de Pascal; enfin *Lafontaine moraliste* par M. le vicomte de Broc.

Je considérerais comme par trop insuffisante cette rapide énumération, si je ne signalais les hautes récompenses décernées par l'Institut de France à plusieurs membres de la Société bibliographique. Et d'abord notre éminent et sympathique confrère de la Société scientifique aussi bien que de la Société bibliographique, M. Godefroid Kurth, a obtenu de l'Académie des inscriptions et belles-lettres la première médaille du concours des antiquités nationales, pour son beau livre sur *Clovis.* M. Noël Valois a reçu de la même Académie le prix Gobert pour son *Histoire du grand schisme d'Occident.* A M. le comte de Ludres, son

Histoire de la chevalerie lorraine a valu un prix de l'Académie française; et cette illustre Compagnie a accordé un prix Monthyon à M. l'abbé Vacandard pour son *Histoire de saint Bernard,* et le prix Marcellin Guérin à M. le baron Denys Cochin pour son savant ouvrage intitulé : *Le monde extérieur.*

Ajoutons que, le 25 février dernier, l'Académie française a accueilli dans ses rangs l'un de nos plus éminents confrères, M. le marquis Costa de Beauregard.

Vous le voyez, Messieurs, l'activité de la Société bibliographique ainsi que celle de ses membres ne se démentent pas. Malheureusement la mort fait en son sein de cruels ravages, quelques défections s'y ajoutent, et il se produit ainsi des vides que ne compense pas suffisamment le recrutement de membres nouveaux.

Bien plus, parmi les membres dont nous pleurons la perte récente se rencontrent quelques-uns des plus dévoués et des plus illustres.

Quels impérissables regrets ne nous laisse pas la mort de Mgr d'Hulst, ce prêtre au dévouement inépuisable, qui ne reculait devant aucun labeur, qui, aux soucis du rectorat de l'Institut catholique, aux fatigues de la chaire de Notre-Dame, à celles plus pénibles et peut-être plus méritoires encore qu'il rencontrait à notre Chambre des députés, trouvait encore le moyen d'ajouter les soins du saint ministère, la direction des âmes et la participation, comme vicaire général, à l'administration du diocèse de Paris !

Nous avons eu aussi à déplorer, avec le diocèse de Seez, la perte d'un fier évêque, d'un évêque digne des premiers âges, Mgr Trégaro. Avant lui avaient succombé un prince de l'Église, le savant cardinal Bourret, évêque de Rodez, Mgr Grimardias, évêque de Cahors, et Mgr Laferrière, évêque de Constantine.

Parmi les laïques, nous avons perdu M. Charles Garnier, notre excellent et dévoué trésorier, mort à 86 ans, à la suite d'une verte vieillesse toute vouée au bien; M. de Rozières, membre de l'Académie des inscriptions; M. Caillaux, président du Conseil d'administration des chemins de fer de Paris-Lyon-Méditer-

ranée, ancien Ministre des finances; le comte Léon de Poncins; M. Allaire, ancien précepteur de S. A. R. M[gr] le comte de Paris; le baron de Benoît; et enfin, tout récemment, M. d'Aillières, député de la droite, membre du Conseil général de la Sarthe, enlevé, à peine âgé de 48 ans, à l'affection des siens comme à toutes les nobles et saintes causes auxquelles il avait voué sa vie.

Ce sont là, Messieurs, des pertes bien difficilement réparables; ne faut-il pas dire irréparables ?

Ce ne doit pas être là, ce ne sera pas, pour nous, un motif de découragement. Au contraire, nous redoublerons nos efforts, et la Providence fera le reste. « Cherchez d'abord le règne de Dieu et sa justice », a dit Notre-Seigneur, « le reste vous sera donné par surcroît. » Or, qu'est-ce autre chose, Messieurs, que nous cherchons, vous et nous, si ce n'est le règne de la vérité qui vient de Dieu et qui est inséparable de la justice de Dieu ? Le reste que nous espérons par surcroît, c'est la réussite, c'est le succès couronnant nos humbles efforts, et que, tôt ou tard, confiants dans la divine promesse, nous finirons par atteindre.

M. le D[r] Laruelle fait ensuite une conférence sur *La peste dans l'état actuel de la science*. Voici un résumé de cette conférence qui paraîtra en entier dans la *Revue des questions scientifiques*, livraison de juillet 1897.

M. Laruelle rappelle que la récente apparition de la peste à Bombay a causé un vif émoi en Europe, par les souvenirs historiques qui se rattachent à cette terrible affection : jusqu'au siècle passé, elle a maintes fois décimé nos contrées; au XVII[e] siècle, elle a tué en Europe et en Asie plus de 50 millions d'êtres humains, et l'on frémit au souvenir des pestes de Londres et de Marseille.

La peste n'existe plus en Europe depuis 1845, mais il en persiste des foyers en Égypte et en Asie, dont les principaux sont en Assyrie, en Mésopotamie, dans la Perse, le Turkestan, l'Afghanistan, l'Hindoustan et la Chine. En 1878, la peste fit une incursion sur les bords du Volga, en Russie, mais fut rapidement éteinte, grâce à l'énergie du Gouvernement russe.

L'épidémie actuelle a commencé en Chine en 1894; elle a envahi Bombay en septembre 1896 et depuis lors toute la présidence de Bombay est infectée et beaucoup d'autres localités de l'Indo-Chine. La peste a fait fuir les habitants de Bombay, qui est presque désert : en janvier, en février et en mars, elle faisait périr environ 250 personnes par jour.

La peste est due à un microbe, bacille très court découvert par un Français, Yersin, en 1894; ce microbe est fort peu résistant aux agents physiques (chaleur) et chimiques (désinfectants); on le cultive aisément sur les milieux ordinaires.

Inoculé aux rats et aux souris, il leur donne la peste avec les lésions caractéristiques de cette maladie. Les animaux sains en contact avec des animaux ayant la peste expérimentale deviennent malades à leur tour.

La peste se transmet par le contact des malades ou des objets souillés par les malades, comme les meubles, les vêtements, etc.; elle ne se transmet pas par l'air; mais les animaux qui sont sujets à la peste comme l'homme, et notamment les rats, les souris, les animaux domestiques, les mouches, sont des agents de transmission de la peste.

La peste envahit l'organisme humain par les voies digestives, peut-être aussi par les voies respiratoires, mais surtout par les excoriations et les lésions insignifiantes de la peau.

Il n'y a aucune immunité de race, de sexe, d'âge contre la peste : seuls les pesteux guéris présentent une immunité relative. La misère et l'absence d'hygiène, les excès et l'encombrement favorisent son développement; elle existe à toutes les altitudes, mais semble légèrement enrayée dans sa marche sous l'influence des chaleurs excessives.

La période d'incubation de la peste, fixée à dix jours par la Conférence de Venise, est fort variable; depuis vingt-quatre heures dans les cas graves jusque trois semaines dans certains cas légers.

Le pesteux présente tous les symptômes d'une infection grave, et les lésions les plus apparentes dans la peste sont les *bubons* ou gonflements ganglionnaires et les *charbons*, espèce d'anthrax charbonneux.

Il existe, du reste, des pestes à formes variables; peste pneumonique, hémorragique, typhoïdique, des pestes malignes, (foudroyantes) et des pestes bénignes se prolongeant d'une façon anormale, mais conservant une certaine gravité.

On reconnait la peste par l'ensemble des symptômes qui la caractérisent : un excellent moyen de diagnostic est la recherche microscopique du bacille dans le sang.

La peste est la maladie la plus meurtrière; la mortalité, rarement inférieure à 80 pour cent, monte parfois à 95 pour cent.

Aucun traitement médical n'a d'action dans la peste; on n'a d'autre ressource que de la prévenir, de la tenir éloignée d'Europe, de l'étouffer, si elle envahit nos contrées.

La peste venant de Bombay peut pénétrer en Europe par la mer Rouge et le canal de Suez ou par voie de terre. Pour éviter l'embarquement de pesteux à Bombay, on visite tous les partants individuellement, on désinfecte tous les objets suspects. Les pèlerinages musulmans à la Mecque, qui si souvent ont introduit la peste et le choléra dans nos pays, sont interdits ou limités.

Les navires partant des endroits contaminés sont soumis à une escale pour visite médicale aux sources de Moïse; s'ils ont à bord des cas de peste, ils sont soumis à une quarantaine. Il en est de même aux ports d'arrivée, et ils doivent débarquer les malades et les suspects dans les lazarets et établissements sanitaires.

Pour éviter l'envahissement de la peste par la voie de terre, on soumet les voyageurs et les bagages à des visites et au besoin à des quarantaines ou à des désinfections.

Chaque gouvernement est tenu de notifier aux autres pays les cas de peste qui se produisent sur son territoire.

L'hygiène des villes, comme l'hygiène des individus, est la meilleure garantie contre le fléau.

Haffkine a tenté de vacciner l'homme contre la peste : il se sert pour cela de cultures de la peste chauffées pendant une heure à 70° pour tuer les germes sans détruire la propriété qu'elles ont de protéger l'organisme contre une infection mortelle. Il s'est vacciné lui-même et a vacciné 2,000 individus à

Bombay. Sur ces 2,000 personnes, 4 seulement auraient gagné la peste.

D'autre part, Yersin est parvenu, en immunisant des chevaux par l'injection de cultures du bacille, à obtenir un sérum antipesteux qui a contre la peste, chez les rongeurs, un effet préventif et un effet curatif, et qui, à Canton et à Amoy, lui a permis de guérir 24 pesteux sur 26 qu'il a soignés.

Yersin continue ses essais à Bombay même ; l'avenir nous dira la valeur de son sérum, mais il y a, en tout cas, à chercher dans cette voie, non seulement le remède de la peste, mais peut-être aussi le remède de toutes les infections tropicales.

III

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE DU JEUDI 29 AVRIL 1897.

La séance est présidée par M. le chanoine Delvigne, vice-président de la Société.

Il est donné lecture du rapport sur les comptes du trésorier pendant l'année 1896. Ces comptes sont approuvés par l'assemblée.

RECETTES ET DÉPENSES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE PENDANT L'ANNÉE 1895.

Revue des questions scientifiques.

RECETTES.		DÉPENSES.	
Produit des abonnements. . fr.	9232 70	Impression, expédition. . . fr.	6189 11
Subside de la Société	847 41	Collaboration.	3453 00
		Administration et divers . . .	438 00
	10080 11		10080 11



Séances, Annales et Bulletin.

Cotisations, *Annales* . . . fr.	5926 76	Impression, expédition. . . fr.	2600 74
		Indemnité aux secrétaires des sections, administration, divers	2556 07
		Location des locaux.	44 00
		Boni	725 95
	5926 76		5926 76

Société.

Produit des coupons du portefeuille. . . . . fr.	3016 47	Subside à la *Revue* . . . . fr.	847 41
Intérêts des comptes courants .	58 28	— pour recherches scient.	200 00
		Droits de garde	55 00
		Excédent	1972 34
	3074 75		3074 75

On peut les résumer comme il suit :

Recettes. . . . fr.	18 234 21
Dépenses	15 535 92
Excédent. . fr.	2 698 29

Cet excédent doit encore supporter les frais du tome XX des *Annales*, en cours de publication.

Le R. P. Delattre, S. J., fait ensuite une conférence ayant pour titre : *Une promenade en Babylonie, sous le roi Nabonide, vers l'an 545 avant Jésus-Christ.* Voici un aperçu de cette conférence :

Après quelques considérations sur l'état actuel de la Babylonie, séjour de la désolation après avoir été jadis le pays le plus florissant de la terre, le conférencier donne l'idée générale des monuments exhumés durant le dernier demi-siècle du sein des ruines aux bords du Tigre et de l'Euphrate, l'idée générale de la langue babylonienne, de l'écriture cunéiforme qui servait à l'exprimer et du domaine géographique de cet idiome. Il dit ensuite, et toujours brièvement, de quelle manière, à l'aide des monuments remis au jour, on a reconstitué plus ou moins, suivant les

époques, l'histoire de la Babylonie et de l'Assyrie, et même un peu celle des pays voisins, à partir du quarantième siècle avant notre ère, en complétant les sources assyro-babyloniennes par les données de la Bible, des monuments égyptiens et des classiques.

Ces préliminaires posés, le P. Delattre nous transporte en Babylonie par une fiction qui rappelle celle de Barthélemy dans le *Voyage du jeune Anacharsis en Grèce*. Nous parcourons le pays avec lui sous Nabonide (555-538 avant J.-C.), troisième successeur du grand Nabuchodonosor et contemporain de Cyrus, alors que le royaume de Babylone, si proche de sa ruine, est encore dans tout son éclat. De cette manière, ce que les assyriologues ont lu dans les inscriptions cunéiformes et ailleurs, nous l'avons sous les yeux ou les savants babyloniens nous le racontent en des occasions qui naissent à propos et sans effort.

Les vues d'ensemble que recherchent les touristes ne nous manquent pas, bien que la Babylonie offre en général une plaine monotone, inclinée doucement vers le golfe Persique. C'est qu'à l'époque de notre voyage les grandes villes babyloniennes, et elles sont nombreuses, possèdent toutes un ziggurat, grosse tour formée de prismes quadrangulaires posés en retrait les uns sur les autres, le prisme inférieur ayant parfois une base de 180 mètres de côté. A la vérité, les ziggurat ne sont pas très hauts; le plus élevé ne dépasse guère 155 pieds. On arrive au sommet par des escaliers extérieurs, et si l'on se sent fatigué, on trouve à mi-chemin des sièges qui invitent au repos. Le ziggurat surmonte un temple et se couronne d'une chapelle. Nous visitons volontiers ces sanctuaires, parce que l'art babylonien y étale ses magnificences, et que l'or, l'argent et toutes les pierres précieuses y sont prodigués.

Mais ce qui nous frappe plus que les ziggurat, les palais, les temples et la double enceinte de Babylone, qui entoure une province plutôt qu'une ville, c'est l'immense ramure de canaux qui se détache des deux grands fleuves, s'étale sur la rive gauche du Tigre et sur la rive droite de l'Euphrate, embrasse la presqu'île intermédiaire et communique à toute la contrée une

fertilité prodigieuse. Les dérivations principales forment de grosses rivières; elles donnent naissance à de larges canaux, ceux-ci à de grands fossés; les fossés se rétrécissent jusqu'à former des myriades de rigoles qui distribuent le précieux liquide à tous les champs. Nous sommes saisis d'admiration à la vue du Pallacotas, grand fleuve creusé de main d'homme, et dans la pierre en maint endroit, qui tire ses eaux de l'Euphrate, non loin de Sippara, à l'entrée de la Babylonie, et va jeter, à 600 kilomètres de là, dans le golfe Persique, le maigre flot qu'il roule encore après avoir fécondé une zone immense au nord de l'Arabie. Sans le Pallacotas, l'Euphrate se jetterait capricieusement sur sa rive droite et, au lieu d'y porter l'abondance, y formerait des marais pestilentiels et des lacs inutiles. C'est ce qu'il a dû faire dans le principe, et c'est ce qu'il fera si jamais on l'abandonne à sa tendance naturelle. Il en est de même à proportion du reste de la Babylonie; on peut dire que ce pays a été créé par l'homme. Cette création date de loin, mais elle est toujours à recommencer.

« Il y a trois mille cinq cents ans, nous disent les savants indigènes, la Babylonie méridionale est déjà représentée dans nos écritures comme le pays des canaux et des roseaux. Du reste, la Babylonie entière est dès lors un pays riche, et sans canaux, non seulement pas d'opulence, mais aussi pas de pain en Babylonie. Pour souhaiter la mort à un concitoyen qu'il déteste, le Babylonien lui dit: « Puisse le dieu Raman ensabler tes canaux! » Le moindre propriétaire en possède. Dans les plus anciens contrats relatifs aux ventes de terres, on voit, comme dans ceux d'aujourd'hui, la plupart des champs bornés d'un côté ou d'un autre par les canaux et les fossés d'irrigation. Enfin, dans leurs inscriptions, nos rois, à toutes les époques, se montrent occupés à développer et à réparer le réseau fluvial : chez nous, un roi est nécessairement terrassier. Vous voyez partout en Babylonie des armées de travailleurs qui curent les canaux, qui en obstruent les entrées ou les dégagent suivant les saisons, et travaillent sans cesse à assurer le cours régulier du Tigre et de l'Euphrate. C'est le spectacle que notre pays présente depuis des milliers

d'années. Mais aussi, c'est là presque tout notre travail agricole. La juste mesure d'humidité assurée à nos champs, ils n'exigent pour produire qu'un léger labour et l'ensemencement. »

A certains moments de l'année, les canaux se couvrent d'une infinité de barques pour le transport des récoltes. Les principales artères sont aussi des voies de commerce. Bien plus, « il y a cent trente ans, nous dit un Babylonien, Sennachérib, roi de Ninive, qui s'était emparé de notre pays, fit passer du Tigre dans l'Euphrate, par nos canaux, en destination du golfe Persique, une flotte de grands navires construits à Ninive par des Phéniciens, ses prisonniers, et montée par des marins de la même nation ». On nous raconte cela un jour entre autres que nous voguons nous-mêmes sur ces canaux, entre des champs de blé et d'orge qui rapportent deux cents et trois cents pour un, des champs de sésame à tiges arborescentes, des bosquets de saules, des rangées de palmiers, les plus productifs de la terre, et parfois le long d'immenses parcs.

La Babylonie est couverte de villes et celles-ci sont décorées de grands édifices, surtout de palais et de temples, œuvres des rois. Si Nabuchodonosor a été le bâtisseur par excellence, si Nabonide rivalise sous se rapport avec son glorieux prédécesseur, ils n'ont cependant fait l'un et l'autre que continuer la tradition des anciens rois de Babylone et de Ninive. Les rois babyloniens, dans leurs inscriptions sur prismes, tablettes et stèles de pierre ou d'argile, qu'on nous interprète, nous renseignent sur leurs travaux hydrauliques, mais principalement sur leurs constructions. Ils parlent à peine de leurs guerres, fort différents en cela des anciens rois de Ninive qui, nous dit-on, développaient de préférence ce chapitre sur des monuments d'ailleurs en tout semblables à ceux de Babylone. Les documents royaux et de brèves chroniques rédigées par les savants transmettent de génération en génération les faits de l'histoire babylonienne.

On a beaucoup écrit en Babylonie. Ainsi on nous montre, gravées sur tablettes d'argile, une foule d'incantations contre les maladies, spécialement contre la fièvre paludéenne, très fré-

quente en Babylonie, même après tous ces travaux de canalisation qui tendent à assainir le sol non moins qu'à le fertiliser. Nous voyons les astronomes babyloniens étudier le ciel du haut des ziggurat. Ils calculent les lunaisons et dressent des calendriers, avec l'indication des jours les plus convenables pour certaines actions; ils suivent le mouvement des planètes, ils observent les éclipses. Ils notent avec soin leurs observations, et les présages qu'ils en tirent. L'écriture fixe également les signes de l'avenir que demandent d'autres sages aux divers règnes de la nature terrestre.

A en croire ces devins, on a noté les présages en Babylonie de temps immémorial. Ils prétendent nous le prouver par une tablette où se trouve consignée une série d'exploits accomplis sous tels et tels auspices et autres signes par les rois Sargon Ier et son fils Naram-Sin, trente-deux siècles avant Nabonide.

Non moins intéressantes sont une foule de prières, d'élégies, d'odes, en l'honneur des divinités, et d'autres chants d'un caractère religieux. A notre demande, on nous en explique plusieurs; on nous en chante même avec accompagnement de musique. Nous remarquons dans quelques-unes de ces pièces une grande ressemblance, mais de forme et d'allure seulement, car le fond est polythéiste, avec des psaumes hébraïques que nous récitent au même lieu les exilés juifs, adorateurs d'un Dieu unique. Malgré nos instances, ces captifs refusent de chanter. « Jamais, nous disent-ils, la lyre de Sion ne fera entendre ses doux accords sur les fleuves de Babylone. »

On nous interprète aussi un poème épique qui couvre des deux côtés douze grandes tablettes et compte trois mille lignes d'écriture. Il retrace les exploits de Gilgamès, l'Hercule babylonien. La dernière partie du poème devient spécialement intéressante pour nous à la suite d'un rapprochement auquel elle donne lieu peu de jours après que nous l'avons entendue. Voici ce qu'on y lit. Gilgamès, cette espèce de demi-dieu, finit par vieillir, comme un simple mortel. Cependant il veut échapper au trépas et va demander une recette à cet effet à Khasis-Adra, le Noé chaldéen, qui a reçu des dieux le privilège d'une vie éternelle.

Celui-ci, pour montrer comment il est devenu immortel, lui raconte son histoire, c'est-à-dire l'histoire du déluge. Les déportés juifs nous répètent bientôt à leur façon cette même histoire. Les deux récits ont beaucoup de points de contact. Mais chez les Juifs elle se présente dans un cadre différent : elle fait suite à la cosmogonie et à l'histoire des premiers hommes.

Les Babyloniens ont aussi écrit l'histoire de la création, de même que celle de leurs dieux.

Le sol de la Babylonie fourmille de vieilles écritures, effets de banque, actes de commerce et de procédure, documents administratifs, correspondances officielles et privées, désormais sans valeur pratique, mais qui, aux yeux de lettrés capables de les lire, reflètent l'état de la Babylonie à toutes les époques. Il se fabrique naturellement tous les jours des écrits de cette sorte en très grand nombre : pour un rien, on grave un contrat, une quittance, une lettre, un mémoire, et le mouvement des affaires est très grand en Babylonie. La tablette d'affaires, voilà ce qui fait vivre les scribes et en propage la caste. On insiste sur ce dernier mot, parce qu'en Babylonie, le savoir écrire suppose une éducation tout à fait spéciale, qui ne peut être le partage de tous, à cause de l'infinie complication de l'écriture babylonienne.

Nous ne donnons qu'une idée incomplète de la conférence du P. Delattre, parce qu'elle est toute de faits énoncés en peu de mots, et, comme telle, forme un texte très difficile à résumer.

Il est ensuite donné lecture du résultat des élections pour le Bureau et le Conseil.

La session est déclarée close.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE.

SECONDE PARTIE

MÉMOIRES

DE LA CORRECTION

DE

CERTAINS PIEDS BOTS PARALYTIQUES

PAR LA TRANSPLANTATION TENDINEUSE

PAR

T. DEBAISIEUX

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE LOUVAIN.

Il n'y a pas bien longtemps que le pied bot paralytique a bénéficié des remarquables conquêtes de la chirurgie contemporaine. Le traitement employé par nos devanciers n'allait guère au delà de la ténotomie sous-cutanée, intervention excellente pour le pied bot congénital par rétraction musculaire, mais opération médiocre, parfois nuisible et souvent inapplicable dans le pied bot acquis, d'origine paralytique. L'arthrodèse, imaginée par Albert, fut un réel progrès. On sait que cette opération a pour but d'ankyloser le pied dans une position régulière, en ouvrant l'articulation tibio-tarsienne, souvent aussi l'articulation de Chopart, et en dépouillant les surfaces articulaires de leur revêtement cartilagineux pour leur permettre de se souder l'une à l'autre. Mais l'arthrodèse n'améliore la situation des malades qu'en supprimant définitivement la mobilité du pied; aussi ne convient-elle qu'aux cas extrêmes et particulièrement aux pieds

ballants résultant de la paralysie de tous les muscles de la jambe. Pour les pieds bots de moindre gravité, pour ceux dans lesquels la paralysie n'intéresse qu'un groupe musculaire limité, Nicoladoni a proposé une opération ingénieuse consistant à transplanter les tendons des muscles paralysés sur des faisceaux musculaires dont la contractilité est restée intacte; on arrive, par cet artifice, à opérer une véritable suppléance fonctionnelle des muscles dont la maladie a supprimé la contractilité, et, du même coup, on rétablit certains mouvements, on rend au pied sa direction, on donne à la marche plus d'assurance et de fermeté.

Bien que la première opération de Nicoladoni remonte au mois d'avril 1881, elle est encore peu connue et l'on pourrait compter les cas dans lesquels elle a été pratiquée. Cette raison m'engage à communiquer l'observation suivante, dans laquelle j'ai eu l'occasion d'y recourir avec un plein succès.

Il s'agit d'une fillette de 13 ans, Azélie C..., qui avait été atteinte, à 14 mois, d'une paralysie infantile de la jambe droite. A la suite de cette maladie, le pied s'était peu à peu dévié en varus équin. Voici les constatations faites au moment de l'entrée à l'hôpital: élévation du talon avec légère flexion de l'avant-pied sur l'arrière-pied; renversement du pied en dedans, tellement que pendant la station debout, il ne touche le sol que par la moitié antérieure de son bord externe; raccourcissement du tendon d'Achille et de l'aponévrose plantaire qui font corde; atrophie considérable des muscles; raccourcissement de 2 centimètres résultant d'un retard dans le développement de la jambe malade; hyperextension du gros orteil dont le tendon extenseur rétracté fait saillie sous la peau. Toutes ces déformations ont leur raison d'être dans la paralysie de l'extenseur commun des orteils et des deux péroniers latéraux. Le gastro-cnémien et le soléaire, dont l'action n'est plus contrebalancée, se sont peu à peu rétractés jusqu'à produire l'équinisme du pied; quant au varus, il est dû à la rétraction du tibial antérieur et de l'extenseur propre du gros orteil, par suite de la paralysie des deux péroniers, leurs antagonistes normaux.

L'opération eut lieu le 28 novembre 1895. Pour corriger la

difformité, je commençai par pratiquer la ténotomie du tendon d'Achille, qui fit disparaître l'équinisme, mais laissa persister le varus. C'est afin de combattre également ce dernier d'une manière efficace et durable que je procédai à la transplantation tendineuse de la manière suivante :

1° Longue incision sur la face externe de la jambe, dans la direction du péroné, depuis l'union du quart supérieur avec les trois quarts inférieurs, jusqu'à la base de la malléole externe. Division de la peau, du tissu cellulaire et de l'aponévrose.

2° Isolement des muscles péroniers latéraux dans leur moitié inférieure. Section transversale du long péronier latéral à l'union de son tendon avec le corps du muscle. Création d'une boutonnière traversant toute l'épaisseur du muscle jumeau, à 1cm,5 de son bord externe, et introduction du bout périphérique du tendon péronier dans cette boutonnière, où il est fixé par trois points de suture au catgut.

3° Section transversale du tendon du court péronier latéral un peu au-dessus de la malléole; introduction du bout périphérique de ce tendon coupé dans une boutonnière pratiquée au long péronier latéral et suture au moyen d'un fort catgut.

Je terminai l'opération par la suture de la plaie, par la section sous-cutanée de l'aponévrose plantaire et du court fléchisseur, et par l'application d'un appareil plâtré immobilisant le pied dans le redressement.

Malgré une légère suppuration que j'attribue à l'influence fâcheuse que la paralysie exerce sur la vitalité des tissus, la guérison ne se fit pas attendre, et, six semaines après l'opération, l'enfant quittait l'hôpital dans un état très satisfaisant; la direction du pied était régulière et la plante reposait à plat sur le sol. Toutefois, pour assurer la persistance du résultat obtenu et remédier au léger raccourcissement du membre, je conseillai l'emploi d'une bottine à tuteurs munie d'un talon plus élevé.

J'ai revu la petite opérée au mois de juin dernier, sept mois après l'opération, et je transcris ici le résumé des constatations faites à cette époque. Le pied est absolument ferme. L'enfant peut lui imprimer des mouvements d'extension et de flexion, mouvements

limités cependant, à cause d'un certain degré de raideur tibio-tarsienne due à la longue immobilité. Il n'y a plus trace d'équinisme et le pied touche le sol sans effort par toute sa face plantaire. Le renversement et la rotation en dedans sont complètement corrigés, le bord externe n'est plus abaissé, la claudication est à peine sensible. Les deux photographies que je soumets à la Société, quoique fort imparfaites au point de vue artistique, donnent une idée exacte de l'état du pied avant et après l'opération.

En présence de ce résultat, on peut affirmer que la transplantation tendineuse est appelée à rendre de réels services dans le traitement des pieds bots paralytiques. La manière de pratiquer l'anastomose devra varier évidemment suivant les cas, c'est-à-dire suivant que tels groupes de muscles auront été frappés par la paralysie, tandis que tels groupes auront conservé leur contractilité. C'est ainsi que dans la première opération de Nicoladoni, il s'agissait d'un pied bot talus valgus par paralysie des jumeaux et du soléaire; le chirurgien viennois parvint à corriger en bonne partie cette difformité par la section du tendon d'Achille et par la transplantation du bout périphérique de ce tendon sur les muscles péroniers dont la force contractile était restée intacte (*). Dans un autre cas communiqué par Phocas à l'Académie de médecine de Paris (**), le chirurgien de Lille put corriger un pied bot valgus par paralysie du jambier antérieur, en introduisant le bout périphérique du tendon sectionné de ce muscle dans une boutonnière de l'extenseur propre resté indemne. Winckelmann a publié une observation analogue à la mienne (***), mais le procédé qu'il a suivi est un peu plus compliqué, ce chirurgien ayant détaché, aux dépens du jumeau externe, une large bande musculaire longitudinale afin d'en faire une sorte de muscle indépendant sur lequel il a greffé les bouts périphériques des péroniers latéraux paralysés. Mais quelle

(*) Nicoladoni, *Arch. f. klin. Chir.*, t. XXVII, p. 661.
(**) *Bull. de l'Acad. de méd. de Paris*, 19 sept. 1893.
(***) *Deutsche Zeitsch. f. Chir.*, t. XXXIX.

que soit la variété des cas, le principe de l'opération reste le même. Toujours il s'agit de greffer le bout périphérique d'un ou de plusieurs tendons mis hors de service par la paralysie, sur des muscles du voisinage dont la puissance contractile est intacte, de manière à détourner, au profit des muscles paralysés, une partie de l'énergie fonctionnelle de ceux que la maladie a respectés. Le muscle faible s'appuie sur le fort et lui emprunte une partie de sa force pour l'utiliser à son profit et rétablir sa fonction supprimée. L'idée est, à coup sûr, originale, et, s'il faut en juger par les quelques observations que nous connaissons, elle promet d'être féconde en heureuses applications.

L'UNION

DES

CELLULES NÉPHRIDIALES DES GLOSSIPHONIDES

ET

L'INDÉPENDANCE DU PRÉTENDU ENTONNOIR DES HERPOBDELLIDES

PAR

H. BOLSIUS, S. J.,
Professeur au Collège d'Oudenbosch (Pays-Bas).

La néphridie des Hirudinées est loin d'être comprise uniformément par tous les anatomistes et, après tant de travaux publiés dans des sens contradictoires, plusieurs veulent que la discussion demeure ouverte sur plusieurs points. Notre but, dans le présent travail, est d'apporter des faits qui nous semblent propres à jeter quelque lumière sur l'union des cellules néphridiales des *Glossiphonides* et l'indépendance du prétendu « entonnoir » des *Herpobdellides* (Néphélides).

Les observations relatives à la première question ont été faite uniquement sur des dissociations, parce que nos savants contradicteurs nous ont souvent adressé le reproche d'avoir négligé cette méthode. Cette accusation, il est vrai, tombait à faux; néanmoins, l'objet permettant en effet des dissociations, puisqu'il s'agit *d'éléments reliés les uns aux autres,* nous avons cru bon de nous rendre aux désirs de nos adversaires. Le résultat de ces nouvelles recherches est que nos explications antérieures se trouvent pleinement confirmées et même éclairées d'un jour nouveau.

Pour la seconde question, où il s'agit d'une *séparation d'éléments,* nous maintenons la méthode des coupes en séries d'objets

fixés *in toto*. C'est la seule manière d'échapper au reproche de produire nous-même, par des dislocations et des déchirements tenant au mode opératoire, la séparation et l'indépendance que nous cherchons à établir.

I

Un détail très discuté, dans l'anatomie des néphridies, c'est le mode d'union des cellules; nous voulons parler de la multiple liaison intercellulaire spécialement observée et décrite chez les *Glossiphonides* et qui se retrouve, dans ses traits généraux, chez les *Herpobdellides*.

Les observations et les conclusions exposées à cet égard dans nos mémoires de 1890, 1891 et 1892, ont été attaquées dernièrement par As. Oka, que nous citerons seul ici puisqu'il résume suffisamment les idées de l'école adverse.

« La conformation totale que Bolsius attribue à la néphridie, » dit cet anatomiste, est complètement fausse, comme Bourne » l'a déjà relevé à bon droit. Il nie l'unicité du canal néphri- » dien; il veut avoir observé, au lieu d'un seul canal, trois » canaux équivalents et parallèles qui parcourent une seule et » même série de cellules. Comme il apparait par ses figures et » par son texte, l'auteur se basait exclusivement sur l'observa- » tion de coupes en séries, et probablement en séries incom- » plètes. Il trouvait que les sections antérieure et postérieure » de la néphridie sont percées de trois canaux; néanmoins il ne » se doutait pas que ces trois canaux ne sont que des portions » diverses d'un seul et même canal unique... L'indication de » Bolsius, que chaque canal, au passage d'une cellule à l'autre, » forme un pont entre celles-ci, est déjà discutée et mise en » doute par Bourne; de même, je ne suis pas en état de la » constater [11]. »

Sans nous attarder à faire ressortir combien il importe peu au progrès de la question que tel observateur ne soit pas en état de constater un fait annoncé, ou que tel autre ait gratuitement élevé des doutes sur ce même fait, nous devons voir dans la

citation qui précède une preuve de l'importance exceptionnelle de la particularité ici en cause. L'union des cellules par *ponts* (nous avions dit par *commissures*, nous appropriant le terme dont s'était servi Osc. Schultze) n'est révoquée en doute que parce qu'elle est intimement liée à la conception globale de la néphridie des *Glossiphonides*. Notre devoir est d'en établir la réalité par de nouvelles preuves que nous désirons baser uniquement sur des dissociations.

Méthodes.

Une Glossiphonide entière, *légèrement* fixée à la solution mercurique de Gilson, et conservée dans l'alcool depuis plusieurs années déjà, est d'abord hydratée de nouveau, puis plongée dans l'acide nitrique à 10 ou 12 °/₀. Après vingt-quatre ou trente heures, elle est retirée de cette liqueur et secouée modérément avec de l'eau dans un tube à essais. Tout le corps se désagrège peu à peu, et parmi les débris mis en suspension dans cette manœuvre, on distingue aisément : des lambeaux d'épiderme, la trompe, l'intestin (souvent presque en entier), les muscles isolés et les néphridies, très fréquemment à peu près complètes.

Celles-ci sont pêchées à l'aide d'une pipette, disposées sur le porte-objet et débarrassées éventuellement, au moyen de soies fixées à l'extrémité des aiguilles à dissocier, des tissus étrangers aspirés en même temps.

De cette façon, nous obtenons des néphridies complètement isolées, et qu'il est facile de colorer par le carmin picro-aluné ou par d'autres teintures.

Inutile de dire qu'en même temps nous avons obtenu des organes ciliés reliés à leur cavité annexe, en bon état, mais séparés de la néphridie.

De semblables préparations ont été multipliées en proportion de la délicatesse de la recherche et jusqu'à ce que nous ayons obtenu des pièces démonstratives.

L'examen a été complété au microscope binoculaire dont les

propriétés stéréoscopiques nous ont paru singulièrement favorables dans l'étude de cet objet.

Les contours de nos dessins ont été relevés à la chambre claire de Nachet, et les ombres en ont été achevées à main libre, mais les yeux au binoculaire.

Observations.

Les figures 1 et 6 sont relatives à deux tronçons d'organes segmentaires de la *Glossiphonia complanata* (= *sexoculata*). Nous n'avons pas dessiné *en entier* les pièces de nos préparations, parce que les autres parties ne font pas ressortir les détails qui nous intéressent. Souvent le ruban néphridien, dans les dissociations, est contourné sur lui-même, et les endroits les plus remarquables sont alors très difficiles à déchiffrer.

Dans la figure 1, empruntée à la préparation n° 62 de notre collection, nous représentons par simple contour et à un faible grossissement, une portion comprenant six cellules consécutives, dont la position est telle que les « commissures » se présentent d'une façon favorable à notre examen.

Déjà il apparait clairement que toutes les cellules ne se tiennent ni par une large surface ni par un seul prolongement. Entre *b* et *c* et entre *c* et *d*, il y a pour le moins *deux* « commissures ».

Appliquons, pour l'étude des détails, un grossissement plus fort, et examinons les jonctions cellulaires. Nous obtenons les images dessinées figures 2 à 5.

Entre les cellules *a* et *b*, nous rencontrons clairement, au bas de la figure 2, une petite commissure, livrant passage à un canal de calibre assez faible. Pour les deux gros canaux, nous admettrons sans le discuter qu'ils passent simultanément par une large commissure.

Qu'on fasse une section microtomique dans cet objet, et dans le plan de la figure, et il est évident que cette section donnera exactement ce que nous représentions autrefois, dans la figure 6 de notre mémoire intitulé *Nouvelles recherches*, etc. [3].

Passons à la jonction de *b* à *c*, reproduite figure 3.

Ici la commissure inférieure est assez courte, mais très distante de l'autre. Celle-ci, beaucoup plus longue et plus large, contient deux canaux. Nous ne saurions affirmer si réellement elle est *unique* et indivise dans toute sa longueur. Il se pourrait que, comme nous allons le voir tout à l'heure, il y eût une division que la disposition entortillée nous empêche d'observer.

Mais admettons qu'elle soit unique; il n'en reste pas moins avéré que les cellules *b* et *c* sont unies par *plus d'une* commissure.

La jonction de *c* à *d*, dans la figure 4, nous fournit la preuve que deux cellules peuvent se tenir par *trois* commissures, conduisant chacune un canal. La première, en bas, va directement d'une cellule à l'autre; la deuxième, plus faible, entoure en partie la précédente et va rejoindre la cellule *d*, en arrière du plan du dessin; la troisième enfin, la plus puissante et la plus longue, s'unit aussi à la cellule *d* un peu en arrière.

La liaison des cellules *e* et *f* se faisait elle-même par *trois* commissures. Celle qui est représentée *entière* dans la figure 5 est simple à son point de départ de la cellule *e*, et à son arrivée en *f*; mais pendant le trajet il y a un endroit où elle s'est dédoublée, gardant dans chaque partie un canal, et accusant ainsi sa *duplicité typique*.

La troisième, qui aurait dû être la supérieure, se trouve être rompue dans notre préparation. Néanmoins le troisième canal, qui se voit par transparence, finit des deux côtés si brusquement, au bord même des deux cellules, qu'il est impossible de méconnaître que, là aussi, une commissure ait existé.

Pour écarter l'idée que de semblables dispositions pourraient se rapporter à un cas isolé et insolite, nous en produirons encore un exemple.

Voici, figure 6, un second tronçon de ruban néphridien, composé comme le précédent d'une suite de six cellules, présentant trois jonctions intéressantes; nous les avons dessinées sous un grossissement convenable (fig. 7 et 8).

Dans la figure 7, on remarque tout d'abord, entre les cellules

b et *c*, deux commissures largement séparées : l'une occupant la droite du dessin, assez courte, simple et avec un seul canal; une autre formant sur la gauche une large boucle: celle-ci beaucoup plus importante par toutes ses proportions et tortueuse, simple aussi dans la plus grande partie de son trajet, mais portant un indice évident de sa duplicité dans la petite lacune qui se voit près de la cellule *c*, entre les deux canaux.

Au passage de *c* à *d*, il nous est impossible, il est vrai, de débrouiller tous les détails. Mais en tous cas, point de doute qu'il n'y ait au moins un double tractus commissural. Avec le microscope binoculaire et en combinant convenablement les manœuvres de la vis micrométrique, du miroir et du condensateur, on parvient à distinguer avec netteté un court tronçon d'une commissure inférieure que l'on voit même, par transparence, se prolonger un peu de part et d'autre, sous l'une et l'autre cellule. Une autre commissure, plus importante, occupe le haut de la figure. Celle-ci est très sinueuse, un peu pelotonnée et d'ailleurs assez intensément colorée; ces diverses circonstances ne permettent ni de vérifier s'il en existe deux, superposées, ni de suivre sur la totalité de leur parcours les canaux intracellulaires.

Entre les cellules *d* et *e* (fig. 8), nous retrouvons les particularités déjà relevées dans le passage de *b* à *c* : en bas, une commissure simple, en haut, une autre dédoublée près de la cellule *e*. Les trois canaux se voient assez distinctement par transparence, se dirigeant chacun vers une commissure distincte.

La figure 9 reproduit un détail que nous empruntons à notre préparation n° 562. Nous omettons d'indiquer les canaux, et nous le donnons uniquement pour mettre sous les yeux des boucles commissurales d'une longueur encore plus considérable que celles des figures précédentes.

A un certain niveau du ruban néphridien, il se présente régulièrement une *immense commissure*, contenant deux canaux, à côté d'une petite commissure simple qui conduit le troisième canal. Dans les figures 11 et 13, nous reproduisons les dessins qui ont trait à ce point; elles sont tirées de notre réponse à Bourne [5]. Nous y reviendrons à la fin de ce mémoire.

Discussion.

Les constatations précédentes fournissent, croyons-nous, la preuve matérielle que la jonction des cellules du ruban néphridien, au moins dans la partie moyenne de son trajet, se fait *typiquement* par trois commissures. Ces tractus, très variables d'aspect et de grandeur et diversement enchevêtrés, ne sont pas d'ailleurs trop difficiles à mettre en évidence et nos préparations nous les fournissent en nombre.

Nos contradicteurs cependant, pas plus que nos devanciers, n'ont constaté ce fait. O. Schultze et Bourne ont bien remarqué l'énorme commissure dont nous parlions tout à l'heure, mais non les *multiples* commissures, entre les cellules. Leuckart [10] n'accorde aucune attention à ce détail, montrant assez par là qu'il ne l'a point vu; et Oka [11] le révoque en doute parce qu'il n'a pu l'observer.

Comment s'explique une telle divergence de résultats, dans l'étude d'un même objet?

Il se peut qu'on doive la mettre sur le compte d'un *fait*, pour une partie, et sur celui d'une *théorie*, pour l'autre partie.

A. Elle peut tenir à *un fait*.

Une assez longue expérience nous a persuadé que dans les dissociations qui se font à l'aide d'aiguilles, il est très malaisé d'obtenir des préparations montrant nettement les détails que nous venons de décrire. Le tissu néphridien, consistant en un simple ruban de cellules en chapelet, est excessivement délicat; les commissures surtout ne supportent pas un traitement aussi rude, cytologiquement parlant, que celui des pointes d'acier. C'est pourquoi, après bien des préparations manquées, nous avons eu recours à des soies, bien plus flexibles et plus fines; et encore, la figure 5 l'atteste, on peut faire des dégâts dans la préparation. Nous supposerons donc que par suite de manœuvres trop rudes, eu égard à la délicatesse de l'objet, les anatomistes qui ont procédé par dissociation n'ont obtenu intacts, en général, que les tronçons de néphridies où les tractus commissuraux

étaient le plus robustes, c'est-à-dire ceux où existaient de larges fusions latérales, des types représentés dans nos figures 2 et 7, entre les cellules *a* et *b*, et dans la figure 8, entre *e* et *f*. Les commissures longues et grêles sont très facilement rompues.

Il ne faut point perdre de vue, d'une autre part, que la position et l'état de l'objet ne sont pas toujours favorables à l'observation des jonctions cellulaires. Il est fréquent de rencontrer des tronçons de huit à dix cellules où il est impossible d'observer une seule commissure. Cela tient à ce que les cellules ayant tourné, l'une par rapport à l'autre, autour de leur axe longitudinal, les tractus d'union se sont contournés et dissimulés.

Cette dernière remarque pourtant ne s'applique pas à la commissure *exceptionnellement longue* (fig. 11 et 15). Celle-ci échappe, par ses dimensions mêmes, au danger d'être entièrement cachée, d'où il suit qu'elle a été plus facilement observée.

B. La divergence peut tenir aussi à l'influence d'une *théorie*.

D'après ce que nous croyons avoir suffisamment constaté, il existe *trois* canaux dans le néphridium des *Glossiphonides*, s'avançant de pair à travers la série *unique* de cellules jusque près de l'extrémité inférieure, où ils confluent dans un conduit unique. Pour chaque canal, il existe *typiquement* une commissure séparée, bien que deux de celles-ci puissent se fondre ensemble, soit dans toute leur longueur, soit avec une interruption plus ou moins grande, comme l'indiquent nos figures 5, 7 et 8.

Dans notre explication, il se conçoit aisément qu'il existe *trois* commissures autonomes entre les cellules consécutives, comme il y a trois canaux autonomes.

Il n'en est pas ainsi dans les théories de nos contradicteurs. Ils admettent un canal *unique*, repassant à un même niveau deux ou trois fois, selon la section du néphridium.

Cette conception les a amenés à émettre, soit sur nos résultats, soit sur les faits les plus obvies qui leur étaient offerts par leurs propres préparations, des interprétations sur lesquelles nous devons brièvement nous expliquer.

Arn. Graf [9] rejette la théorie des *trois canaux* passant par

toutes les cellules du ruban néphridien, parce que, dans *certaines portions* de l'organe, il obtient des coupes qui en montrent *un* ou *deux* seulement.

Or, de pareils cas, loin de constituer une difficulté, doivent normalement se présenter dans la théorie telle que nous l'avons proposée. Des trois commissures qui unissent deux cellules consécutives, deux sont fréquemment réunies en très grande partie. Les anses ainsi constituées peuvent être longues et implantées en des points assez éloignés des extrémités des cellules. (Voir par exemple fig. 9 de ce travail, et fig. 25 de nos *Nouvelles recherches*, etc.) Dans ces cas, plusieurs coupes microtomiques peuvent affecter une cellule de manière à ne montrer dans son intérieur que la section de *deux* canaux, celle du *troisième* se trouvant en *dehors*, dans la coupe de la commissure. Le mal est précisément qu'on ne l'y reconnait pas, parce qu'il faudrait, au préalable, avoir admis la réalité des commissures communicantes.

Nous trouvons dans les figures de notre savant adversaire japonais A. Oka, une confirmation de notre explication, aussi complète que nous eussions pu la souhaiter.

En rapprochant de la figure 12, D de Schultze, la figure 13, γ de Oka et notre propre figure 11, *lc*, on acquiert la certitude que ce que ces auteurs ont appelé la *portion moyenne* « mediane Abtheilung » de l'organe, est en tout point *identique* avec ce que nous appelons la *commissure exceptionnellement longue*, conduisant deux canaux, *et dédoublée par endroits*.

Or, Oka, dans la figure 14, donne une *coupe transversale* de la « mediane Abtheilung », grossie trois cents fois. A ce grossissement, il obtient deux petits îlots, contenant chacun la section d'un canal et mesurant environ 5 millimètres de diamètre, tandis que toutes les *cellules* du néphridium, dessinées en très grand nombre dans ce travail, au même grossissement, ont un *diamètre trois, quatre et cinq fois plus grand*.

Évidemment, il s'agit ici d'une coupe pratiquée à travers la longue commissure (fig. 15), précisément à un niveau tel que *x-y*, où elle s'est dédoublée. L'auteur a cru avoir taillé dans deux cellules perforées tandis qu'il n'avait rencontré qu'une

double commissure. L'énorme différence entre les diamètres, toute naturelle dans notre théorie, aurait dû, ce semble, lui inspirer quelques soupçons sur la validité de ses propres interprétations.

Il n'y a plus de motifs, aujourd'hui, pour nous arrêter à ces hypothèses compliquées, autrefois imaginées par Bourne pour accorder les faits avec la conception fondamentale d'un canal unique, et d'après lesquelles une section du ruban néphridien à un niveau où existent *trois anses du canal* offrirait à l'observation une cellule enveloppante et deux cellules enveloppées, chacune perforée de son canal. Ces idées sont abandonnées en partie par l'auteur lui-même [8] et en totalité par les autres anatomistes.

Mais les défenseurs de *l'unicité* d'un canal revenant sur lui-même, s'appliquent aujourd'hui à donner une autre interprétation.

Le canal, disent-ils, est unique d'un bout à l'autre de l'organe, et *logé dans une cellule perforée*, à laquelle fait suite chaque fois une autre cellule perforée. Tout ce ruban ou chapelet de cellules successives est disposé de telle manière qu'à certains niveaux il passe *deux* ou trois fois, longeant toujours les anses d'un circuit précédent.

A ces niveaux, les cellules s'appliquent les unes contre les autres et finissent par s'unir en un seul corps. Si donc on pratique une section transversale, on aura sur la tranche vue de face *autant de cellules* accolées ou fusionnées qu'on voit de *canaux* sectionnés.

Fort bien, mais, dans cette hypothèse, les noyaux du moins ont dû garder leur individualité et on devrait les retrouver. Or, en règle générale, nous avons constaté, dès le début, que ces prétendues agglomérations de *trois* cellules ne contenaient qu'*un noyau*.

On nous a reproché de travailler sur des coupes microtomiques seulement, ce qui nous aurait empêché de bien constater les faits. N'insistons pas sur la fausseté de l'accusation, mais représentons aujourd'hui ce que nous trouvons *sur des dissociations* scrupuleusement préparées d'après les indications de nos contradicteurs.

La figure 10 nous montre deux cellules, comme notre préparation n° 561 en contient une dizaine, se tenant par des commissures et montrant nettement par transparence le *noyau unique* placé à mi-chemin à peu près dans la direction longitudinale des cellules.

Ni dans les coupes microtomiques, ni dans les dissociations nous n'avons pu retrouver une seule fois les *trois noyaux* des trois cellules originelles du ruban néphridien dont parle Oka [11], moins encore les *petits noyaux nombreux* dont parle Graf [9].

Quant à l'objection de ce dernier auteur, que nous aurions pris ces petits noyaux pour des sections de faibles canaux, nous n'y répondrons pas, puisqu'il est assez aisé de distinguer entre la section d'un canal *qui est vide* et celle d'un noyau de mêmes dimensions *qui contient des parties figurées.*

Conclusions.

1. Dans les dissociations délicatement préparées, il est assez fréquent de constater que les cellules néphridiennes des *Glossiphonides* sont reliées par trois commissures dont chacune livre passage à un canal intracellulaire. *C'est le cas typique* (fig. 4).

2. Il n'est pas rare que deux commissures se soient fondues en une seule, soit dans la totalité de leur longueur, soit dans la presque totalité, avec petites interruptions qui indiquent la *duplicité typique* (fig. 6, 7, 10).

3. Parfois les vestiges d'une commissure se réduisent à une toute petite lacune entre deux cellules successives (fig. 1, 7, 8).

4. Les cellules du ruban néphridien contiennent toutes, en règle générale, un *noyau unique* (fig. 10)

Remarque. Si *de temps à autre* nous avions trouvé *deux* noyaux (jamais *trois*), ils étaient de *même* grandeur et placés au même niveau transversal de la cellule. Ils s'expliquent aisément par le fait que les cellules néphridiennes sont des *cellules glandulaires* dans lesquelles la présence de deux noyaux est assez fréquente.

Il faut plutô s'étonner de la rareté du cas que baser sur lui une explication forcée.

5. Ce que nos contradicteurs ont nommé la *portion moyenne* « mediane Abtheilung » du néphridium n'est autre chose que la commissure exceptionnellement longue qui se rencontre régulièrement à un endroit déterminé de l'organe (fig. 11, 15).

II

Dans cette partie surtout, nous donnerons beaucoup de figures et peu de texte. La raison de cette apparente disproportion est dans la nature même du sujet traité. Il ne s'agit pas, en effet, *directement* d'une théorie ou d'une interprétation, mais d'un fait, ou, si l'on veut, d'une réalité objective absolument indépendante de toute spéculation. L'organe cilié chez les *Herpobdellides* est-il dépendant, oui ou non, des néphridies? Voilà la question à résoudre.

Il y a presque unanimité à présent parmi les auteurs (Leuckart, Graf, Oka) pour répondre *affirmativement*. Et cependant nous croyons avoir donné ailleurs (*) les preuves que jusqu'ici aucun auteur n'a produit une démonstration directe et évidente d'une telle continuité.

Au troisième Congrès zoologique international tenu à Leiden (16-21 septembre 1895), nous avons soutenu notre opinion personnelle, constante depuis l'origine de nos recherches, et directement opposée à la précédente; et à l'appui, nous avons produit les figures ci-jointes en même temps que les préparations d'où elles sont tirées. Malheureusement, le temps et d'autres circonstances qui ne dépendaient pas de nous, ont rendu impossible l'examen microscopique de ces dernières.

Trois séries de figures seulement sont présentées ici, comme à la section du Congrès. Elles ont été choisies, non comme *les meilleures* et *les plus évidentes*, mais tout simplement comme *suffisantes*, à notre avis, pour élucider le point en litige.

(*) *Les défenseurs de la continuité actuelle des néphridies et des « entonnoirs » dans les Hirudinées.* (ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES, 1895, t. XIX, 2e partie.)

Afin de fournir des figures plus expressives que celles publiées antérieurement, nous donnons ici bien des détails qui n'ont, à dire vrai, rien à démêler avec le point capital, mais qui apporteront, je l'espère, plus de clarté et une garantie de l'exactitude et du soin avec lesquels les dessins ont été faits.

A. La première série est composée des figures 1-4, provenant d'une suite de sections d'une *Herpobdella octoculata* (= *Nephelis vulgaris*) très jeune, inscrite dans notre collection sous le n° 553. L'animal en état de contraction ne mesure pas 1 millimètre de largeur maxima.

Les quatre sections dessinées épuisent entièrement l'*organe cilié* (l'*entonnoir* des auteurs). Il faudrait, par conséquent, que parmi ces quatre figures il y en eût au moins *une* montrant le *point d'union* entre l'organe cilié et la glande néphridienne. Or il n'en est pas ainsi.

Les sections de la néphridie, N, se trouvent partout *à gauche* de la cavité qui loge l'organe cilié; et celui-ci est partout *à droite*. Les cordons de tissu conjonctif, *tc*, par lesquels l'organe cilié est suspendu, et à travers l'un desquels, d'après Leuckart ([10], p. 715), la relation s'établirait entre l'*entonnoir* et la néphridie, — ces cordons sont tous très éloignés *de la portion la plus voisine* de la néphridie N, et leur fusion avec le tissu conjonctif du corps de l'animal se trouve aussi partout du côté opposé à celui où est placée la néphridie.

Une remarque que nous avons répétée souvent déjà, c'est que nos sections microtomiques sont pratiquées dans des sujets fixés et coupés *in toto*, et que, par conséquent, ce qui dans nos préparations se montre *à gauche* n'a pas pu se montrer *à droite in vivente*, puisque rien n'est déplacé par les manipulations. La contraction produite par le fixateur ne saurait être invoquée pour prétexter ici une rupture accidentelle : une rupture se constaterait aisément sur des préparations aussi nettes que celles dont il s'agit.

A la description de cette première série, nous n'avons rien à ajouter, si ce n'est que la même préparation n° 553 nous donne

encore en plusieurs endroits des images aussi démonstratives que celles que nous mettons sous les yeux du lecteur, et que, par conséquent, nous ne sommes point en présence d'un cas particulier. Nulle part, dans cet individu, on ne voit une relation directe; souvent la séparation est aussi évidente qu'ici.

B. La deuxième série contient huit figures : 1 à 8; elle est empruntée à une préparation qui porte dans notre collection le n° 547. L'individu fixé en entier mesurait, après fixation, plus de 4 centimètres en longueur.

Comme dans la série précédente, nous avons ajouté beaucoup de détails. On voit dans chaque figure le spermiducte, SD, dont les nombreuses sections ont été reliées par des lignes pointillées. Les muscles dorsaux, *md*, montrent que la cavité logeant l'organe cilié est ici refoulée vers la partie dorsale par le spermiducte. La présence de ce conduit nous renseigne quelque peu sur la région du corps où nous nous trouvons.

Les figures 1 à 7 contiennent toutes des sections de l'organe cilié; la figure 1 l'entame à peine, et la figure 8 n'en possède plus rien. Ici encore, une relation, si relation il y avait, entre la néphridie et l'organe cilié, devrait se montrer dans une des sections 2 à 7.

Or, que voyons-nous? Dans les sections 1 à 4, il existe des tronçons de la néphridie N. Mais ces tronçons occupent, par rapport à la cavité, l'*extrémité précisément opposée* à celle occupée par l'organe cilié, absolument comme dans la série déjà étudiée. Bien plus, la néphridie est *séparée* de la cavité par un intervalle considérable, où se placent du tissu conjonctif, des muscles, etc.

Dans la figure 5 seulement, un tronçon du canal néphridien apparaît plus à proximité de l'organe cilié, en N_1. Mais les figures suivantes, 6 à 8, prouvent de plus en plus que nous avons affaire à une anse du ruban néphridien où les *trois canaux* sont entièrement constitués, et que, par conséquent, nous sommes bien loin déjà de l'extrémité supérieure par laquelle, d'après tous, pourrait s'établir la relation avec l' « entonnoir ». Par surcroît, la séparation entre ce tronçon de néphridie et l'épithé-

lium, *ep*, de la cavité sanguine est fortement dessinée par le tissu *hyalin* qui passe entre l'épithélium et la néphridie, *teintés* tous les deux par le carmin picro-aluné.

Quant à la formation *cap* qui, depuis la figure 1 jusqu'à la figure 4, commence à se séparer de la cavité sanguine, et cela à peu près à l'endroit d'insertion des cordons conjonctifs qui suspendent l'organe cilié, ainsi qu'on le voit dans les figures 4 et 5, elles ne sauraient donner lieu à une méprise. C'est tout bonnement un capillaire, immédiatement reconnaissable à l'épithélium qui le constitue.

Les dispositions décrites se représentent encore une fois dans cette même préparation n° 547 qui contient en coupes longitudinales sériées, un tronçon de 29 à 30 anneaux, à partir de celui qui précède l'orifice ♂. D'autre part, on le retrouve avec la même netteté dans les préparations qui font suite à celle-ci. Nous sommes donc autorisé à conclure que ce deuxième individu, bien adulte, témoigne encore en faveur de la *séparation* complète entre l'organe cilié et la néphridie.

C. La troisième série de huit figures est destinée à un grossissement plus fort, quoique la pièce soit presque aussi grande que dans le cas précédent.

Ici nous donnons moins de détails étrangers au point débattu, mais par contre nous pouvons mieux détailler l'objet principal.

Il s'agit de l'organe cilié et de la néphridie d'une *Herpobdella* assez jeune, comme en témoignent les bourrelets *simples* de l'organe cilié dans les figures 4 à 7.

Le fond de l'organe cilié est tourné cette fois-ci du côté où apparaissent aussi les tronçons de la néphridie (fig. 3 à 7).

Mais d'abord il est très visible que ce *fond* ne touche nulle part (fig. 4 à 7) à la paroi de la cavité formée par les cellules épithéliales. Il n'y a donc pas d'union *directe* entre l'organe cilié même et les canaux de la néphridie. C'est d'ailleurs ce que Leuckart (*op. cit.*, p. 715) a déjà concédé.

Restent les cordons de suspension. Puisque l'extrême cordon *gauche* des figures 5 à 7 n'a à proximité aucun vestige de néphri-

die, nous n'avons à nous occuper que du cordon *droit* (fig. 4 et 5) et du cordon moyen de la figure 5.

Ce dernier ne crée pas de grandes difficultés, puisqu'il aboutit encore à un endroit dépourvu de tronçon néphridien.

Le cordon *droit* de la figure 4 passe entre les cellules épithéliales, juste à l'endroit où l'on voit une section de la néphridie. Mais cette section est si nettement délimitée et contient un canal si bien défini, qu'il n'y a pas l'apparence d'un doute qu'*ici* l'union et la relation cherchées n'existent pas.

Dans la figure 5, on retrouve encore ce cordon, et tout près de lui les canaux néphridiens. Puisque le tissu épithélial recouvre en partie le tronçon néphridien, il faut se servir de la vis micrométrique pour mettre au point les plans successifs, reproduits ici, figure 5, dans un seul dessin.

Avec les excellents objectifs apochromatiques de Zeiss, on met au point, sans aucune difficulté, d'abord la cellule épithéliale et puis le tronçon. Comme les colorations de ces deux objets tranchent fortement l'une sur l'autre, la cellule épithéliale étant *jaune*, le tronçon *rouge-carmin*, on arrive à constater aisément qu'ici encore le tronçon possède des contours nets, et nulle part interrompus.

Telle est, pensons-nous, la seule interprétation légitime des images que nous venons de faire passer sous les yeux du lecteur. Nous avons choisi à dessein ce cas particulier, persuadé que c'est sur une discussion insuffisante de semblables dispositions que s'appuient nos adversaires, Leuckart tout particulièrement.

D'ailleurs, en comparant les coupes successives que nous représentons dans nos figures, on se persuade indubitablement qu'on a affaire à un tronçon néphridien *continu*, et nullement à l'*extrémité supérieure* de la glande néphridienne. Par conséquent, à cet endroit, il ne peut être question de trouver le point d'union entre l'organe cilié et la néphridie.

Lorsque nous avons communiqué au Congrès cité plus haut les résultats que nous venons d'exposer dans la seconde partie de ce travail, nous avions l'avantage d'avoir pour président de

section le professeur A.-O. Kowalewsky, de Saint-Pétersbourg. Ce savant, dont l'opinion a ici d'autant plus d'autorité qu'il s'est lui-même spécialement occupé de la question, s'est trouvé d'accord avec nous pour *nier* la *continuité* entre l'organe cilié et la néphridie chez les espèces que nous avions étudiées (les Glossiphonides [6] et les Herpobdellides [5]). Dans la communication que le savant russe a faite à la suite de la nôtre, il en a même apporté de nouvelles preuves tirées d'un tout autre ordre que celui sur lequel nos conclusions sont basées, et qui viennent ainsi les corroborer puissamment.

BIBLIOGRAPHIE.

1. O. SCHULTZE, *Beiträge zur Anat. des Excret-apparates der Hirudineen.* (ARCH. F. MICR. ANAT., t. XXII, 1883.)

2. H. BOLSIUS, S. J., *Recherches sur la structure des organes segmentaires des Hirudinées.* (LA CELLULE, t. V, fasc. 2, 1890.)

3. ID., *Nouvelles recherches, etc.* (IBID., t. VII, fasc. 1, 1891.)

4. ID., *Anatomie des organes segmentaires des Hirudinées d'eau douce.* (ANNALES DE LA SOC. SCIENTIF. DE BRUXELLES, t. XVI, 2e partie, 1892.)

5. ID., *Les organes ciliés des Hirudinées.* — I. *L'organe cilié du genre Nephelis.* (LA CELLULE, t. VII, fasc. 2, 1892.)

6. ID., *Anatomie des organes ciliés des Hirudinées du genre des Glossiphonides.* (ANNALES DE LA SOC. SCIENTIF. DE BRUXELLES, 2e partie, 1894.)

7. ID., *A Word of reply to Mr Bourne's* « Review : *The Nephridia of Leeches* ». (ANATOM. ANZEIG., Bd. IX, 1894.)

8. A. G. BOURNE, in *Quart. Journ. of. Micr. Science.* April, 1893.

9. ARN. GRAF, *Beiträge zur Kenntniss der Excretions-organe von Nephelis vulgaris.* (JENAISCHE ZEITSCHR. F. NATURWISS., Bd. XXVIII, N. F., XXI, 1893.)

10. R. LEUCKART, *Die Parasieten des Menschen, etc.*, t. I, fasc. 5, 1894.

11. A. OKA, *Beiträge zur Anatomie der Clepsine.* (ZEITSCHR. F. WISSENSCH. ZOOLOGIE, t. LVIII, 1894.)

EXPLICATION DES PLANCHES.

Les dessins ont été exécutés à la chambre claire de Nachet, à la hauteur de la platine.

Le grossissement des figures 1, 6 et 11 est de ± 50 lin. (= A × oc. ord. 2 de Zeiss); celui des autres, de ± 170 lin. (= Apochr. à sec $\frac{3.0}{0.95}$ × oc. comp. 2 de Zeiss).

I

FIGURE 1. Tronçon de néphridium, formé de six cellules consécutives, *a-f*.

— 2. Détails de l'union *a-b* de la première figure.

Une commissure très petite est visible au bas de la figure.

— 3. Item de *b-c*.

Deux commissures d'inégale longueur rejoignent les deux cellules.

— 4. Item de *c-d*.

Trois commissures séparées de longueurs différentes et entortillées.

— 5. Item *e-f*.

La commissure supérieure est déchirée; l'inférieure est dédoublée en partie.

— 6. Autre tronçon de six cellules consécutives, *a-f*.

— 7. Détails des unions des quatre cellules *a-d*.

Entre *a-b*, faible commissure, comme dans la figure 2.

Entre *b-c*, deux commissures, celle de gauche dédoublée à un endroit.

Entre *c-d*, une commissure placée à une certaine profondeur, et une autre plus grande et tortueuse, cachant peut-être la troisième, ou bien dédoublée à quelque endroit.

— 8. Item de *d-f*.

Entre *d-e*, une commissure simple, et une autre dédoublée à un endroit, comme dans les figures 5 et 7.

Entre *e-f*, une faible commissure, comme dans la figure 2.

FIGURE 9. Exemple d'une commissure très longue et sinueuse.

— 10. Exemple de noyau unique dans chaque cellule.

II

FIGURE 11. Néphridium (probablement *entier*).

c. c. Commissures.

lc. Commissure longue.

N. B. La préparation ayant été détériorée, nous ne pouvons plus en profiter, sinon en reproduisant les figures 11 et 15 telles que nous les avons publiées autrefois [7].

— 12. Reproduction de la figure du mémoire de O. Schultze [1].

Le seul détail intéressant pour nous est constitué par la portion D, qui correspond à la portion *lc* de la figure précédente.

— 13. Reproduction de la figure 38 du mémoire de A. Oka [11].

Le détail qui nous intéresse est constitué par la portion γ, que l'auteur nomme « Mediane Abtheilung », et qui correspond à D de la figure 12 de O. Schultze et à *lc* de notre figure 11.

— 14. Reproduction de la figure 50 du même mémoire [11].

Légende de cette figure à la page 151 *op. cit.* :

Querschnitte durch die Medianabtheilung des Nephridiums von *Cl. complanata.* 300 ×.

— 15. La portion *lc* de notre figure 11, en détail.

I. La faible commissure simple.

II et III. Les deux autres commissures très longues, fusionnées sur la majeure partie du trajet, mais dédoublées à trois endroits.

a, b, c. La route des trois canaux.

x-y. Endroit où une section transversale produit l'aspect de la figure 50 de Oka, c'est-à-dire la section de deux commissures à diamètre beaucoup plus faible que le diamètre d'une cellule du néphridium. (Voyez fig. 14 ci-haut.)

II (*suite.*)

Première série. — Grossissement obj. apochr. à sec $\frac{3.0}{0.95}$ × oc. comp. 4 Zeiss (= ± 330 lin.).

Figures I[1] à I[4]. La partie principale est occupée par une section passant en plein par la cavité vésiculiforme qui contient l'organe cilié.

N. Tronçon de la néphridie, placé au côté opposé à celui qui est occupé par l'organe cilié. De ce dernier côté, il n'y a pas de tronçons néphridiens, si ce n'est en dehors du champ de la figure.

tc. Tissu conjonctif, supportant l'organe cilié. La figure 2 est faite sur un endroit très favorable, montrant les *deux* points d'insertion des cordons diamétralement opposés.

cap. Capillaire, en communication avec la grande cavité dans une coupe précédente.

I à V. Muscles groupés autour de la cavité, gardant à peu près les mêmes relations réciproques dans toutes les coupes.

III

Deuxième série. — Gross. A × oc. ord. 4 Zeiss (= ± 90 lin.).

Figures II[1] à II[8].

SD. Sections du spermiducte (voir le texte).

N. Tronçons de la néphridie, éloignés de l'organe cilié.

N_1. Tronçons de la néphridie, rapprochés de l'organe cilié.

ep. Épithélium (tissu botryoïdal), dans lequel, pour simplifier le dessin, nous avons omis les noyaux et lés contours des cellules qui sont à plus d'une assise. Ce dernier fait se constate surtout dans la figure 6, où le cordon de suspension circule, en se divisant, entre les cellules.

md. Muscles dorsaux longitudinaux.

cap. Capillaire sortant de la grande cavité.

IV

Troisième série. — Même grossissement que pour la première série.

Figure III[1] à III[8].

N. Tronçons d'une néphridie.

tc. Cordons de tissu conjonctif, supportant l'organe cilié.

ep. Épithélium de la grande cavité sanguine. La figure 1 entame ce tissu superficiellement; les suivantes descendent de plus en plus dans la cavité.

cap. Capillaire.

mv. Muscles ventraux longitudinaux.

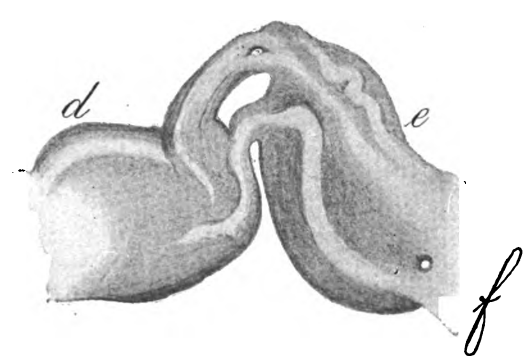


FIG. 8.

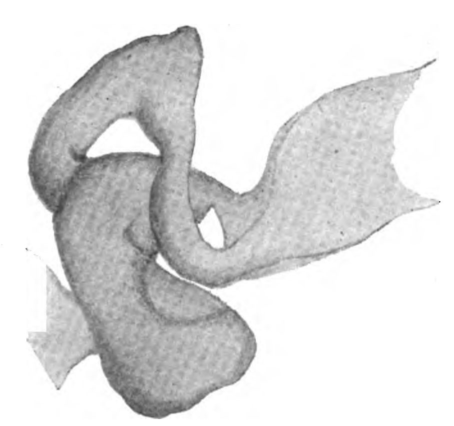


FIG. 9.

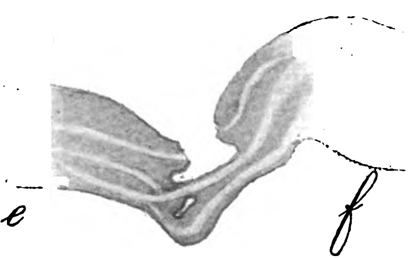


FIG. 5.

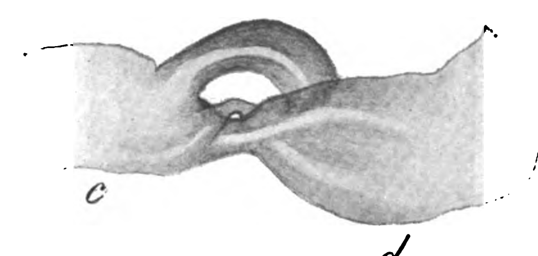
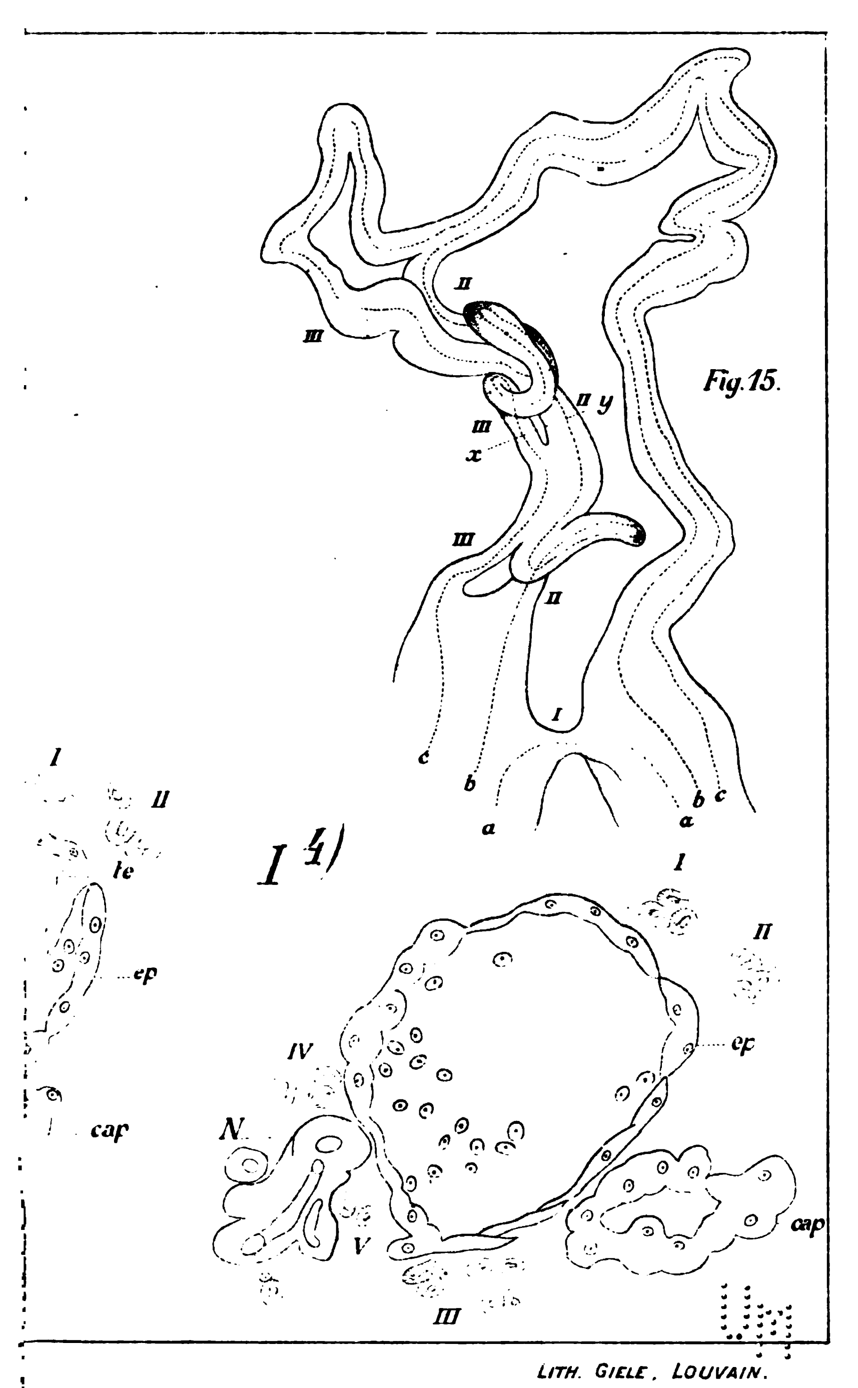
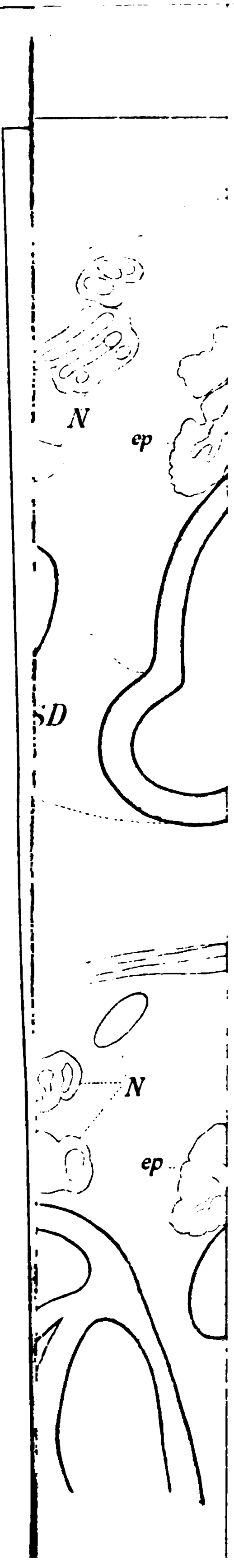


FIG. 4.



LITH. GIELE, LOUVAIN.


N
ep
SD
N
ep

LES
CHASSES DIPTÉROLOGIQUES
AUX ENVIRONS DE BRUXELLES

PAR

Fernand MEUNIER.

PREMIÈRE PARTIE

ANTHOMYINAE, SCHOENOMYINAE, MUSCINAE.

INTRODUCTION

Dans cette première notice, je signale un certain nombre d'espèces de *Anthomyinae*, de *Schoenomyinae* et de *Muscinae* de la faune des environs de Bruxelles.

J'ose croire que ces quelques renseignements entomologiques engageront les jeunes naturalistes à s'occuper de l'étude de nos mouches indigènes. Les différents matériaux que je ferai connaître au fur et à mesure du dépouillement de mes collections diptérologiques me permettront de rédiger par la suite le catalogue des espèces des régions de la haute, moyenne et basse Belgique, de la Campine, des Flandres, de la Hesbaye, de Tournai et du littoral de la mer du Nord.

Pour rendre ce travail plus complet, j'indique par la lettre H toutes les espèces qui ont été capturées en Hollande (*).

(*) M. le Dr Jean Jacobs possède une admirable collection de Diptères indigènes.

I. ANTHOMYINAE (*).

1. CARICEA, Robineau-Desvoidy.

1. *Tigrina*, Fabricius.
   Très commun partout aux environs de Bruxelles. H.
2. *Ciliatocosta*, Zetterstedt.
   Beaucoup plus rare que le précédent. Parc de Saint-Gilles.
3. *Humilis*, Meigen.
   Parc de Saint-Gilles, Uccle-Stalle. H.

2. COENOSIA, Meigen.

4. *Sexnotata*, Meigen.
   Pas commun. Uccle-Stalle, Linkebeek. H.

3. HOPLOGASTER, Rondani.

5. *Mollicula*, Fallen.
   Forest, Parc de Saint-Gilles. H.

4. MYCOPHAGA, Rondani.

6. *Fungorum*, Meigen, Fallen, R.-Desvoidy.
   Rare aux environs de la ville, une ♀ à Uccle-Stalle. H.

5. HOMALOMYIA, Bouché.

7. *Incisurata*, Zetterstedt.
   Parc de Saint-Gilles, Forest, Waterloo. H.
8. *Canicularis*, Linné.
   Extrêmement commune partout. Se capture sur les fenêtres des habitations. Cette espèce est très polymorphe. H.

(*) Dans cette liste, qui sert de contribution au catalogue des Diptères de Belgique, nous avons suivi la classification de Rondani (*Dipt. Ital. prodr.*, vol. VI, Parmae, 1877). Plus tard, lorsque nos matériaux nous permettront de rédiger le catalogue méthodique et synonymique des Diptères de la faune belge, nous modifierons notre travail d'après les mémoires de MM. Mik, Meade, Strobl, Stein, etc.

9. *Manicata*, Meigen.
1 ♂ à Uccle-Stalle. H.

10. *Scalaris*, Fabricius.
Pas commun aux environs de la ville. Parc de St-Gilles, Linkebeek. H.

6. LIMNOPHORA, R.-Desvoidy.

11. *Diaphana*, Wiedemann.
1 ♂ à Forest (*).

7. HYDROPHORIA, Desvoidy.

12. *Anthomyiea*, Rondani.
Un ♂ à Uccle-Stalle. Cette espèce est très commune à Nantes (D'après plusieurs spécimens envoyés par M. Bleuse) à M. le Dr Jean Jacobs.

13. *Conica*, Wiedemann.
Partout aux environs de la ville. H.

14. *Linogrisea*, Meigen.
Uccle-Stalle, Forest, Waterloo. H.

15. *Strigosa*, Fabr. (*Hylemyia strigosa*, Schiner).
Parc de Saint-Gilles, Forest, Linkebeek. H.

8. HYLEMYIA, Desvoidy.

16. *Seticrura*, Rondani.
Un ♂ à Uccle-Stalle et déterminé par M. Meade.

17. *Pullula*, Zetterstedt (*Anthomyia pullula*, Schiner).
♀ et ♂ à Forest.

18. *Hilaris*, Fallen.
Uccle-Stalle. Rare. H.

19. *Coarctata*, Fallen.
Uccle-Stalle. Cette espèce a beaucoup de ressemblance avec *H. strigosa*, Fabricius. H.

9. CHORTOPHILA, Macquart.

20. *Longula*, Fallen.
Parc de Saint-Gilles.

(*) Les Limnophores sont des *Anthomyinae* très difficiles à classer. Jusqu'à ce jour, on ne possède pas encore un travail complet sur ces petits et curieux Diptères.

21. *Varicolor*, Meigen.
Uccle-Stalle.

22. *Histrio*, Zett.
Un ♂ à Mousty (lez-Ottignies) (*), capturé pendant une excursion faite en compagnie du D[r] Jacobs.

10. HAMMOMYIA, Rondani.

23. *Albescens*, Zett.
J'ai capturé cette espèce sur un talus sablonneux de Buysinghen. Rare. Cet anthomyzide se prend sur le sable des dunes.

11. LISPA, Latreille (Lispe, Schiner).

24. *Crassiuscula*, Loew.
Très rare. Groenendael.

25. *Tentaculata*, Meigen.
Uccle-Stalle, Forest. H.

12. ARICIA, R.-Desvoidy. (Yetodesia, Rondani).

26. *Lucorum*, Fallen.
Commun aux environs de Bruxelles. H.

27. *Incana*, Wiedemann.
Groenendael, La Hulpe, Forest, Parc de Saint-Gilles. H.

28. *Albolineata*, Fallen.
Se capture aussi fréquemment que le précédent. H.

29. *Signata*, Meigen.
Uccle-Stalle, Forest. H.

30. *Pallida*, Zetterstedt.
Partout aux environs de la ville. H.

31. *Scutellaris*, Fallen.
Uccle-Stalle. Je considère *A. populi*, Schiner, comme variété de cette espèce. H.

(*) *Bull. de la Soc. entomologique de France*, p. CCVII. Paris, 1892.

13. POLYETES, Rondani.

32. *Lardaria,* Fabricius.
Très commun au commencement du printemps dans toute la banlieue de Bruxelles. H.

14. HYDROTAEA, R.-Desvoldy.

33. *Irritans,* Fallen (*).
♀ et ♂ Uccle-Stalle. H.

34. *Armipes,* Fallen.
♀ et ♂ à Uccle-Stalle. H.

35. *Palaestrica,* Meigen.
Uccle-Stalle (**). H.

36. *Dentipes,* Meigen.
Forest, Parc de Saint-Gilles.

37. *Ciliata,* Fabricius.
Assez rare aux environs de Bruxelles (*Onodonta ciliata,* Rondani). H.

38. *Occulta,* Meigen.
Rare (*Onodonta occulta,* Schiner). H.

15. SPILOGASTER, Macquart.

39. *Meadei,* Meunier (***).
♀ et ♂ à Westerloo (Campine anversoise).

40. *Uliginosa,* Fallen.
Uccle-Stalle, Forest, Linkebeek. H.

41. *Duplaris,* Zett.
Un ♂. Cette espèce a de la ressemblance avec *S. duplicata,* Meigen. H.

42. *Separata,* Meigen.
Une ♀ au Parc de Saint-Gilles. H.

43. *Quadrum,* Fabricius.
Uccle-Stalle, Forest, Parc de Saint-Gilles. H.

(*) La détermination de cette minuscule espèce a été contrôlée par l'éminent diptériste M. le Dr Meade, de Bradford.

(**) F. Meunier, *Bull. de la Soc. entomologique de France,* p. xxviii. Paris, 1893.

(***) Id., *Bull. de la Soc. entomologique de France,* p. clviii, Paris, 1893, et p. ccii, Paris, 1894.

44. *Pagana*, Fabricius.
Forest, Uccle-Stalle, Parc de Saint-Gilles. H.

45. *Urbana*, Meigen.
Commun partout aux environs de la ville. Le *S. angelica*, classé par Schiner comme espèce distincte, est peut-être une variété du *S. urbana*. Cette mouche est très polymorphe. H.

46. *Impuncta*, Fallen.
Une ♀ à Uccle-Stalle. H.

16. ACHANTHIPTERA, Rondani.

47. *Inanis*, Fallen.
Extrêmement rare. Une ♀ à Uccle-Stalle. H.

17. ANTHOMYIA, Meigen.

48. *Bicolor*, Fallen.
Uccle-Stalle, Forest. H.

49. *Pluvialis*, Linné.
Cette espèce est rare aux environs de la ville. Linbebeek. H.

50. *Radicum*, Lin.
Ce petit anthomyzide peut être facilement confondu avec une foule d'espèces voisines telles que *A. fugax*, Meigen. Partout sur les ombellifères. H.

51. *Transversa*, Fallen.
Un ♂ à Groenendael.

Observation. — J'estime qu'il doit y avoir environ cinquante espèces d'*Anthomyia* (ou genres très voisins) en Belgique.

Les matériaux que je possède sur ce genre sont encore trop incomplets pour donner la liste des espèces des environs de Bruxelles. Plusieurs entomologistes distingués se sont occupés de ces Diptères, mais leur étude et la synonymie sont si embrouillées que ces petits êtres feront encore pendant longtemps le désespoir des classificateurs. Le grand genre *Anthomyia*, Meigen, a été démembré par Rondani, Mik, Strobl, Meade, et ces différents auteurs sont loin de s'entendre sur la valeur des caractères génériques de ces mouches. Les uns, comme l'éminent diptériste Zetterstedt, ont placé les espèces d'Anthomyzides

dans des genres renfermant des formes très hétérogènes, et les autres, à la suite de Robineau-Desvoidy, ont divisé ces insectes d'une manière trop artificielle. Malgré ces travaux et le beau mémoire de Stein, sur le genre *Homalomyia*, Bouché, les documents de cette partie de la science diptérologique sont encore trop fragmentaires pour qu'on puisse rédiger actuellement la monographie des espèces paléarctiques du genre *Anthomyia*, Meigen.

II. SCHOENOMYINAE.

18. SCHOENOMYZA, Haliday (*).

52. *Littorella*, Fallen.

Un exemplaire de ce rare Diptère a été capturé au Parc de Saint-Gilles.

III. MUSCINAE.

19. MESEMBRINA, Meigen.

53. *Meridiana*, Linné.

Forest, Uccle-Stalle, Erps-Querbs. H.

20. CALLIPHORA, R.-Desvoidy.

54. *Vomitoria*, Linné.

Très commune partout en Belgique. H.

55. *Erythrocephala*, Meigen.

Beaucoup plus rare que la précédente. H.

21. POLLENIA, R.-Desvoidy.

56. *Vespillo*, Fabricius.

J'ai capturé cette espèce en grande abondance à Mousty, en 1894, en compagnie du savant diptériste, M. le Dr Jean Jacobs. H.

(*) F. Meunier, *Observations sur* Schoenomyza littorella, Fallen (*Bull. de la Soc. entomologique de France*, p. CCXCIII. Paris, 1895).

57. *Rudis*, Fabricius.
Très commune à partir de la fin du mois de mai.

58. *Varia*, Meigen.
Une ♀ à Linkebeek.

22. MUSCA, Linné.

59. *Domestica*, Linné.
Cette espèce est commune dans le nord et le midi de l'Europe et elle a été introduite dans les pays chauds par les navires (*).

60. *Corvina*, Fabricius.
Un peu partout pendant l'été. Uccle-Stalle, Groenendael, Mousty, Forest.

23. CYRTONEURA, Macquart.

61. *Stabulans*, Fallen.
Uccle-Stalle, Parc de St-Gilles, Groenendael, La Hulpe, Linkebeek. H.

62. *Hortorum*, Fallen.
Espèce très commune dans tout le Brabant. H.

63. *Curvipes*, Macquart.
Groenendael, Mousty, Linkebeek, Parc de Saint-Gilles. H.

64. *Caesia*, Meigen.
1 ♂ à Westerloo (Campine anversoise).

24. STOMOXYS, Geoffroy.

65. *Calcitrans*, Linné.
Espèce très commune partout en Belgique. H.

25. MYOSPILA, Rondani.

66. *Meditabunda*, Fabricius.
Un ♂ au Parc de Saint-Gilles.

26. LUCILIA, R.-Desvoidy.

67. *Caesar*, Linné.
Partout en Belgique. H.

(*) Pour les diptères cosmopolites voir : GIGLIO-TOS, *Mission scientifique de M. Ch. Alluand aux îles Séchelles* : DIPTÈRES. (*Ann. de la Soc. entomologique de France*, fasc. II. 1895.)

68. *Coerulea,* Macquart.
Parc de Saint-Gilles, Forest.

69. *Sericata,* Meigen.
Forest, Linkebeek, Groenendael. H.

70. *Nobilis,* Meigen.
Un peu partout aux environs de Bruxelles. H.

71. *Rufescens,* Meigen.
Assez rare. Linkebeek, Uccle-Stalle.

72. *Sylvarum,* Meigen.
Un ♂ à Ottignies. H.

73. *Meigenii,* Schiner. (*Caesarion,* Mg.).
Un ♂ à Uccle-Stalle. H.

74. *Cornicina,* Fabricius.
Comme le précédent. H.

75. *Fulgida,* Zetterstedt.
Deux ♂ à Groenendael.

Observation. — La détermination spécifique de plusieurs *Lucilia* est très laborieuse. Pour étudier le polymorphisme de ces Diptères, il est nécessaire d'examiner un grand nombre d'individus de la même espèce. Ces mouches ne seront sérieusement connues qu'après l'étude anatomique de leurs organes génitaux : Robineau-Desvoidy nous a laissé une classification très embrouillée et peu naturelle de ces *Muscinae.* (Histoire naturelle des Diptères des environs de Paris, 2 vol. in-8°). Paris, 1863 (*Œuvre posthume.*)

27. PYRELLIA, R.-Desvoidy.

76. *Cadaverina,* Linné.
Cette espèce n'est pas très commune aux environs de Bruxelles. H.

77. *Serena,* Meigen.
Beaucoup plus rare dans la banlieue de Bruxelles que *Pyrellia cadaverina.* H.

78. *Aenea,* Zetterstedt.
Très rare. Une ♀ à Groenendael. H.

28. GRAPHOMYIA, R.-Desvoidy

79. *Maculata,* Meigen.
Rare. Groenendael. H.

SUR
LES PRÉTENDUES EMPREINTES D'ARACHNIDES
DU CORALLIEN DE LA BAVIÈRE

PAR

Fernand MEUNIER.

Dans deux intéressantes notices, Meyer (*) et Roth (**) ont fait connaître quelques empreintes d'Arachnides de l'étage corallien du jurassique de Solenhofen. Le dernier de ces paléontologistes, après avoir décrit plusieurs Palpipes (Phalangites), ne sait se décider si ces restes d'Arthropodes appartiennent à des Crustacés ou à des Arachnides. C'est ainsi qu'il dit d'abord que « palpipès wurde seine Stelle eher bei den Krebsen als bei den Spinnen einnehmen » et qu'il termine en mentionnant que « das Thier war keine wirkliche Spinnen ».

En 1873, Seebach (***) signale que les palpipes sont des pétrifications de Crustacés. Dans le catalogue de la collection paléontologique du Musée Teyler (IV), ces Articulés sont aussi mentionnés sous le nom d'Arachnides.

Depuis cette époque, personne, à ma connaissance, ne s'est occupé des Palpipes mésozoïques.

(*) MEYER, *Zur* Palpipes priscus *aus dem lithographischen Schiefer in Bayern.* (PALAEONTOGRAPHICA, pp. 299 à 304, Taf. 50, fig. 1-4. Cassel, 1863.)

(**) ROTH, *Ueber fossile Spinnen des lithographischen Schiefers.* (NEUES JAHRB. MINERAL. München, 1851.)

(***) SEEBACH, *Ueber fossile Phyllosome von Solenhofen.* (ZEITSCHR. DEUTSCH. GEOLOG. GESELLSCH., pp. 340 à 346, pl. 8. Berlin, 1873.)

(IV) Dr WINKLER, *Catalogue systématique de la collection paléontologique*, 4e livraison p. 421. Haarlem, 1865; *Id.*, 2e supplément, p. 83. Haarlem, 1876.

Je vais faire quelques remarques au sujet de ces prétendues empreintes d'Arachnides qui m'ont été obligeamment communiquées par M. le Dr T.-O. Winkler.

1, n° 6566 (*Archives du Musée Teyler*, p. 421. Haarlem, 1865; *Id.*, p. 83. Haarlem, 1876.)

Empreinte très fruste et encore garnie de chitine. En 1865, ce fossile est désigné sous le nom de *Palpipes priscus*, Roth; et en 1876, le Dr Winkler (d'après Weyenberg) l'énumère comme étant le *Palpipes cursor*, Roth. Comme il n'existe que des pattes sur le calcaire, il suffit de dire qu'elles semblent être celles d'un Crustacé.

2, n° 6550 (*Id.*, p. 421. Haarlem, 1865).

Palpipes priscus, Roth. Les pattes sont arrangées assez symétriquement de chaque côté du céphalothorax et de l'abdomen. Ces deux organes ne sont pas visibles, mais on peut parfaitement se les représenter par la pensée, si on considère la distance qui sépare les pattes entre elles. Ces fragments sont probablement des parties du corps d'un Crustacé.

3, n° 6565 (*Id.*, p. 421).

Classé par Weyenberg comme le précédent. Les pattes sont disposées en deux faisceaux courbés sur le calcaire. Cette pétrification se place avec plus de certitude parmi les Crustacés *Palpipes priscus*, Roth.

4, n° 6564 (*Id.*, p. 421).

Semblable à la précédente, mais le faisceau antérieur est beaucoup plus distinct que le postérieur.

5, n° 6568 (*Id.*, p. 421).

Palpipes priscus, Roth. Les pattes placées d'un seul côté. Empreinte de Crustacé.

6, n° 6577 (*Id.*, p. 421).

Les pattes sous forme de deux faisceaux. Pétrification de Crustacé désigné sous le nom de *Palpipes priscus*, Roth.

7, n° (pas indiqué).

Toutes les pattes sont réunies sous la forme d'un tronc (céphalotorax) d'où elles émergent comme des radicelles. Ce fossile est une empreinte de Crustacé. *Palpipes priscus*, Roth.

8, n° 6449 (*Archives du Musée Teyler*, p. 83. Haarlem, 1876).

Palpipes cursor, Roth. Empreinte très fruste. Les pattes rayonnent visiblement du centre. C'est avec la plus grande légèreté que Weyenberg a donné un nom à cette pétrification. On doit se borner à dire qu'il semble que ces restes d'Articulés ont appartenu à des Crustacés.

9, n° 6567 (*Id.*, p. 421. Haarlem, 1865).

Les pattes sont assez enchevêtrées et paraissent devoir appartenir à des Crustacés. *Palpipes priscus*, Roth.

10, n° 6457 (*Id.*, p. 83. Haarlem, 1876).

Palpipes cursor, Roth. Empreinte très effacée. Le facies des pattes rappelle celui des Arthropodes crustacés.

11, n° 6576 (*Id.*, p. 421. Haarlem, 1865).

Les pattes sont assez bien groupées sur le calcaire lithographique. En ne considérant que l'ensemble de ces appendices et du céphalothorax qui a dû exister entre eux, on est enclin à ranger cette pétrification avec les Arachnides. *Palpipes priscus*, Roth.

12, n° 6575 (*Id.*, p. 421).

Analogue au précédent. *Palpipes priscus*, Roth.

13, n° 6551 (*Id.*, p. 421).

Toutes les pattes sont enchevêtrées. Ce fossile est probablement un Crustacé.

14, n° 6476 (*Id.*, p. 83. Haarlem, 1876).

Chelifer fossilis, Weyenberg. En étudiant ce fossile au moyen de divers grossissements, on peut seulement se convaincre qu'il est référable à la classe des insectes. Des traces de segmentation sont bien visibles sur la pierre. Tout l'animal est très fruste.

15, n° 10338.

Pattes de Crustacés.

16, n° 6547 et 6548 (*Id.*, p. 83. Haarlem, 1876).

Hasseltites primigenius, Weyenberg. (*Hasseltia primigenia*, d'après le catalogue du Dr Winkler.)

Il est impossible de ranger cette empreinte et contre-empreinte dans la classe des Arachnides. Weyenberg mentionne ce qui suit au sujet de son *Hasseltites* :

« Cette araignée me paraît appartenir à la famille des Agélides et peut-être ne serait-elle pas mal placée dans le voisinage des Argyronètes (*) ! »

Ce même auteur ne dit rien des longs cils qui se trouvent à l'extrémité des pattes. Le facies de ces êtres étant si singulier, je ne serais pas étonné d'apprendre que ces fossiles n'appartiennent pas à l'embranchement des Arthropodes.

Conclusions. Sur les schistes du calcaire lithographique de la Bavière, on rencontre assez fréquemment de minuscules empreintes de pattes de Crustacés que Meyer et Roth considéraient comme des restes d'Arachnides phalangides.

Ces Arthropodes n'ayant pas laissé de traces de leur corps sur la pierre, on ne sait avec quel ordre et quel genre de crustacés ces animaux ont le plus d'analogie.

Les *Palpipes priscus* et *cursor* (Roth), et le *Hasseltites primigenius* (Weyenberg) doivent être encore placés parmi les mythes paléo-entomologiques.

(*) Weyenberg, *Sur les insectes fossiles du calcaire lithographique de la Bavière qui se trouvent au Musée Teyler*, p. 253, pl. XXXIV, fig. 1. Haarlem, 1869.



QUELQUES RÉFLEXIONS

AU SUJET DU

NOUVEAU SYSTÈME DE CLASSIFICATION DES INSECTES

« MUSCIDES »

DE M. GIRSCHNER

PAR

Fernand MEUNIER.

Dans son remarquable essai de chaetotaxie ou de l'arrangement des macrochètes chez les Diptères, M. Osten-Sacken a divisé ces insectes en *Chaetophora* et en *Eremochaeta* (*). En 1893 et dans un article de *Illustrierte Wochenschrift für Entomologie*, (avril 1896), M. Girschner étudie la disposition des soies rigides implantées sur les diverses parties du thorax des mouches, et le mode d'arrangement des plaques médianes et latérales de la segmentation ventrale. En prenant un *Tachininae* du genre *Masicera* (Brauer et Bergenstamm), on observe les macrochètes suivants :

1. Acrostichal.	6. Post-alaire.
2. Dorso-central.	7. Post-huméral.
3. Huméral.	8. Présutural.
4. Intra-alaire.	9. Supra-alaire.
5. Noto-pleural.	10. Scutellaire.

Au moyen de ce nouveau système de classification, MM. Verrall, Mik, Brauer, Girschner et quelques autres ont fait con-

(*) OSTEN-SACKEN, *An Essay of Comparative Chaetotaxy, or the Arrangement of Characteristic Bristles of Diptera* (TRANS. ENT. SOC, p. 497. London, 1884.)

naître beaucoup plus sérieusement les *Anthomyinae*, les *Tachininae*, les *Dolichopodidae*, etc. Déjà en 1859, dans ses travaux diptérologiques, Rondani décrivait génériquement et spécifiquement les cils des muscides d'Italie.

Si, actuellement, le plus grand nombre des entomologistes admettent que les macrochètes peuvent servir à la détermination de certains groupes de mouches, feu Jean-M. Bigot ne partageait pas cette manière de voir. Voici ce qu'il m'écrivait à ce sujet en 1891 (*) : « ..... Je regrette profondément la création inutile d'une foule de genres à subdivisions dénommées, établies pour la plupart d'après des particularités organiques insignifiantes; par exemple, sur la considération de ces appendices appelés chètes ou macrochètes et que MM. Verrall, Mik, Kowarz, Bergenstamm, Brauer et quelques autres extracteurs de quintessence admettent au rang d'organes, suivant en cela, comme M. de Panurge, les traces du baron Osten-Sacken ..... » Et plus loin : « Je puis me tromper à cet égard, mais jusqu'à nouvel ordre, je garde mes opinions. »

Je suis loin d'admettre la sentence portée par Bigot au sujet de la valeur scientifique des macrochètes, mais en approuvant partiellement les idées de MM. Osten-Sacken, Mik et de leurs disciples, je crois cependant nécessaire d'indiquer les nombreux desiderata de la méthode employée par ces éminents diptéristes.

La question des macrochètes est plus difficile à résoudre lorsqu'on veut grouper toutes les familles de Diptères. On énumère d'abord les caractères extraits des diverses parties du corps, mais les genres formés parmi les Diptères *Chaetophora* auront naturellement une autre valeur scientifique que ceux établis dans les *Eremochaeta*. Par le système chaetotaxique, l'étude des Muscides devient moins laborieuse, et la classification diptérologique générale plus superficielle, puisqu'on n'examine pas ordinairement les caractères anatomiques et physiologiques de ces êtres. Notre manière de comprendre le groupement des mouches est basée sur les lois biologiques qui régissent ces

(*) Bigot, Lettre inédite du 18 août 1891.

Arthropodes. Écartons-nous momentanément de l'entomologie systématique et faisons de l'anatomie comparée. L'étude des segments ventraux nous fournit des renseignements plus sérieux que celle des macrochètes. Ces organes jouent un rôle considérable pendant le vol, la marche et les autres adaptations de ces animaux. Les phénomènes respiratoires si minutieusement étudiés par M. F. Plateau (*) peuvent servir de contribution à l'édification d'une nouvelle classification des insectes Diptères. Les organes génitaux sont construits sur le même plan général dans tous les ordres d'insectes, mais les petites différences morphologiques nous permettent souvent de distinguer les genres entre eux. L'anatomie de l'appareil digestif, des glandes salivaires et des tubes de Malpighi doit être complétée par des observations histologiques si nous voulons faire quelques réflexions sur l'arrangement méthodique et naturel des mouches (**). Le système nerveux, dont les éléments produisent la vie psychique de l'insecte, nous montre le perfectionnement organique de ces Articulés. On a déjà fait plusieurs remarques sur l'anatomie comparée des antennes pour appuyer les doctrines évolutionnistes (***). Les premiers états embryologiques des mouches sont un peu connus depuis les recherches de Graber (iv), de Weismann (v) et de quelques récents observateurs.

La science diptérologique ne possède encore actuellement que des renseignements préliminaires sur les états post-embryonnaires de ces insectes (vi). Les balanciers ont fait l'objet de

---

(*) Plateau, *Recherches expérimentales sur le mouvement respiratoire des insectes*. (Mém. de l'Académie royale de Belgique, t. XLV, 1884.)

(**) L. Dufour, *Recherches anatomiques et physiologiques sur les Diptères*. Paris, 1851. (Voir aussi les travaux de Viallanes.)

(***) F. Meunier, *Note sur une contre-empreinte de* Bibionidae *des lignites de Roth*. (Bull. Soc. zoologique de France, p. 101, juin 1894).

(iv) Graber, *Vergleichende Studien über die Embryologie der Insecten und imbesondere der Musciden*. Wien, 188?.

(v) Weismann, *Die Entwickelung d. Dipteren*. Leipzig, 1864. — Brandt, *Vergleichende Anatomie über die Nervensystem d. Diptera*. St-Pétersbourg, 1879.

(vi) Osten-Sacken. *Characters of the* larvae *of* Mycetophilidae. (Proceedings of the Entomological Society of Philadelphia, March, 1862, et Heidelberg, 1886. — Henneguy et Binet, *Contribution à l'étude microscopique du système nerveux larvaire de* Stratiomys longicornis. Paris, 1892.)

recherches minutieuses de Weinland (*), de Bolles Lee (**), mais l'histologie de ces singuliers appendices n'a pas été faite pour toutes les familles de l'ordre des Diptères. Il serait utile de mieux connaître l'histologie des macrochètes, afin de constater s'il n'existe pas quelques caractères pouvant différencier les familles et les genres entre eux. Les organes buccaux examinés par Becher (***), Leon (IV), etc., contribuent grandement à nous faire connaître la place systématique que les Diptères occupent dans la nature actuelle.

Les caractères extraits des pattes ont été peu employés pour l'étude des Diptères. Ces organes ont été soigneusement examinés par Goossens (V) et par une foule d'entomologistes s'occupant des divers ordres d'insectes. Cependant les articles tarsaux, les crochets et les pulvilli lorsqu'ils seront microscopiquement connus (VI) sur les mouches indigènes et les exotiques pourront, peut-être, nous fournir le moyen de mieux grouper les genres entre eux. Les macrochètes nous donnent des éclaircissements pour la division de quelques familles et de leurs genres, mais, à notre avis, ils doivent être principalement utilisés pour le déchiffrement des espèces. Puis, l'anatomie comparée des organes des sens, la morphologie des nervures alaires et la paléo-entomologie peuvent aussi contribuer à la formation de la nouvelle classification de l'ordre diptérologique.

En présentant ces quelques remarques, qui semblent d'abord s'éloigner de la communication spéciale de M. Girschner, je suis loin de contredire entièrement son système de classification, car

---

(*) WEINLAND, *Zur Kenntniss d. Baues der Dipterenschwingers*. Berlin, 1890.

(**) BOLLES LEE, *Sulla struttura intima d. organi cordotoni e d. bilancieri d. Ditteri*. Firenze, 1884-1885. — *Les balanciers des Diptères, organes sensitifs et histologiques*. Genève, 1885.

(***) BECHER, *Zur Kenntniss der Mundtheile der Dipteren*. (ZOOLOG. VERGLEICH. ANAT. INST. DER UNIV. Wien, 1882.)

(IV) LEON, *Beitrage zur Kenntniss der Mundtheile der Dipteren*. Iena, 1887.

(V) GOOSSENS, *Les pattes des Chenilles*. Paris, 1887.

(VI) Plusieurs auteurs qui se sont occupés des Hyménoptères ont comparé microscopiquement les crochets tarsaux et les pulvilli de quelques-uns de ces insectes. Voir : ABEILLE DE PERRIN, *Synopsis critique et synonymique des Chrysidides de France*. Lyon, 1878.

pour la famille dont il s'occupe, celui-ci peut rendre de grands services à la diptérologie. Mon seul but en écrivant cette note a été de faire l'esquisse, bien imparfaite encore, des organes que les classificateurs doivent surtout comparer pour établir un groupement rationnel et réellement systématique des Muscides et des autres familles de Diptères. Je me résume, en disant que feu J. M. Bigot a tort de jeter le discrédit sur les caractères qui peuvent être fournis par l'étude des macrochètes. Les classificateurs actuels pourraient facilement tomber dans l'excès contraire, s'ils se bornaient à cette seule étude sans scruter à fond les tissus anatomiques, histologiques et embryologiques des mouches.

SUR LA RÉDUCTION AUX FONCTIONS ELLIPTIQUES DE CERTAINES INTÉGRALES

PAR

M. le Cte de SPARRE

Professeur aux Facultés catholiques de Lyon.

On sait que les quatre intégrales suivantes :

$$\int \frac{F(x)\,dx}{(Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + F)^{\frac{1}{4}}}, \quad \int \frac{F(x)\,dx}{(Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + F)^{\frac{3}{4}}}.$$

$$\int \frac{F(x)\,dx}{(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)^{\frac{1}{3}}}, \quad \int \frac{F(x)\,dx}{(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)^{\frac{2}{3}}}$$

se ramènent aux fonctions elliptiques ; mais si l'on veut, dans le cas d'une application numérique déterminée, recourir aux procédés généralement indiqués, on est souvent conduit à des calculs fort pénibles.

Ayant rencontré ces intégrales dans certaines questions de mécanique, j'ai été conduit à chercher des méthodes qui mènent dans tous les cas au résultat, sans nécessiter pour les applications mécaniques des calculs bien compliqués; ce sont ces méthodes que je vais exposer dans ce qui va suivre.

I

Considérons d'abord les deux premières intégrales, et supposons que la quantité sous le radical ait été décomposée en deux facteurs du second degré réels; ces deux intégrales seront :

$$(1)\quad\ldots\quad \int \frac{F(x)\,dx}{[(ax^2+bx+c)(a'x^2+b'x+c')]^{\frac{1}{2}}},$$

$$(2)\quad\ldots\quad \int \frac{F(x)\,dx}{[(ax^2+bx+c)(a'x^2+b'x+c')]^{\frac{3}{2}}},$$

où $F(x)$ désigne une fonction rationnelle en x.

Posons maintenant

$$(3)\quad\ldots\ldots\ldots\quad x=m+\frac{n}{y};$$

nos deux intégrales deviennent

$$-n\int \frac{F\left(m+\frac{n}{y}\right)dy}{y\left[[(am^2+bm+c)y^2+n(2am+b)y+an^2][(a'm^2+b'm+c')y^2+n(2a'm+b')y+a'n^2]\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$-n\int \frac{F\left(m+\frac{n}{y}\right)ydy}{\left[[(am^2+bm+c)y^2+n(2am+b)y+an^2]\,[(a'm^2+b'm+c')+n(2a'm+b')y+a'n^2]\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Faisons alors

$$\frac{n\,(2am+b)}{am^2+bm+c}=\frac{n\,(2a'm+b')}{a'm^2+b'm+c'},$$

ce qui exige

$$(4)\quad\ldots\quad (ab'-ba')\,m^2+2\,(ac'-ca')\,m+bc'-cb'=0.$$

Je dis d'abord que l'on pourra toujours faire la décomposition de la quantité du quatrième degré sous le radical en deux fac-

teurs du second degré réels, de façon que les valeurs de m, fournies par l'équation précédente, soient réelles.

Pour qu'il en soit ainsi, il faut que l'on ait

$$(5) \quad . \quad . \quad . \quad (ac' - ca')^2 - (ab' - ba')(bc' - cb') > 0$$

Soient x' et x'' les deux racines de l'équation

$$(6) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad a'x^2 + b'x + c' = 0.$$

La relation (5) revient à la suivante :

$$(7) \quad . \quad . \quad . \quad (ax'^2 + bx' + c)(ax''^2 + bx'' + c) > 0.$$

On a, en effet,

$$(ax'^2 + bx' + c)(ax''^2 + bx'' + c)$$
$$= a^2x'^2x''^2 + abx'x''(x' + x'') + ac(x'^2 + x''^2) + b^2x'x'' + bc(x' + x'') + c^2,$$

c'est-à-dire, en tenant compte des relations

$$x'x'' = \frac{c'}{a'}, \quad x' + x'' = -\frac{b'}{a'},$$

$$(ax'^2 + bx' + c)(ax'' + bx'' + c) = \frac{(ac' - a'c)^2 - (ab' - ba')(bc' - cb')}{a'^2}.$$

Donc, si x_1 et x_2 sont les racines de l'équation

$$(8) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad ax^2 + bx + c = 0,$$

on aura

$$(9) \left\{ \begin{aligned} (ac' - ca')^2 - (ab' - ba')(bc' - cb') &= a'^2(ax'^2 + bx' + c)(ax''^2 + bx'' + c) \\ &= a^2a'^2(x' - x_1)(x' - x_2)(x'' - x_1)(x'' - x_2). \end{aligned} \right.$$

Or, 1° si les quatre racines de la quantité sous le radical sont réelles, on pourra les ranger dans un ordre tel que le produit

$$(x' - x_1)(x' - x_2)(x'' - x_1)(x'' - x_2)$$

soit positif, par exemple en prenant les deux plus grandes racines pour x' et x'' et les deux plus petites pour x_1 et x_2.



2° Si la quantité sous le radical a deux racines réelles et deux imaginaires, on pourra faire en sorte que l'équation (6) ait ses racines réelles et l'équation (8) ses racines imaginaires.

Mais alors la substitution d'un nombre quelconque dans le premier membre de (8) donne toujours au résultat le signe de a, et par suite les deux facteurs

$$ax'^2 + bx' + c, \qquad ax''^2 + bx'' + c,$$

sont de même signe et leur produit est positif.

3° Si enfin les quatre racines de la quantité sous le radical sont imaginaires, x' et x'' étant deux imaginaires conjugués, si l'on a

$$ax'^2 + bx' + c = \mathrm{P} + \mathrm{Q}i,$$

on aura

$$ax''^2 + bx'' + c = \mathrm{P} - \mathrm{Q}i,$$

et le produit de ces deux quantités,

$$\mathrm{P}^2 + \mathrm{Q}^2,$$

reste toujours positif.

On voit donc que l'on peut toujours supposer la décomposition de la quantité sous le radical en deux facteurs du second degré réels, faite de façon que les racines de l'équation (4) soient réelles.

Choisissons alors pour m une des racines de l'équation (4) et posons

$$(10) \quad \ldots \lambda = \frac{n}{2}\frac{2am + b}{am^2 + bm + c} = \frac{n}{2}\frac{2a'm + b'}{a'm^2 + b'm + c'},$$

$$(11) \quad \ldots\ldots \beta = n^2 \frac{b^2 - 4ac}{4(am^2 + bm + c)^2},$$

$$(12) \quad \ldots\ldots \gamma = n^2 \frac{b'^2 - 4a'c'}{4(a'm^2 + b'm + c')^2},$$

$$(13) \quad \ldots\ldots\ldots z = y + \lambda.$$

Nos intégrales deviennent

$$-n\int\frac{F\left(m+\frac{n}{z-\lambda}\right)dz}{[(am^2+bm+c)(a'm^2+b'm+c')(z^2-\beta)(z^2-\gamma)]^{\frac{1}{4}}(z-\lambda)},$$

$$-n\int\frac{F\left(m+\frac{n}{z-\lambda}\right)(z-\lambda)\,dz}{[(am^2+bm+c)(a'm^2+b'm+c')(z^2-\beta)(z^2-\gamma)]^{\frac{3}{4}}}.$$

Ces deux intégrales sont, en définitive, de la forme

$$\int\frac{f(z)\,dz}{[\pm(z^2-\beta)(z^2-\gamma)]^{\frac{1}{4}}},\quad \int\frac{f(z)\,dz}{[\pm(z^2-\beta)(z^2-\gamma)]^{\frac{3}{4}}}$$

$f(z)$ désignant une fonction rationnelle.

Mais on peut poser

$$f(z)=f_1(z^2)+zf_2(z^2),$$

f_1 et f_2 étant aussi des fonctions rationnelles, et nous sommes conduit à considérer les quatre intégrales

$$\int\frac{f_1(z^2)\,dz}{[\pm(z^2-\beta)(z^2-\gamma)]^{\frac{1}{4}}},\quad \int\frac{f_1(z^2)\,dz}{[\pm(z^2-\beta)(z^2-\gamma)]^{\frac{3}{4}}},$$

$$\int\frac{f_2(z^2)\,zdz}{[\pm(z^2-\beta)(z^2-\gamma)]^{\frac{1}{4}}},\quad \int\frac{f_2(z^2)\,zdz}{[\pm(z^2-\beta)(z^2-\gamma)]^{\frac{3}{4}}}.$$

Mais si l'on pose dans les deux premières

$$z=\frac{1}{t},$$

elles peuvent s'écrire :

$$\int\frac{\frac{1}{t^2}f_1\left(\frac{1}{t^2}\right)tdt}{[\pm(1-\beta t^2)(1-\gamma t^2)]^{\frac{1}{4}}},\quad \int\frac{f_1\left(\frac{1}{t^2}\right)tdt}{[\pm(1-\beta t^2)(1-\gamma t^2)]^{\frac{3}{4}}},$$

de sorte que l'on est ramené à des intégrales de même forme que les secondes, que nous avons, par suite, seules à considérer.

Si d'abord on a le signe + sous le radical, les deux intégrales à considérer sont

$$(14) \quad \ldots\ldots \int \frac{f_2(z^2)\,z\,dz}{[(z^2-\beta)(z^2-\gamma)]^{\frac{1}{4}}},$$

$$(15) \quad \ldots\ldots \int \frac{f_2(z^2)\,z\,dz}{[(z^2-\beta)(z^2-\gamma)]^{\frac{3}{4}}}.$$

Nous pouvons supposer

$$\beta > \gamma;$$

nous poserons alors

$$z^2 = \beta\,\text{séc}^2\,\varphi - \gamma\,\text{tg}^2\,\varphi,$$

d'où l'on déduit

$$\begin{aligned} z^2 - \beta &= (\beta-\gamma)\,\text{tg}^2\,\varphi, \\ z^2 - \gamma &= (\beta-\gamma)\,\text{séc}^2\,\varphi, \\ z\,dz &= (\beta-\gamma)\,\text{tg}\,\varphi\,\text{séc}^2\,\varphi\,d\varphi, \end{aligned}$$

et nos intégrales deviennent par suite

$$(16) \quad \int f_2[\beta + (\beta-\gamma)\,\text{tg}^2\,\varphi]\sqrt{\beta-\gamma}\sqrt{\sin\varphi}\,\text{séc}^2\,\varphi\,d\varphi,$$

$$(17) \quad \ldots \int f_2[\beta + (\beta-\gamma)\,\text{tg}^2\,\varphi]\frac{d\varphi}{\sqrt{\beta-\gamma}\sqrt{\sin\varphi}}.$$

On posera alors

$$(18) \quad \ldots\ldots \sin\varphi = \text{cn}^2\,u,$$

$$(19) \quad \ldots\ldots k^2 = \frac{1}{2},$$

d'où

$$d\varphi = -\frac{2\,\text{sn}\,u\,\text{cn}\,u\,\text{dn}\,u}{\sqrt{1-\text{cn}^4\,u}}\,du.$$

Mais à cause de (19), on a

$$1 - \mathrm{cn}^4 u = \mathrm{sn}^2 u\,(2 - \mathrm{sn}^2 u) = 2\,\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{dn}^2 u,$$

de sorte que l'on a

$$d\varphi = -\sqrt{2}\,\mathrm{cn}\,u du;$$

d'ailleurs,

$$\cos^2\varphi = 1 - \mathrm{cn}^4 u = 2\,\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{dn}^2 u;$$

$$\mathrm{tg}^2\varphi = \frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{\mathrm{cn}^4 u}{2\,\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{dn}^2 u},$$

$$\mathrm{séc}^2\varphi = \frac{1}{2\,\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{dn}^2 u},$$

et les intégrales (16) et (17) deviennent en fin de compte

$$-\int f_1\left[\beta + \frac{(\beta-\gamma)\,\mathrm{cn}^4 u}{2\,\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{dn}^2 u}\right]\frac{\sqrt{\beta-\gamma}\,\mathrm{cn}^2 u}{\sqrt{2}\,\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{dn}^2 u}\,du,$$

$$-\int f_2\left[\beta + \frac{(\beta-\gamma)\,\mathrm{cn}^4 u}{2\,\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{dn}^2 u}\right]\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\beta-\gamma}}\,du.$$

Supposons maintenant que l'on ait le signe — sous le radical; les deux intégrales à considérer seront

(14') . . . . . $$\int \frac{f_1(z^2)\,zdz}{[(\beta - z^2)(z^2-\gamma)]^{\frac{1}{2}}},$$

(15') . . . . . $$\int \frac{f_2(z^2)\,zdz}{[(\beta - z^2)(z^2-\gamma)]^{\frac{3}{2}}}.$$

Nous supposons toujours

$$\beta > \gamma,$$

et nous poserons

$$z^2 = \beta\cos^2\varphi + \gamma\sin^2\varphi,$$

d'où

$$\beta - z^2 = (\beta - \gamma)\sin^2\varphi,$$

$$z^2 - \gamma = (\beta - \gamma)\cos^2\varphi,$$

$$zdz = -\frac{\beta - \gamma}{2}\sin 2\varphi d\varphi.$$

Nos deux intégrales deviennent alors

$$(16') \quad -\int f_2[\gamma + (\beta - \gamma)\cos^2\varphi]\sqrt{\frac{\beta-\gamma}{2}}\sqrt{\sin 2\varphi}\,d\varphi,$$

$$(17') \quad -\int f_2[\gamma + (\beta - \gamma)\cos^2\varphi]\sqrt{\frac{2}{\beta-\gamma}}\frac{d\varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}}.$$

On posera alors, comme dans le cas précédent,

(18′) . . . . $\sin 2\varphi = \mathrm{cn}^2 u,$

(19′) . . . . $k^2 = \frac{1}{2},$

d'où

$$d\varphi = -\frac{\mathrm{cn}\, u}{\sqrt{2}}du,$$

$$\cos^2 2\varphi = 1 - \mathrm{cn}^4 u = 2\,\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{dn}^2 u,$$

$$\cos^2\varphi = \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{sn}\, u\,\mathrm{dn}\, u,$$

de sorte que, dans le cas actuel, nos intégrales deviennent

$$\int f_2\left[\frac{\gamma+\beta}{2} + \frac{\beta-\gamma}{\sqrt{2}}\mathrm{sn}\, u\,\mathrm{dn}\, u\right]\frac{\sqrt{\beta-\gamma}}{2}\mathrm{cn}^2 u\,du,$$

$$\int f_2\left[\frac{\beta+\gamma}{2} + \frac{\beta-\gamma}{\sqrt{2}}\mathrm{sn}\, u\,\mathrm{dn}\, u\right]\frac{du}{\sqrt{\beta-\gamma}}.$$

Le problème se trouve donc résolu, mais nous allons de plus calculer u pour une valeur donnée de φ, aux termes en q^4

près, ce qui, dans les applications, constitue en général une approximation très suffisante.

Nous avons, puisque $k^2 = \frac{1}{2}$,

$$\mathrm{dn}^2 u = 1 - \frac{1}{2}\mathrm{sn}^2 u = \frac{1 + \mathrm{cn}^2 u}{2}.$$

Mais, dans le premier cas, on a

$$\sin\varphi = \mathrm{cn}^2 u, \quad \mathrm{dn}^2 u = \frac{1 + \sin\varphi}{2} = \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right),$$

ou, en supposant que u croisse lorsque φ décroît,

$$\mathrm{dn}\, u = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right).$$

Si l'on pose alors

$$\cos\lambda = \sqrt{k'} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}},$$

on aura, aux termes en q^4 près,

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}{\cos\lambda} = \frac{1 + 2q\cos\frac{\pi u}{K}}{1 - 2q\cos\frac{\pi u}{K}},$$

d'où

$$2q\cos\frac{\pi u}{K} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) - \cos\lambda}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) + \cos\lambda},$$

ou

$$(20) \quad . \quad . \cos\frac{\pi u}{K} = \frac{1}{2q}\,\mathrm{tg}\left(\frac{\lambda}{2} + \frac{\pi}{8} - \frac{\varphi}{4}\right)\mathrm{tg}\left(\frac{\lambda}{2} + \frac{\varphi}{4} - \frac{\pi}{8}\right).$$

Dans le second cas, les calculs ne diffèrent que par le changement de φ en 2φ, puisque l'on pose $\sin 2\varphi = \mathrm{cn}^2 u$ au lieu de

$\sin\varphi = \mathrm{cn}^2 u$; il n'y aura donc qu'à remplacer, dans (20), φ par 2φ et l'on aura alors

$$(20') \quad . \quad . \cos\frac{\pi u}{K} = \frac{1}{2q}\,\mathrm{tg}\left(\frac{\lambda}{2} + \frac{\pi}{8} - \frac{\varphi}{2}\right)\mathrm{tg}\left(\frac{\lambda}{2} + \frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{8}\right).$$

D'ailleurs, dans le cas de $k^2 = \frac{1}{2}$, on a

$$(21) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; \left\{ \begin{aligned} \log\, q &= \bar{2},63562, \\ \log\frac{1}{2q} &= 1,06335, \\ \log\frac{K}{\pi} &= \bar{1},77097, \\ \log\, K &= 0,26812, \\ \frac{\lambda}{2} &= 16°23'. \end{aligned} \right.$$

II

Passons maintenant au calcul des deux intégrales

$$\int \frac{F(x)\,dx}{(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)^{\frac{2}{3}}}, \quad \int \frac{F(x)\,dx}{(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)^{\frac{1}{3}}}.$$

Nous supposerons que l'on ait déterminé une racine de la quantité sous le radical et que, par suite, on ait mis ces deux intégrales sous la forme

$$(22) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad \frac{F(x)\,dx}{[(ax^2 + bx + c)(x - \alpha)]^{\frac{2}{3}}},$$

$$(23) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad \frac{F(x)\,dx}{[(ax^2 + bx + c)(x - \alpha)]^{\frac{1}{3}}}.$$

Distinguons alors deux cas :

1° $\qquad b^2 - 4ac < 0.$



Posons

$$(24) \quad \ldots\ldots \quad x = m \operatorname{tg}(\varphi + \varphi_1) + n,$$

φ désignant une nouvelle variable, et m, n et φ_1 étant des constantes arbitraires.

Nous aurons

$$(ax^2 + bx + c)(x - \alpha) = \frac{1}{\cos^3(\varphi + \varphi_1)} \times$$
$$[am^2\sin^2(\varphi+\varphi_1) + (bm + 2man)\cos(\varphi+\varphi_1)\sin(\varphi+\varphi_1) + (an^2 + bn + c)\cos^2(\varphi+\varphi_1)]$$
$$\times [m\sin(\varphi + \varphi_1) + (n - \alpha)\cos(\varphi + \varphi_1)].$$

Nous poserons alors

$$b + 2an = 0,$$
$$am^2 = an^2 + bn + c,$$

d'où l'on déduit

$$(25) \quad \ldots\ldots \quad n = -\frac{b}{2a}, \quad m^2 = \frac{4ac - b^2}{4a^2} \ (^*);$$

on aura alors

$$(ax^2 + bx + c)(x - \alpha)$$
$$= \frac{4ac - b^2}{4a\cos^3(\varphi + \varphi_1)}\left[\sqrt{\frac{4ac - b^2}{4a^2}}\sin(\varphi + \varphi_1) - \left(\alpha + \frac{b}{2a}\right)\cos(\varphi + \varphi_1)\right].$$

Mais si l'on pose

$$\beta = \frac{2a\alpha + b}{\sqrt{4ac - b^2}},$$

cette relation pourra s'écrire

$$(ax^2 + bx + c)(x - \alpha)$$
$$= \frac{am^3}{\cos^3(\varphi + \varphi_1)}\left[(\cos\varphi_1 + \beta\sin\varphi_1)\sin\varphi + (\sin\varphi_1 - \beta\cos\varphi_1)\cos\varphi\right].$$

(*) m et β sont l'un et l'autre réels, puisque nous supposons $4ac - b^2 > 0$.

Si l'on prend alors

$$\text{(26)} \quad \sin\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}}, \quad \cos\varphi_1 = -\frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}, \quad \operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{-1}{\beta},$$

on aura

$$\cos\varphi_1 + \beta\sin\varphi_1 = 0,$$

$$\sin\varphi_1 - \beta\cos\varphi_1 = \sqrt{1+\beta^2} = \sqrt{\frac{4a(a\alpha^2+b\alpha+c)}{4ac-b^2}},$$

et, par suite,

$$(ax^2+bx+c)(x-\alpha) = \frac{m^2}{\cos^3(\varphi+\varphi_1)}\sqrt{a(a\alpha^2+b\alpha+c)}\cos\varphi,$$

ou

$$\text{(27)} \quad . \quad . \quad . \quad (ax^2+bx+c)(x-\alpha) = \frac{h\cos\varphi}{\cos^3(\varphi+\varphi_1)},$$

avec

$$\text{(28)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad h = \frac{4ac-b^2}{4a^2}\sqrt{a(a\alpha^2+b\alpha+c)}.$$

Considérons d'abord la première intégrale

$$\int \frac{F(x)\,dx}{[(ax^2+bx+c)(x-\alpha)]^{\frac{2}{3}}}.$$

En effectuant la transformation indiquée, on aura

$$\int \frac{F(x)\,dx}{[(ax^2+bx+c)(x-\alpha)]^{\frac{2}{3}}} = \int \frac{F[m\operatorname{tg}(\varphi+\varphi_1)+n]\,d\varphi}{h^{\frac{2}{3}}\cos^{\frac{2}{3}}\varphi}.$$

Faisons maintenant

$$\text{(29)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad z = \operatorname{séc}^{\frac{2}{3}}\varphi,$$

d'où

$$d\varphi = \frac{3}{2}\frac{dz}{z\sqrt{z^3-1}},$$

et, par suite, λ désignant une constante arbitraire,

$$\frac{d\varphi}{\cos^{\frac{2}{3}}\varphi} = \frac{3}{2}\frac{dz}{\sqrt{z^3-1}} = \frac{3}{2}\frac{\lambda d\left(\frac{z}{\lambda}\right)}{\sqrt{\lambda^3\left(\frac{z}{\lambda}\right)^3-1}}.$$

Si l'on pose alors

(30) . . . . $\lambda = 2^{\frac{2}{3}}$,

(31) . . . . $z = \lambda p(u), \quad p'(u) = \sqrt{4p^3(u)-1}$,

$p(u)$ désignant la fonction p de Weierstrass dont les invariants sont

$$g_2 = 0, \quad g_3 = 1,$$

on aura

$$\frac{d\varphi}{\cos^{\frac{2}{3}}\varphi} = \frac{3}{\sqrt[3]{2}}du, \quad \sec^{\frac{2}{3}}\varphi = 2^{\frac{2}{3}}p(u),$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{\sec^2\varphi - 1} = \sqrt{4p^3(u)-1} = p'(u).$$

D'ailleurs

$$\operatorname{tg}(\varphi+\varphi_1) = \frac{\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\varphi_1}{1-\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\varphi_1} = \frac{\beta p'(u) - 1}{\beta + p'(u)}.$$

Si donc on pose

$$F\left[m\operatorname{tg}(\varphi+\varphi_1)+n\right] = F_1\left[(p'(u)\right],$$

F_1 désignant une fonction rationnelle, on aura

(32) $$\int\frac{F(x)\,dx}{[(ax^2+bx+c)(x-\alpha)]^{\frac{2}{3}}} = \frac{3}{h^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{2}}\int F_1[p'(u)]\,du.$$

La réduction est donc opérée.

Si la quantité sous le radical se réduisait au second degré et si par suite on avait l'intégrale

$$\int\frac{F(x)\,dx}{(ax^2+bx+c)^{\frac{2}{3}}},$$

il suffirait de prendre $\varphi_1 = 0$ et de poser par suite

$$(33) \quad \ldots\ldots\ldots \quad x = m \operatorname{tg} \varphi + n;$$

on aurait

$$ax^2 + bx + c$$
$$= \frac{1}{\cos^3 \varphi} \left[am^2 \sin^2 \varphi + m(b + 2an) \sin \varphi \cos \varphi + (an^2 + bn + c) \cos^2 \varphi \right] \cos \varphi,$$

et, en faisant, comme dans le cas précédent

$$(34) \qquad n = -\frac{b}{2a}, \quad am^2 = an^2 + bn + c = \frac{4ac - b^2}{4a},$$

on aurait

$$(35) \quad \ldots\ldots \quad ax^2 + bx + c = \frac{4ac - b^2}{4a \cos^3 \varphi} \cos \varphi,$$

et, par suite,

$$\int \frac{F(x)\,dx}{(ax^2 + bx + c)^{\frac{2}{3}}} = \left(\frac{4a}{4ac - b^2} \right)^{\frac{2}{3}} \int \frac{F(m \operatorname{tg} \varphi + n)}{\cos^{\frac{2}{3}} \varphi} d\varphi.$$

En faisant, comme dans le cas précédent,

$$\sec^{\frac{2}{3}} \varphi = 2^{\frac{2}{3}} p(u), \quad \operatorname{tg} \varphi = p'(u) = \sqrt{4p^3(u) - 1},$$

on aurait

$$(36) \int \frac{F(x)\,dx}{(ax^2 + bx + c)^{\frac{2}{3}}} = \frac{3}{\sqrt[3]{2}} \left(\frac{4a}{4ac - b^2} \right)^{\frac{2}{3}} \int F[mp'(u) + n]\,du.$$

Passons maintenant à la seconde intégrale :

$$(23) \quad \ldots\ldots \int \frac{F(x)\,dx}{[(ax^2 + bx + c)(x - \alpha)]^{\frac{1}{3}}}.$$

Nous aurons toujours, par la transformation indiquée,

$$(ax^2 + bx + c)(x - \alpha) = \frac{h \cos \varphi}{\cos^3 (\varphi + \varphi_1)},$$

et, par suite,

$$\int \frac{F(x)\,dx}{[(ax^2+bx+c)(x-\alpha)]^{\frac{1}{3}}} = \frac{F[m\,\mathrm{tg}(\varphi+\varphi_1)+n]}{h^{\frac{1}{3}}\cos(\varphi+\varphi_1)\cos^{\frac{1}{3}}\varphi}\,d\varphi.$$

Mais

$$\mathrm{tg}(\varphi+\varphi_1) = \frac{\mathrm{tg}\,\varphi + \mathrm{tg}\,\varphi_1}{1-\mathrm{tg}\,\varphi\,\mathrm{tg}\,\varphi_1},$$

$$\cos(\varphi+\varphi_1) = \cos\varphi\cos\varphi_1 - \sin\varphi\sin\varphi_1 = \cos\varphi\cos\varphi_1(1-\mathrm{tg}\,\varphi\,\mathrm{tg}\,\varphi_1),$$

et, par suite,

$$\frac{F[m\,\mathrm{tg}(\varphi+\varphi_1)+n]}{\cos(\varphi+\varphi_1)} = \frac{1}{\cos\varphi}f(\mathrm{tg}\,\varphi),$$

f désignant une fonction rationnelle.

L'intégrale (23) devient donc

$$\frac{1}{h^{\frac{1}{3}}}\int f(\mathrm{tg}\,\varphi)\,\text{séc}^{\frac{4}{3}}\varphi\,d\varphi,$$

et si l'on pose, comme pour l'intégrale précédente,

$$\sec^{\frac{2}{3}}\varphi = 2^{\frac{2}{3}}p(u), \quad \mathrm{tg}\,\varphi = p'(u) = \sqrt{4p^3(u)-1},$$

d'où

$$\text{séc}^{\frac{4}{3}}\varphi\,d\varphi = \frac{3}{\sqrt[3]{2}}\,du,$$

notre intégrale devient

$$\frac{3\sqrt[3]{2}}{h^{\frac{1}{3}}}\int f(p'(u))\,p(u)\,du.$$

Si la quantité sous le radical se réduisait au second degré, par un calcul semblable à celui du cas précédent et en posant, comme dans ce cas,

(33) . . . . $x = m\,\mathrm{tg}\,\varphi + n,$

$$(34) \quad \dots\dots\dots \quad \begin{cases} n = -\dfrac{b}{2a}, \\ m^2 = \dfrac{4ac - b^2}{4a^2}, \end{cases}$$

on aurait

$$\int \frac{\mathrm{F}(x)\,dx}{(ax^2 + bx + c)^{\frac{1}{3}}} = \left(\frac{4a}{4ac - b^2}\right)^{\frac{1}{3}} \int \mathrm{F}(m \operatorname{tg} \varphi + n) \operatorname{séc}^{\frac{4}{3}} \varphi\, d\varphi.$$

En faisant alors toujours

$$\operatorname{séc}^{\frac{2}{3}} \varphi = 2^{\frac{2}{3}} p(u), \quad \operatorname{tg} \varphi = p'(u) = \sqrt{4p^3(u) - 1},$$

notre intégrale se réduit à

$$(37) \quad \dots 3\sqrt[3]{2} \left(\frac{4a}{4ac - b^2}\right)^{\frac{1}{3}} \int \mathrm{F}[mp'(u) + n]\, p(u) du.$$

2° $\qquad b^2 - 4ac > 0.$

Posons alors

$$(38) \quad \dots\dots\dots \quad x = \alpha + \frac{m}{y}.$$

On aura

$$(ax^2 + bx + c)(x - \alpha) = \frac{m}{y^3}\left[(a\alpha^2 + b\alpha + c)\, y^2 + m(2a\alpha + b) y + am^2\right].$$

Faisons maintenant

$$m(a\alpha^2 + b\alpha + c) = -1,$$

d'où

$$(39) \quad \dots\dots \; m = -\frac{1}{a\alpha^2 + b\alpha + c},$$

et remarquons de plus que, dans le cas actuel, les racines de l'équation

$$(40) \quad \dots (a\alpha^2 + b\alpha + c)\, y^2 + m(2a\alpha + b)\, y + am^2 = 0$$

sont toujours réelles, puisque la condition de réalité est

$$m^2(2a\alpha + b)^2 - 4am^2(a\alpha^2 + b\alpha + c) = m^2(b^2 - 4ac) > 0,$$

et nous la supposons satisfaite.

Désignons par β et γ les racines de l'équation (40) et supposons

$$\beta > \gamma;$$

nous aurons

$$(ax^2 + bx + c)(x - \alpha) = \frac{1}{y^3}(\beta - y)(y - \gamma).$$

Posons de plus

$$(41) \quad \ldots\ldots \quad F\left(\alpha + \frac{m}{y}\right) = F_1(y),$$

$$(42) \quad \ldots\ldots \quad \frac{1}{y}F\left(\alpha + \frac{m}{y}\right) = F_2(y).$$

Nos intégrales deviennent

$$(43) \quad \ldots\ldots -m\int \frac{F_1(y)\,dy}{[(\beta - y)(y - \gamma)]^{\frac{2}{3}}},$$

$$(44) \quad \ldots\ldots -m\int \frac{F_2(y)\,dy}{[(\beta - y)(y - \gamma)]^{\frac{1}{3}}}.$$

Faisons maintenant

$$y = \gamma \sin^2 \varphi + \beta \cos^2 \varphi,$$

d'où

$$y - \gamma = (\beta - \gamma)\cos^2 \varphi,$$
$$\beta - y = (\beta - \gamma)\sin^2 \varphi,$$
$$dy = -2(\beta - \gamma)\sin \varphi \cos \varphi\, d\varphi.$$

Nous aurons

$$\frac{-m\,dy}{[(\beta - y)(y - \gamma)]^{\frac{2}{3}}} = \frac{2^{\frac{4}{3}}m}{(\beta - \gamma)^{\frac{1}{3}}}\frac{d\varphi}{(\sin 2\varphi)^{\frac{1}{3}}},$$

$$\frac{-m\,dy}{[(\beta - y)(y - \gamma)]^{\frac{1}{3}}} = 2^{\frac{2}{3}}m(\beta - \gamma)^{\frac{1}{3}}(\sin 2\varphi)^{\frac{1}{3}}d\varphi.$$

Comme d'ailleurs

$$(43') \quad \ldots\ldots \quad y = \frac{\beta + \gamma}{2} + \frac{\beta - \gamma}{2} \cos 2\varphi,$$

on pourra poser

$$F_1(y) = f\,(\cos 2\varphi),$$
$$F_2(y) = f_1(\cos 2\varphi),$$

et nos intégrales deviendront

$$\frac{2^{\frac{4}{3}} m}{(\beta - \gamma)^{\frac{1}{3}}} \int \frac{f(\cos 2\varphi)\, d\varphi}{(\sin 2\varphi)^{\frac{1}{3}}},$$

$$2^{\frac{2}{3}} m\, (\beta - \gamma)^{\frac{1}{3}} \int (\sin 2\varphi)^{\frac{1}{3}} f_1(\cos 2\varphi)\, d\varphi.$$

Si l'on prend alors

$$(44') \quad \ldots\ldots\ldots \quad \sin 2\varphi = z^{\frac{3}{2}},$$

d'où

$$d\varphi = \frac{3}{4} \frac{z^{\frac{1}{2}} dz}{\sqrt{1 - z^3}},$$

donc

$$\frac{d\varphi}{(\sin 2\varphi)^{\frac{1}{3}}} = \frac{3}{4} \frac{dz}{\sqrt{1 - z^3}} = \frac{3}{4} \frac{\lambda d\, \frac{z}{\lambda}}{\sqrt{1 - \lambda^3 \left(\frac{z}{\lambda}\right)^3}},$$

$$(\sin 2\varphi)^{\frac{1}{3}} d\varphi = \frac{3}{4} \frac{\lambda z d\, \frac{z}{\lambda}}{\sqrt{1 - \lambda^3 \left(\frac{z}{\lambda}\right)^3}}.$$

Si l'on fait alors

$$\lambda = -2^{\frac{2}{3}}, \quad z = \sin^{\frac{2}{3}} 2\varphi = \lambda p(u),$$
$$p'(u) = \sqrt{4p^3(u) + 1} = \cos 2\varphi,$$

p désignant la fonction de Weierstrass, nos intégrales deviennent

$$(45) \quad \ldots\ldots \quad -3\frac{m}{(\beta-\gamma)^{\frac{1}{3}}}\int f[p'(u)]\,du,$$

$$(46) \quad \ldots\ldots \quad 3m(\beta-\gamma)^{\frac{1}{3}}\int f[p'(u)]\,p(u)\,du.$$

Si la quantité sous le radical se réduisait au second degré, puisque nous supposons $b^2 - 4ac > 0$, les racines de l'équation

$$ax^2 + bx + c$$

seraient réelles, et en les désignant par β et γ les intégrales prendraient la forme

$$\frac{1}{(-a)^{\frac{2}{3}}}\int\frac{F(x)\,dx}{[(\beta-x)(x-\gamma)]^{\frac{2}{3}}},\quad \frac{1}{(-a)^{\frac{1}{3}}}\int\frac{F(x)\,dx}{[(\beta-x)(x-\gamma)]^{\frac{1}{3}}}.$$

On est donc ramené aux intégrales (43) et (44), que nous avons calculées.

Proposons-nous maintenant, comme pour le cas d'un radical du quatrième degré, de calculer la valeur de u pour une valeur donnée de φ, en supposant, ainsi qu'on pourra presque toujours le faire, que l'on néglige les termes en q^4.

Dans le premier cas, où $b^2 - 4ac < 0$, on a posé

$$\text{séc}^{\frac{2}{3}}\varphi = 2^{\frac{1}{3}}p(u), \quad \text{tg}\,\varphi = p'(u).$$

Dans le deuxième cas, où $b^2 - 4ac > 0$, on a posé

$$\sin^{\frac{2}{3}}2\varphi = -2^{\frac{1}{3}}p(u), \quad \cos 2\varphi = p'(u).$$

Dans les deux cas qui nous occupent, le discriminant est négatif; si donc on veut éviter l'emploi des séries compliquées d'imaginaires, il convient de prendre pour $p(u)$, ainsi que je l'ai fait dans mon cours sur les fonctions elliptiques, l'expression

$$(47) \quad \ldots \quad p(u) = \gamma^2\left[\frac{1}{\text{sn}^2\gamma u} - \frac{1+k^2}{3} - \frac{k^2k'^2\,\text{sn}^2\gamma u}{\text{dn}^2\gamma u}\right],$$

où le module k et le multiplicateur γ sont déterminés en fonction des invariants g_2 et g_3 de $p(u)$ par les équations (*)

$$(48) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad g_2 = \frac{4}{3}\gamma^4(1 - 16k^2k'^2),$$

$$(49) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad g_3 = -\frac{8}{27}\gamma^6(k^2 - k'^2)(1 + 32k^2k'^2),$$

formules dans lesquelles on a, comme on sait,

$$k'^2 = 1 - k^2;$$

dans le cas actuel,

$$g_2 = 0, \quad g_3 = \pm 1.$$

Si l'on pose alors

$$(50) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad k = \sin\theta, \quad k' = \cos\theta,$$

l'équation (48) devient

$$0 = 1 - 16\sin^2\theta\cos^2\theta = 1 - 4\sin^2 2\theta,$$

d'où

$$\sin 2\theta = \frac{1}{2};$$

donc

$$2\theta = 30^\circ,$$

ou

$$(51) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \theta = 15^\circ.$$

L'équation (49) donne ensuite

$$\pm 1 = -\frac{8}{27}\gamma^6(\sin^2\theta - \cos^2\theta)(1 + 32\sin^2\theta\cos^2\theta),$$

ou

$$\pm 1 = \frac{8}{27}\gamma^6\cos 2\theta\,(1 + 8\sin^2 2\theta) = \frac{4\sqrt{3}}{9}\gamma^6,$$

(*) *Cours sur les fonctions elliptiques*, troisième partie, p. 30.

d'où

$$\gamma^6 = \pm \frac{3\sqrt{3}}{4},$$

et

(52) . . . . $\gamma^2 = \pm \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{4}};$

avec le signe + on a donc

(53) . . . . $\gamma = \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[3]{2}},$

avec le signe —

(53') . . . . $\gamma = i\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[3]{2}},$

k et γ étant ainsi déterminés, nous remarquerons que la valeur $\gamma u = K$ (*) rend la dérivée de $p(u)$ nulle; donc comme

$$p'(u) = \sqrt{4p^3(u) \mp 1},$$

et que $p(u)$ est réel pour $\gamma u = K$, on a

$$p\left(\frac{K}{\gamma}\right) = \pm \frac{1}{\sqrt[3]{4}} = \pm \frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}.$$

D'ailleurs, de l'équation (47) on déduit

$$p(u) - p\left(\frac{K}{\gamma}\right) = \gamma^2 \frac{\text{cn}^2 \gamma u}{\text{sn}^2 \gamma u \, \text{dn}^2 \gamma u}.$$

Mais on a, dans le premier cas, où $b^2 - 4ac > 0$,

$$p(u) - p\left(\frac{K}{\gamma}\right) = \frac{\text{séc}^{\frac{2}{3}} \varphi - 1}{2^{\frac{2}{3}}}, \quad \gamma^2 = \frac{\sqrt{3}}{2^{\frac{2}{3}}},$$

(*) K désigne l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}$ pour $k = \sin\theta$. La période de $p(u)$ est non 2K, mais $\frac{2K}{\gamma}$.

et dans le deuxième, si $b^2 - 4ac > 0$,

$$p(u) - p\left(\frac{K}{\gamma}\right) = \frac{1 - \sin^{\frac{2}{3}} 2\varphi}{2^{\frac{2}{3}}}, \quad \gamma^2 = -\frac{\sqrt{3}}{2^{\frac{2}{3}}}.$$

Considérons d'abord le premier cas, où $b^2 - 4ac < 0$, et posons

$$(54) \quad \ldots \quad h = \frac{1}{\gamma^2}\left[p(u) - p\left(\frac{K}{\gamma}\right)\right] = \frac{\text{séc}^{\frac{2}{3}} \varphi - 1}{\sqrt{3}}.$$

Nous aurons

$$(55) \quad \ldots\ldots \quad h = \frac{\text{cn}^2 \gamma u}{\text{sn}^2 \gamma u \, \text{dn}^2 \gamma u}.$$

La formule (54) fait voir que h est réel et positif, et l'on conclut alors de (55) que γu est réel.

Faisons alors

$$\text{dn}\, \gamma u = x\sqrt{k'}.$$

L'équation (55) devient

$$h = \frac{\text{dn}^2 \gamma u - k'^2}{\text{dn}^2 \gamma u\,(1 - \text{dn}^2 \gamma u)} = \frac{x^2 - k'}{x^2(1 - k'x^2)},$$

d'où l'on déduit

$$(56) \quad \ldots \quad hk'x^4 + (1 - h)x^2 - k' = 0.$$

Dans le cas actuel, γu est réel et, par suite, $x = \frac{\text{dn}\gamma u}{\sqrt{k'}}$ sera réel et compris entre $\frac{1}{\sqrt{k'}}$ et $\sqrt{k'}$. Or comme h est positif, l'équation (56) a une racine, et une seule, comprise dans cet intervalle : c'est sa racine positive. On a donc

$$x^2 = \frac{-(1 - h) + \sqrt{(1 - h)^2 + 4hk'^2}}{2hk'}.$$

Posons alors

$$(57) \quad \ldots\ldots \quad \text{tg}\, \mu = \frac{2k'\sqrt{h}}{1 - h}.$$

Nous aurons

$$x^2 = \frac{1-h}{k'h} \frac{\sin^2 \frac{\mu}{2}}{\cos \mu}.$$

Mais on déduit de (57)

$$\frac{1-h}{hk' \cos \mu} = \frac{2}{\sqrt{h} \sin \mu} = \frac{1}{\sqrt{h} \cos \frac{\mu}{2} \sin \frac{\mu}{2}};$$

on a, par suite,

$$x^2 = \frac{1}{\sqrt{h}} \operatorname{tg} \frac{\mu}{2},$$

et

(58) . . . . $$x = \frac{1}{\sqrt[4]{h}} \sqrt{\operatorname{tg} \frac{\mu}{2}}.$$

Faisons de plus

(59) . . . . . . $$x = \frac{1}{\sqrt[4]{h}} \sqrt{\operatorname{tg} \frac{\mu}{2}} = \operatorname{tg} \beta.$$

Nous aurons, aux termes en q^4 près,

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{dn} \gamma u}{\sqrt{k'}} = \frac{1 + 2q \cos \frac{\pi \gamma u}{K}}{1 - 2q \cos \frac{\pi \gamma u}{K}},$$

$$2q \cos \frac{\pi \gamma u}{K} = \frac{\operatorname{tg} \beta - 1}{\operatorname{tg} \beta + 1} = \operatorname{tg} \left(\beta - \frac{\pi}{4} \right),$$

et, par suite,

(60) . . . . . . $$\cos \frac{\pi \gamma u}{K} = \frac{1}{2q} \operatorname{tg} \left(\beta - \frac{\pi}{4} \right).$$

Considérons maintenant le second cas, où $b^2 - 4ac > 0$, et posons

(54') . . $$h_1 = \frac{1}{\gamma^2} \left[p \left(\frac{K}{\gamma} \right) - p(u) \right] = \frac{1 - \sin^{\frac{1}{3}} 2\varphi}{\sqrt{3}};$$

nous aurons

$$(55') \quad \ldots\ldots\ldots \quad -h_1 = \frac{\mathrm{cn}^2 \gamma u}{\mathrm{sn}^2 \gamma u \,\mathrm{dn}^2 \gamma u}.$$

La formule (54′) fait voir que h_1 est réel et positif, et l'on déduit alors de (55′) que γu est purement imaginaire.

Faisons alors, comme dans le cas précédent,

$$\mathrm{dn}\,\gamma u = x\sqrt{k'}.$$

L'équation (55′) devient l'équation (56), où h est remplacé par $-h_1$; on a donc

$$(56') \quad \ldots\ldots \quad h_1 k' x^4 - (1 + h_1) x^2 + k' = 0;$$

γu étant, dans le cas actuel, purement imaginaire, on a

$$x = \frac{\mathrm{dn}\,\gamma u}{\sqrt{k'}} > \frac{1}{\sqrt{k'}}.$$

Or, l'équation (56′) a une racine, et une seule racine, satisfaisant à cette condition : c'est sa plus grande racine; on a donc

$$x^2 = \frac{1 + h_1 + \sqrt{(1 + h_1)^2 - 4k'^2 h_1}}{2k'h_1}.$$

Posons alors

$$(57') \quad \ldots\ldots\ldots \quad \sin\nu = \frac{2k'\sqrt{h_1}}{1 + h_1},$$

on aura

$$x^2 = \frac{1 + h_1}{2k'h_1}(1 + \cos\nu) = \frac{1 + h_1}{k'h_1}\cos^2\frac{\nu}{2}.$$

Mais (57′) donne

$$\frac{1 + h_1}{k'h_1} = \frac{2}{\sqrt{h_1}\sin\nu} = \frac{1}{\sqrt{h_1}\cos\frac{\nu}{2}\sin\frac{\nu}{2}},$$

et, par suite,

$$x^2 = \frac{1}{\sqrt{h_1}} \cot \frac{\nu}{2};$$

donc

(58') . . . . $x = \frac{1}{\sqrt[4]{h_1}} \sqrt{\cot \frac{\nu}{2}}.$

Posons encore

(59') . . . . $x = \frac{1}{\sqrt[4]{h_1}} \sqrt{\cot \frac{\nu}{2}} = \operatorname{tg} \beta_1,$

et de plus, puisque γu est purement imaginaire,

(61) . . . . $\frac{\pi \gamma u}{K} = wi,$

(62) . . . . $\operatorname{tg} \psi = e^w;$

w est réel, puisque γu est purement imaginaire.

Nous aurons alors, aux termes en q^4 près,

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \frac{1 + q(e^w + e^{-w})}{1 - q(e^w + e^{-w})} = \frac{1 + q(\operatorname{tg} \psi + \cot \psi)}{1 - q(\operatorname{tg} \psi + \cot \psi)}.$$

On en déduit

$$\operatorname{tg}\left(\beta_1 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{q}{\sin \psi \cos \psi} = \frac{2q}{\sin 2\psi};$$

donc

(63) . . . . . . $\sin 2\psi = 2q \cot\left(\beta_1 - \frac{\pi}{4}\right).$

ψ étant connu par la formule précédente, on a w et u par la relation

(64) . . . . $w = \frac{\pi \gamma u}{Ki} = \frac{\log \operatorname{tg} \psi}{\log e}.$

Les valeurs de q et de K sont données par les tables ; ce sont celles qui correspondent à

$$k = \sin \theta, \quad \text{avec} \quad \theta = 15^\circ;$$

on trouve

$$\log q = \bar{3},63683, \qquad q = 0,00433, \qquad \log q^4 = \overline{10},54732,$$

$$\log K = 0,20362, \qquad K = 1,59814.$$

On aurait d'ailleurs obtenu ces mêmes valeurs en négligeant les termes en q^4, posant par suite (*)

$$\cos z = \sqrt{k'} = \sqrt{\cos 15^\circ},$$

et prenant

$$q = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{z}{2},$$

$$K = \frac{\pi}{2 \cos^4 \frac{z}{2}}.$$

(*) *Cours sur les fonctions elliptiques*, troisième partie, p. 48.



DÉVELOPPEMENT

EN

FRACTIONS CONTINUES PÉRIODIQUES

D'ORDRE SUPÉRIEUR

DES RACINES DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES QUELCONQUES

PAR

M. R. DE MONTESSUS

Préliminaires. — Étant donnée une équation de degré m, complexe ou non, on peut toujours la mettre sous la forme

$$(1)\qquad x=\alpha+\frac{\psi_{m-2}(x)}{(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\ldots(x-\lambda_{m-2})(x-\lambda_{m-1})}=\alpha+\frac{\psi_{m-2}(x)}{\varphi_{m-1}(x)},$$

où α, λ, λ_1, λ_2, ..., λ_{m-2} sont des quantités fixées à l'avance, complexes ou non.

On calcule λ_{m-1} et les coefficients de ψ_{m-1} par identification de l'équation (1) mise sous la forme

$$(x-\alpha)\varphi-\psi=0,$$

et de l'équation proposée.

De ceci résulte la transformation toujours possible

$$x=\alpha+\Sigma\frac{p}{x-\lambda},$$

d'où le développement

$$x=\alpha+\Sigma\cfrac{p}{\alpha-\lambda+\Sigma\cfrac{p}{\alpha-\lambda+\Sigma\cfrac{p}{\vdots}}}.$$

Les réduites successives de cette fraction continue d'ordre supérieur sont

$$x_1 = \alpha,$$

$$x_2 = \alpha + \Sigma \frac{p}{\alpha - \lambda} = \alpha + \frac{\psi(x_1)}{\varphi(x_1)},$$

$$x_3 = \alpha + \Sigma \cfrac{p}{\alpha - \lambda + \Sigma \cfrac{p}{\alpha - \lambda}} = \alpha + \Sigma \frac{p}{x_2 - \lambda} = \alpha + \frac{\psi(x_2)}{\varphi(x_2)},$$

. . . .

$$x_k = \alpha + \frac{\psi(x_{k-1})}{\varphi(x_{k-1})},$$

. . . .

Si elles tendent vers un nombre X, de $x_k = x_{k-1} + \varepsilon$, on déduit, par la formule de Taylor,

$$x_k = \alpha + \frac{\psi(x_k - \varepsilon)}{\varphi(x_k - \varepsilon)} = \frac{\psi(x_k) - \varepsilon A}{\varphi(x_k) - \varepsilon B},$$

et, à la limite,

$$X = \alpha + \frac{\psi(X)}{\varphi(X)}.$$

Donc

Théorème. — *Si les réduites convergent vers une limite unique, cette limite est racine de l'équation proposée.*

Racines réelles. — Nous supposerons réels les coefficients de l'équation proposée et par suite α, φ, ψ, car on sait que l'on peut déduire d'une équation complexe une nouvelle équation à coefficients réels ayant mêmes racines réelles.

Cette équation est le facteur commun à la proposée et à sa transformée en $-i$.

THÉORÈME. — *Quelle que soit la valeur initiale α, si l'on détermine le polynôme φ de manière que*

$$-1 < \frac{d}{dx}\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} < +1, \quad (x = a), \quad (*)$$

on obtient toujours des réduites convergeant vers la racine a, *à condition cependant que si la dérivée est positive, elle reste inférieure à* 1 *dans l'intervalle* α, a *et que cet intervalle ne comprenne aucune autre racine de l'équation proposée; si la dérivée est négative, elle doit être comprise entre* 0 *et* — 1 *de* α *à* $2a - \alpha$ *et ce nouvel intervalle ne doit pas non plus renfermer d'autres racines.*

Si ces dernières conditions ne sont pas remplies, on ne peut rien affirmer relativement à la convergence ou à la divergence.

Si, au contraire, à l'extérieur d'un cercle infiniment petit décrit de a *comme centre, la dérivée est extérieure à* — 1, + 1, *il y a divergence.*

1° Nous obtiendrons des réduites $x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \ldots$, convergeant vers a par valeurs croissantes si nous avons constamment

$$x_k < x_{k+1} < a,$$

conditions suffisantes. Et si l'on remarque que, par hypothèse,

$$x_k = \alpha + \frac{\psi(x_{k-1})}{\varphi(x_{k-1})}, \quad x_{k+1} = \alpha + \frac{\psi(x_k)}{\varphi(x_k)}, \quad a = \alpha + \frac{\psi(a)}{\varphi(a)}$$

et que

$$H = a - a_k$$

est supposé positif, les réduites croissantes, la relation

$$x_{k+1} < a,$$

(*) A propos des fonctions itératives, M. Lémeray (*Association française*, Caen, 1894) a donné ce résultat, par voie géométrique, ainsi que la représentation géométrique que j'indique dans la suite. Il a indiqué aussi le théorème précédent.

deviendra

$$\frac{\psi(a)}{\varphi(a)} > \frac{\psi(x_k)}{\varphi(x_k)}, \quad \frac{\psi(x_k+\mathrm{H})}{\varphi(x_k+\mathrm{H})} > \frac{\psi(x_k)}{\varphi(x_k)}, \quad \mathrm{H}\,\frac{d\,\dfrac{\psi(x_k+\theta\mathrm{H})}{\varphi(x_k+\theta\mathrm{H})}}{dx} > 0,$$

$$d\,\frac{\psi(x_k+\theta\mathrm{H})}{\varphi(x_k+\theta\mathrm{H})} > 0,$$

condition remplie si la dérivée est positive de α à a, cet intervalle comprenant x_k et $x_k + \theta\mathrm{H}$.

De plus,

$$x_{k+1} > x_k$$

donnera

$$\alpha + \frac{\psi(x_k)}{\varphi(x_k)} > x_k. \quad \alpha + \frac{\psi(a-\mathrm{H})}{\varphi(a-\mathrm{H})} > a - \mathrm{H},$$

$$\frac{\psi(a-\mathrm{H})}{\varphi(a-\mathrm{H})} > \frac{\psi(a)}{\varphi(a)} - \mathrm{H}, \quad -\mathrm{H}\,\frac{d\,\dfrac{\psi(a-\theta\mathrm{H})}{\varphi(a-\theta\mathrm{H})}}{dx} > -\mathrm{H},$$

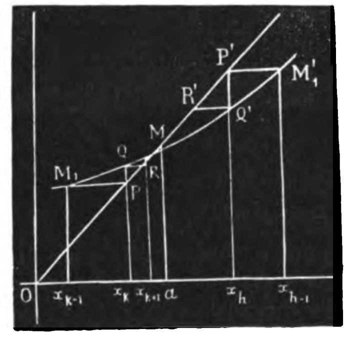
condition encore remplie si la dérivée est inférieure à 1.

Géométriquement, ces résultats peuvent être interprétés d'une manière simple, si l'on remarque que a est racine commune des deux équations

$$y = x, \quad y = \alpha + \frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$$

et est l'abscisse, ou l'ordonnée, Oa de l'un des points M communs aux lignes représentés par ces équations.

En les traçant, on voit que l'on passe de x_{k-1} à x_k, x_{k+1}, ... en construisant le contour Ox_{k-1}M$_1$PQR...



On trouverait des résultats identiques en étudiant la condition de convergence par valeurs décroissantes qui, géométriquement, correspondrait au contour Ox_{h-1}M'$_1$P'Q'R'....

2° x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, ... converge-

ront vers une limite par valeurs alternativement supérieures et inférieures si

$$|a - x_k| > |x_{k+1} - a|,$$

ce qui donne, si $x_k = a - H$,

$$|H| > \left| \alpha + \frac{\psi(x_k)}{\varphi(x_k)} - \alpha - \frac{\psi(a)}{\varphi(a)} \right|,$$

$$|H| > \left| H \frac{d\dfrac{\psi(x_k - \theta H)}{\varphi(x_k - \theta H)}}{dx} \right|,$$

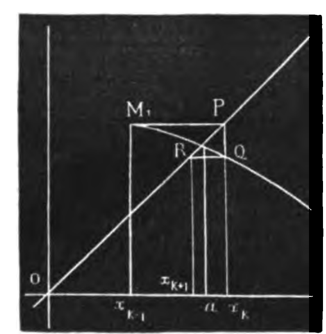
condition remplie si la dérivée est < 1, en valeur absolue; de plus, par un calcul tout à fait identique, on conclurait que

$$x_k < a, \qquad \text{avec} \qquad x_{k+1} > a,$$

donne

$$\frac{d\dfrac{\psi(x_k + \theta H)}{\varphi(x_k + \theta H)}}{dx} < 0.$$

Dans ce cas, le contour géométrique enveloppe M. La courbe est située dans le triangle formé par les axes et la droite $y + x = 2a$, tandis que tantôt elle était dans l'angle de OM avec l'axe des ordonnées.

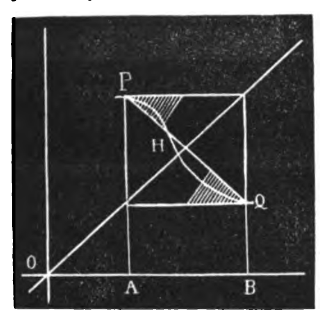


3° Si à l'extérieur d'un cercle infiniment petit décrit de a comme centre la dérivée était en valeur absolue supérieure à 1, il arriverait un moment où le sens de nos inégalités serait renversé, d'où divergence.

Il est maintenant nécessaire de démontrer que les réduites tendent vers une limite unique et que cette limite est précisément a. Or, les réduites décroissant sans cesse en valeur absolue, elles tendent vers une limite unique si elles sont constamment inférieures ou constamment supérieures à a. Si cette limite était b,

différant de a, b serait racine de l'équation proposée, d'après le théorème I, et nous avons supposé que l'intervalle considéré ne renferme que la racine a.

Si les réduites, tout en décroissant, enveloppent a, les réduites paires pourront tendre vers une limite A et les réduites impaires vers une limite B. Or, dans ce cas les points P et Q devant se reproduire mutuellement, ils ne peuvent qu'être symétriques par rapport à la droite $y = x$ et la courbe devant se trouver dans les secteurs ombrés puisque la dérivée est comprise entre -1 et $+1$, en un point H, à moins de discontinuité entre P et Q, la courbe couperait la droite PQ et sa dérivée y serait extérieure à $+1, -1$.



Algébriquement, on aurait à la fois

$$A = \alpha + \frac{\psi(B)}{\varphi(B)}, \quad B = \alpha + \frac{\psi(A)}{\varphi(A)},$$

et en donnant à B un accroissement h,

$$A + k = \alpha + \frac{\psi(B+h)}{\varphi(B+h)}, \quad k = h\frac{d}{dx}\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}, \quad x = B + \theta h,$$

d'où $|k| = |\theta_1 h|, \theta < \theta_1 < +1$, le module de la dérivée étant < 1.

Si nous donnons p nouveaux accroissements h, $ph = H$,

$$A + \Theta H = \alpha + \frac{\psi(B+H)}{\varphi(B+H)},$$

et en faisant $H = A - B$, ce qui est permis, s'il y a continuité entre A et B,

$$\Theta A + (A - B) = \alpha + \frac{\psi(A)}{\varphi(A)}.$$

Or, on ne peut avoir

$$A + \theta(A - B) = B,$$

θ étant un nombre non nul, que si $A = B$ et, comme précédemment, cette limite est a.

Pratiquement, nous prendrons une valeur rapprochée α de la racine, nous déterminerons le polynôme φ de manière que la dérivée soit comprise entre -1 et $+1$ pour $x = \alpha$ et nous vérifierons si cette condition est remplie pour un intervalle α, β, comprenant $a - (a - \alpha)$, $a + (a - \alpha)$. Quelle que soit la nature du développement, il y aura convergence.

Détermination du polynôme φ. — Nous devons avoir

$$\left|\frac{\varphi(a)\psi'(a) - \varphi'(a)\psi(a)}{\varphi^2}\right| < 1, \quad -\varphi^2 < \varphi\psi' - \varphi'\psi < \varphi^2,$$

ce qui revient à

$$-\varphi^2 < \varphi\left[\psi' - \varphi'(a - \alpha)\right] < \varphi^2,$$

puisque

$$\psi(a) = (a - \alpha)\varphi(a),$$

D'ailleurs, $f(x) = 0$ étant l'équation proposée

$$f(x) = (x - \alpha)\varphi(x) - \psi(x),$$

d'où

$$f'_x(x) = \varphi(x) + (x - \alpha)\varphi'_x(x) - \psi'_x(x),$$
$$\psi'(a) - (a - \alpha)\varphi'(a) = \varphi(a) - f'(a),$$

donc enfin

$$-\varphi^2 < \varphi(\varphi - f') < \varphi^2;$$

1° $\varphi(a) > 0$; alors

$$\varphi - f' < \varphi, \quad \varphi - f' > \varphi,$$

d'où

$$f' > 0, \quad \varphi > \frac{f'}{2}; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

2° $\varphi(a) < 0$; dans ce cas

$$\varphi - f' > \varphi, \quad \varphi - f' < -\varphi$$

et

$$f' < 0, \quad \varphi < \frac{f'}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Nous calculerons donc approximativement $f'(a)$ en formant $f'(\alpha)$ et nous prendrons φ en conséquence, vérifiant ensuite ce que devient

$$\frac{d\dfrac{\psi(x)}{\varphi(x)}}{dx}$$

dans l'intervalle considéré.

Soit, par exemple, à développer la racine réelle de

$$x^3 - 2x + 7 = 0.$$

Identifions $(x + 2)(x - \lambda)(x - \mu) - (px + q) = 0$ avec cette équation, pour la mettre sous la forme

$$x = -2 + \frac{px + q}{(x - \lambda)(x - \mu)}$$

-2 étant la valeur choisie pour α.

Nous en concluons

$$\lambda + \mu = 2, \quad \lambda\mu - 2 = p, \quad 2\lambda\mu - 7 = 9 \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Ici, $f'(-2) = 0$, $f'(-2{,}5) = 16{,}75$ et la racine étant comprise entre -2 et $-2{,}5$, il est probable qu'il suffira de prendre (1),

$$\varphi > 8.$$

Or,

$$\varphi = (-2 - \lambda)(-2 - \mu) = 4 + 2(\lambda + \mu) + \lambda\mu = 8 + \lambda\mu,$$

vu les équations (3) et il faut avoir en même temps $\lambda\mu > 0$, $\lambda + \mu = 2$ pour satisfaire, autant que nous pouvons le prévoir,

aux conditions de convergence. D'ailleurs, λ et μ doivent être différents pour assurer la décomposition de $\frac{\psi}{\varphi}$. Prenons $\lambda = 0{,}5$, $\mu = 1{,}6$; alors

$$p = -1{,}25, \quad q = -5{,}5$$

et

$$x = -2 - \frac{1{,}25 + 5{,}5}{(x - 0{,}5)(x - 1{,}5)},$$

et la dérivée

$$\frac{1{,}25x^2 + 11x - 11{,}9375}{(x - 0{,}5)^2 (x - 1{,}5)^2}$$

est bien comprise entre -1 et zéro pour x compris entre -2 et -3, intervalle suffisant, puisqu'elle est négative pour ces deux valeurs extrêmes sans s'annuler ni devenir infinie dans l'intervalle.

Nous pouvons donc développer. Les réduites envelopperont les racines.

Par un procédé connu, x devient

$$x = -2 + \frac{6{,}125}{x - 0{,}5} - \frac{7{,}375}{x - 1{,}5},$$

ou

$$4x = -8 + \frac{98}{4x - 2} - \frac{118}{4x - 6},$$

$$x = \frac{1}{4}\left[-8 + \cfrac{98}{-10 + \cfrac{98}{-10 + \cfrac{98}{\vdots} - \cfrac{118}{\vdots}} - \cfrac{118}{-14 + \cfrac{98}{\vdots} - \cfrac{118}{\vdots}}} - \cfrac{118}{-14 + \cfrac{98}{-10 + \cfrac{98}{\vdots} - \cfrac{118}{\vdots}} - \cfrac{118}{-14 + \cfrac{98}{\vdots} - \cfrac{118}{\vdots}}} \right].$$

Les réduites sont

$$x_1 = -2,$$

$$x_2 = \frac{1}{4}\left[-8 + \frac{98}{-10} + \frac{118}{14}\right] = \frac{1}{4}\left[-8 - \frac{48}{35}\right],$$

ce qui donne $-\frac{48}{35}$ pour première valeur approchée de la partie fractionnaire et

$$x_3 = \frac{1}{4}\left[-8 + \frac{98}{-10 - \frac{48}{35}} - \frac{118}{-14 - \frac{48}{35}}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[-8 - \frac{50400}{53531}\right].$$

$$x_4 = \frac{1}{4}\left[-8 + \frac{98}{-10 - \frac{50400}{53531}} - \frac{118}{-14 - \frac{50400}{53531}}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[-8 - \frac{124057450128}{117117693035}\right].$$

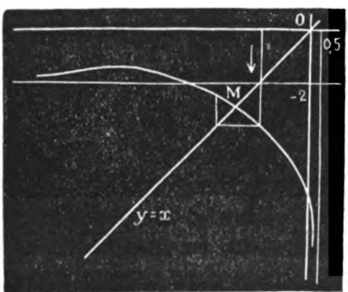
. . . .

On en déduit les deux séries de valeurs convergentes

$x_1 = -2,\qquad x_3 = -2,23\ldots$

$x_2 = -2,34\ldots\qquad x_4 = -2,26\ldots$

correspondant à la représentation graphique ci-jointe.



Bien que mon but principal ait été de généraliser le théorème de Lagrange, j'ajouterai que les réduites peuvent à la rigueur servir au calcul des racines. Elles sont en effet très convergentes si au point a la dérivée est voisine de zéro.

Racines imaginaires. — Si la fonction complexe $\frac{\psi}{\varphi}$ est régulière et continue aux environs du point a et ne s'y annule pas, s'il en est de même de sa dérivée et si de plus le module de cette

dérivée est compris entre -1 et $+1$ pour un intervalle comprenant la valeur initiale α et son symétrique par rapport à a, tout ce que nous avons dit précédemment est encore applicable, à condition de prendre α de la forme $\alpha + \beta i$. Mais la détermination de φ est plus difficile que dans le cas des racines réelles et nous nous réservons d'examiner ultérieurement ce point.

QUELQUES MOTS

SUR

LE GLACIAIRE DU JURA

DANS

LA RÉGION COMPRISE ENTRE SAINT-CLAUDE ET SALINS

PAR

l'abbé BOURGEAT

On sait qu'à l'époque de la grande extension glaciaire en Europe, le Jura fut visité par les glaciers alpins et qu'il eut aussi ses glaciers locaux. Depuis de Luc et de Saussure jusqu'à Émile Benoît et aux géologues actuels, l'erratique du Jura a été l'objet de nombreuses observations. Pour ce qui me concerne personnellement, j'ai pu, dès 1883, démontrer, dans une note adressée à la Société scientifique de Bruxelles, comment des hauts sommets de la Dôle, du Noirmont, du Rizoux, de la forêt de la Frasse s'écoulait vers la vallée de la Bienne un immense glacier, qui la comblait au nord-est dans sa partie haute et débordait par deux cols vers Saint-Laurent et Château-des-Prés, tandis que la branche maîtresse suivait la vallée, diminuant progressivement d'épaisseur vers Saint-Claude et Dortan. Deux années après, dans une série de communications faites à la Société d'agriculture, sciences et arts de Poligny, j'eus l'honneur de faire remarquer que le grand glacier de la vallée de l'Ain avait aussi dépassé, par Saint-Christophe et la Tour-du-Meix, les arêtes qui l'encaissaient au couchant et que ce n'était qu'à du glaciaire remanié par l'eau qu'on pouvait attribuer un certain nombre de gisements de sables visibles sur les plateaux

ou dans les combes fermées du Jura. Enfin, j'ai pu plus récemment encore signaler à la Société géologique de France la présence de blocs alpins dans des parties du Jura où ils n'avaient pas encore été remarqués.

Je désirerais aujourd'hui partir de ces observations et de celles qu'il m'a été donné de faire dans le cours de ces deux dernières années, pour rechercher les conditions dans lesquelles se trouvait à l'époque glaciaire la partie principale du Jura, celle qui est comprise entre Pontarlier, Saint-Claude et Nantua d'une part, Saint-Amour, Lons-le-Saunier et Salins de l'autre, région que j'appellerai par abréviation région de Saint-Claude à Salins.

Il n'est peut-être pas inutile, avant d'aborder mon sujet, de rappeler que le Jura a une physionomie particulière qui y rend assez difficile la reconstitution des anciens glaciers. Tandis que, en effet, la plupart des autres montagnes de l'Europe, telles que les Alpes, les Vosges, les Pyrénées, présentent de grandes et larges vallées perpendiculaires à l'arête principale, le Jura, par suite des plis qui s'y répètent, a les siennes parallèlement à son développement longitudinal. A part d'étroites cassures transversales ou cluses, par lesquelles s'échappent quelques torrents reliant une vallée à l'autre, tous les cours d'eau d'une certaine importance s'écoulent parallèlement à la chaine, et cet écoulement a lieu du nord-est au sud-ouest dans la partie du Jura qui fait l'objet de cette note. C'est aussi dans ce sens et le long des grandes vallées que durent s'écouler les glaciers jurassiens. Comme les hauteurs de la chaine s'abaissent perpendiculairement à cette direction, c'est-à-dire du nord-est au sud-ouest, pour aller se terminer par une sorte de falaise qui domine la plaine de la Saône et s'échancre en regard de Lons-le-Saunier, Voiteur, Poligny, Arbois et Salins, chaque glacier avait d'autant moins de puissance qu'il se trouvait dans une vallée située plus à l'occident. Les moraines glaciaires doivent donc en principe se montrer dans le Jura d'autant plus puissantes que l'on est plus près des hauts sommets, tandis que dans les autres montagnes, c'est au débouché des vallées dans la plaine, c'est-à-dire à une

faible altitude, que la masse principale de l'erratique se rencontre.

Il est arrivé cependant quelquefois, ainsi que je l'ai déjà fait remarquer dans mes précédentes notes, que les glaciers jurassiens ont débordé les arêtes qui encadraient leurs vallées d'écoulement pour se répandre vers les régions de moindre altitude, et c'est à ce sujet tout d'abord que j'ai quelques remarques nouvelles à faire.

Voici d'abord les faits que j'ai constatés sur ces glaciers jurassiens :

1° Il existe dans le glaciaire d'Encrozets, qui appartient à une vallée exclusivement oxfordienne, de nombreux blocs de calcaires saccharoïdes rosés provenant de l'urgonien. Leur présence atteste à n'en pas douter que le glacier qui parcourait la vallée recevait une branche importante de la vallée du Grandvaux, située plus en amont et où l'Urgonien est abondant ;

2° Il existe aussi au voisinage de la marnière du Fiez, entre ce dernier village et celui de Champvaux, aussi bien qu'aux environs des fermes de la Doye, des lambeaux glaciaires qui ne peuvent provenir que de la chaîne de l'Eute, située plus au bout ;

3° A Chaussenans, comme à Publy et dans le territoire de Verges, se montrent des couches de sables qui ne peuvent avoir d'autre origine qu'une moraine formée pareillement par des glaciers venus de l'Eute;

4° Enfin, dans les environs de Lons-le-Saunier, au-dessous de la falaise, on rencontre un nombre assez considérable de blocs dont quelques-uns présentent des stries et qui, par leur structure, ne peuvent que se rattacher au corallien ou à des étages plus élevés dans la série jurassique. Comme le corallien ne se montre qu'au levant de Lons-le-Saunier, bien loin de la falaise, sur la chaîne même de l'Eute, on est autorisé à croire que c'est encore l'Eute qui les a fournis.

L'Eute a donc été la zone d'amorce ou d'origine de la plupart des branches glaciaires qui sont descendues dans la plaine au-dessous de la falaise bressanne.

Ce qui me semble achever de justifier cette manière de voir, c'est l'étrange contraste que l'on observe au point de vue du glaciaire entre la région de Salins et celle de Poligny.

A Poligny, les blocs erratiques sont abondants et s'étendent jusqu'aux environs de Tourmont et de Saint-Lothain. A Salins, au contraire, et tout autour de cette ville, de même qu'au débouché, vers Mouchard, de l'échancrure au fond de laquelle Salins se trouve assis, les traces de glaciaires sont extrêmement rares. Et cependant Salins est dominé par la haute pointe du Poupet, qui n'a pas moins de 900 mètres, alors que les hauteurs dominant Poligny en ont à peine six cents. Comment cette anomalie s'expliquerait-elle, si l'on n'admettait pas l'influence de l'Eute? Cette influence admise, tout devient très simple. L'Eute, en effet, est plus élevée près de Poligny que près de Salins, et entre elle et la plaine il n'existe aucun sommet qui ait pu empêcher le glaciaire de descendre vers cette dernière; tandis que le Poupet, par sa masse même, était un obstacle à l'écoulement vers l'ouest des glaciers nés derrière lui. Il n'avait, de son côté, pas assez de largeur pour engendrer des glaciers sérieux. L'influence de l'Eute sur la région de Salins se fait d'ailleurs très bien sentir au levant du Poupet. A Nans-sous-Sainte-Anne, comme vers les sources du Lison, le glaciaire est abondant.

Le second point sur lequel je désirerais faire quelques remarques a trait aux glaciers alpins qui se sont répandus dans le Jura par certaines cluses et certains cols, ainsi que l'a si bien établi Émile Benoit.

Or, parmi les cluses ainsi visitées existe celle de Nantua, où viennent déboucher la Valserine, la rivière d'Ain, celles de la Valouse et du Surand. Durant mes courses à travers la région, je n'ai découvert le glaciaire alpin qu'à une faible altitude dans la vallée de la Valserine; dans la vallée de l'Ain, je l'ai trouvé à 280 mètres un peu en amont de Thoirette; dans celle de la Valouse, je l'ai observé non seulement au-dessous de Saint-Imetière, mais encore à Sancia, à 420 mètres de hauteur; enfin, dans la vallée du Surand, je ne l'ai rencontré que près de la gare de Simandre, à 240 mètres d'altitude. Cette dernière

vallée étant la plus éloignée des Alpes, il n'est pas surprenant que le glaciaire alpin s'y montre plus bas qu'ailleurs. Mais pourquoi se montre-t-il de plus en plus élevé à mesure que l'on passe de la vallée de la Valserine, la plus proche des Alpes, dans celles de l'Ain et du Surand, qui en sont plus éloignées? La raison m'en semble être la suivante. La vallée de la Valserine, encaissée par les plus hauts sommets du Jura, avait un glacier plus puissant que celle de l'Ain, et celle de l'Ain, un glacier plus puissant que celle de la Valouse. Ces glaciers jurassiens, venant butter contre la branche du glacier alpin qui venait par la cluse de Nantua, s'opposaient d'autant mieux à son expansion qu'ils étaient plus puissants. Plus refoulé vers la Valserine que vers l'Ain, le glacier alpin l'était aussi plus vers l'Ain que vers la Valouse.

Il est toutefois, dans le glaciaire alpin, des faits qui semblent encore inexplicables. Les deux plus importants que je puisse signaler sont la découverte d'un chloritoschiste à la côte de Valfin-les-Saint-Claude, à 700 mètres d'altitude, et celle de quartzites à Vichaumois, à 750 mètres. Ces blocs sont-ils venus par Désertin en descendant le Tacon et en remontant le cours de la Bienne et du torrent des Crozets, ou bien ont-ils suivi un autre chemin? C'est une question que je n'oserais résoudre aujourd'hui et que des observations plus nombreuses me permettront, je l'espère, d'éclaircir bientôt (*).

(*) *N. B.* La présence de blocs saccharoïdes rosés de même nature que ceux de l'Urgonien d'au-delà de la chaîne de l'Eute, dans les régions basses situées à l'ouest de cette chaîne, me portent à croire que la masse glaciaire des hauts sommets débordait l'Eute et comblait la vallée de l'Ain. Nulle part, en effet, l'Urgonien n'a été vu en place au couchant de l'Eute.

LE
CHARIOT UNIVERSEL

SYSTÈME RATIONNEL

DE MESURAGE POUR PRÉPARATIONS MICROSCOPIQUES

PAR

le R. P. H. BOLSIUS, S. J.

Professeur de sciences naturelles au Collège d'Oudenbosch
(Hollande).

Ce que le catalogue est à la bibliothèque, ce que la table des matières est au livre, la mesure rationnelle l'est à la préparation microscopique.

Sans catalogue, il est pratiquement impossible de se retrouver dans une bibliothèque; sans table des matières, on ne saurait se servir couramment d'un livre d'étude.

Ce catalogue, cette table sont d'autant plus nécessaires que vous avez à revoir plus souvent les mêmes matières, et à mettre, à un moment donné, sous les yeux d'autrui, les pièces authentiques, les arguments et les faits consignés dans ces livres.

Qu'il s'agisse maintenant, non plus de livres, mais de documents de toute espèce accumulés dans des portefeuilles, il devient plus rigoureusement indispensable encore de les avoir soigneusement catalogués. Sinon, quelle peine inouïe pour retrouver dans ce pêle-mêle, au moment critique, le document voulu !

Or, qu'est une bonne préparation, sinon un livre d'étude, ou mieux un portefeuille rempli de documents pour la plupart très

différents, auxquels nous devons souvent recourir, afin de comparer, d'étudier, d'approfondir les faits et les arguments, et de les présenter à d'autres comme pièces justificatives ?

Qu'est-ce qu'une collection de préparations, de séries bien réussies, de séries complètes, sinon une vaste bibliothèque remplie de portefeuilles bourrés de documents scientifiques?

Et comment vous retrouver dans tous ces portefeuilles microscopiques, dans cette bibliothèque en miniature, si ce n'est au moyen d'un repérage rationnel, qui permette, à vous-même et à tout autre au besoin, de découvrir, dans cet amas de détails, le point exact d'une préparation donnée et de montrer ainsi nettement telle particularité, tel argument sur une question déterminée ?

Donnons un exemple qui nous regarde personnellement. Il y a encore une forte opposition à notre exposé de la structure des organes segmentaires des Hirudinées. Ainsi la liaison des cellules par triple commissure est rejetée comme absolument fausse. La meilleure façon de trancher la question n'est-elle pas de mettre sous les yeux les préparations montrant ce détail à l'évidence ?

Mais comment nous retrouver nous-même dans ces séries de mille et mille préparations ? Comment revenir exactement et rapidement aux différents endroits qui présentent de diverses manières et sous divers aspects ce détail renfermé tout entier dans quelques millièmes de millimètre ? Comment les soumettre à ceux qui sont loin de nous ?

Mettre le doigt sur un chapitre, un alinéa même, dans une vaste bibliothèque, et l'indiquer de façon que tout le monde puisse le vérifier, n'est pas chose difficile. Vous notez le titre du livre, au besoin le nom de l'auteur et la date de l'édition, le volume, la page. Avec ce repérage, vous irez plus tard rapidement et sûrement en besogne.

Si le détail est à chercher dans des archives, dans des portefeuilles à documents incohérents, le repérage est encore possible, quoique plus difficile déjà.

Mais combien plus difficile encore le repérage dans les porte-

feuilles de vos archives microscopiques, remplis de documents souvent uniques, vrais manuscrits précieux !

Aussi, à bon nombre de micrographes, ainsi qu'à nous-même, le besoin d'un repérage *rationnel* s'est fait sentir pressant, indispensable, au fur et à mesure que les matériaux s'accumulaient dans nos tiroirs.

Quand le chariot fut inventé, plusieurs en ont profité pour mettre des indications de mesure le long des côtés, avec points de repère fixes. Ainsi le micrographe parvient à inscrire, à cataloguer les mille détails des préparations et à les retrouver plus tard sous *le même* microscope avec *le même* chariot (*).

De cette façon, chacun se compose en quelque sorte un catalogue qui lui est personnellement utile. Sans doute, c'est un grand pas dans la bonne direction ; mais cette manière de procéder donne-t-elle un catalogue *rationnel?*

Afin que tous saisissent bien le sens de cette question, voici ce que nous entendons par catalogue *rationnel.*

Un catalogue écrit par signes conventionnels, par abréviations inextricables, par indications impossibles à contrôler, n'est pas un catalogue *rationnel.* Par exemple vous inscrirez : Telle matière est traitée dans l'ouvrage que j'ai reçu à ma fête, au tome que j'ai parcouru durant ce fameux cyclone, à la page que je lisais lors du grand coup de tonnerre.

Cela peut être un repérage très clair pour celui qui l'écrit, mais la méthode est-elle *rationnelle?* Non, certes.

Pour être *rationnelles,* les indications du catalogue doivent avoir une raison d'être, objective, réelle, saisissable pour tous.

Ainsi, lorsque vous indiquez la page d'un livre, avec titre et auteur, cela est *rationnel,* parce que cette indication correspond à quelque chose d'objectif, de réel, de saisissable. Tout autre

(*) Nous ne parlons pas de ce système de repérage primitif qui consiste à recouvrir d'encre ou de couleur une préparation et à ne dégager que l'endroit intéressant, sacrifiant ainsi impitoyablement tous les autres détails de la préparation. Ajoutez à cela que cette méthode est impraticable lorsqu'*il s'agit de détails minimes et nombreux dans une seule préparation.*

entend comme vous cet énoncé; il peut le contrôler à l'occasion.

Les indications d'un catalogue dressé pour les détails des préparations microscopiques devront, elles aussi, être objectives, réelles, saisissables, permettant le contrôle, si l'on veut en faire un catalogue rationnel.

Il faut reconnaître que jusqu'ici aucun chariot de microscope n'était en état de fournir des indications *rationnelles.* Elles n'étaient pas même conventionnelles, mais purement arbitraires et soustraites à un contrôle possible à tous.

En effet, les mesures de tous les chariots partaient d'un point arbitraire des côtés des châssis et ne correspondaient à rien de *rationnel sur le porte-objet*, qui cependant est le document, le portefeuille microscopique dont l'inventaire, la table des matières est à faire.

Afin de bien saisir cette pensée, supposez que vous vouliez inscrire une belle karyokinèse. Vous le faites à l'aide d'un chariot de Reichert, de Zeiss, de Nachet ou autre, et vous marquez dans votre carnet : Belle division cellulaire à 4.3 sur 10.5 de la préparation n° X.

Tant que vous vous servirez de *votre* microscope, muni de *votre* chariot, vous retrouverez l'endroit, parce que dans la même position du chariot le même point du porte-objet viendra se placer au centre de votre instrument.

Mais qu'un autre vienne à vous demander de voir ce détail avec un meilleur statif, muni aussi d'un chariot provenant d'une autre maison, ou même, supposons-le, de la même maison, serez-vous en état de retrouver par *vos* indications de mesure le détail désiré?

Il y a mille, dix mille à parier contre un que vous ne réussirez pas. En d'autres termes, c'est pratiquement impossible.

Pourquoi? Parce que les indications des chariots existants se rapportent *au chariot*, et non au porte-objet directement. Le *chariot* porte des points de repère arbitraires, sans relation *absolue* avec le porte-objet. Voilà le défaut.

Les divisions du *chariot* ne coïncident avec rien de fixe, rien d'absolu, rien de *rationnel* dans le porte-objet.



Or, sans cette coïncidence de divisions du *chariot* avec les dimensions du *porte-objet*, impossible de produire un repérage, une indication réelle ou objective, un catalogue *rationnel*, intelligible et contrôlable pour tous.

Que faut-il donc pour obtenir cet effet d'un prix inestimable aux yeux de tout micrographe actif?

Il faut un chariot où les mesures des châssis correspondent aux mesures du porte-objet; il faut un chariot où le zéro des divisions corresponde au zéro du slide, et où par conséquent 5, 10, 15 millimètres, etc., des divisions correspondent à 5, 10, 15 millimètres, etc., des dimensions *réelles* du porte-objet. C'est là la seule mesure *rationnelle* qui donne des indications objectivement vraies, *indépendamment du chariot*, et qui permet la composition d'un catalogue de détails retrouvables d'une façon absolue.

Nous avons construit un instrument qui réalise cette coïncidence des mesures du chariot et des dimensions du porte-objet : il s'est trouvé à l'Exposition de Bruxelles, sous le nom de *chariot universel.*

Nous désirons lui donner le nom de *chariot universel* pour plusieurs raisons. D'abord, parce que ce chariot est construit de manière à pouvoir s'appliquer sur l'universalité des microscopes de toutes provenances, et ceci sans entraîner aucune modification ni du chariot ni du statif. Tout microscope dont la platine n'a pas moins de 6 CENTIMÈTRES de largeur, est prêt à recevoir le *chariot universel*, si la distance du centre de la platine à la tige du statif n'est pas inférieure à 37 millimètres.

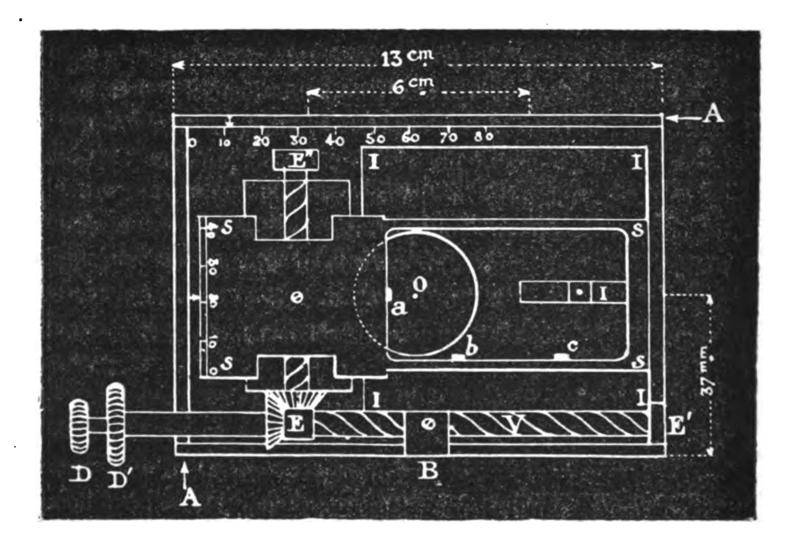
Or, quel micrographe se servira, pour des travaux sérieux, d'un microscope de si faibles dimensions? Les statifs de quelque valeur possèdent des platines de 9/9 centimètres et au-dessus, et, nous le répétons, le *chariot universel* peut être appliqué immédiatement sur toute platine ayant PLUS DE 6 CENTIMÈTRES de largeur et *plus de 37 millimètres* de profondeur de la tige au centre. Remarquons encore que ni la forme de la platine (carrée, circulaire, rectangulaire, oblongue) ni son épaisseur n'oppose la moindre difficulté. Tout cela est prévu dans notre système.

Adaptation possible à l'universalité des microscopes de valeur, telle est la première raison qui justifie le titre de *chariot universel.*

Il mérite encore ce nom parce qu'il permet de parcourir *toute l'étendue* des slides usuels.

Enfin il est destiné à une application universelle, étant l'unique *système rationnel* de repérage, donnant des mesures réelles et objectives.

Pour plus de clarté dans la description, nous présentons ici le premier exemplaire du *chariot universel* exécuté sur nos indications, d'après un spécimen que nous avons construit nous-même (*).



L'instrument est composé de trois pièces superposées ou emboîtées et glissant l'une dans l'autre.

I. La première pièce, la platine inférieure AA, est la plus

(*) La figure ci-jointe représente l'instrument vu d'en haut, réduit à la moitié de la grandeur naturelle.

grande. C'est la partie *immobile* du chariot, portant les deux glissières.

Dans la position représentée par la figure, la platine inférieure AA dépasse de trois côtés les deux autres platines : en haut, en bas et à gauche. Elle est visible encore dans la découpure rectangulaire II pratiquée dans la platine moyenne, dont nous parlerons tout à l'heure.

La platine inférieure AA est perforée en trois endroits. La perforation autour de O donne passage à la lumière venant du miroir et du condenseur.

Des deux autres, *une* seulement est représentée ici; l'autre, placée symétriquement, est supposée cachée par les pièces supérieures. Ces deux perforations sont rectangulaires et situées des deux côtés de la perforation centrale. Ce sont ces deux rectangles qui permettent d'appliquer le *chariot universel* sur tout statif.

Chaque rectangle loge la tête d'un écrou. En glissant dans ces rectangles, ces écrous sont rapprochés ou écartés du centre. Le *rapprochement maximum* est de 6 centimètres, l'*écartement maximum* est de 12 centimètres (voyez la figure). Ces limites nous ont semblé être pratiquement suffisantes, mais elles peuvent être accrues dans le cas d'une platine trop large ou trop étroite.

Au moyen de ces écrous, le *chariot universel* est si parfaitement serré sur le statif qu'il reste immobile et privé du ballottement dont on se plaint parfois pour les chariots applicables à volonté.

Nous verrons bientôt que notre *chariot universel* n'exige pas une *orientation constante* sur la platine du statif, mais que les indications seront *mathématiquement* d'une égale exactitude, quelle que soit l'orientation qu'on lui donne.

Un des bords de la platine inférieure est muni d'un bloc, B, logeant la pointe qui, par l'intermédiaire de la vis sans fin V et du bouton D, fait marcher la platine moyenne dont nous allons nous occuper maintenant.

II. La deuxième pièce, la platine moyenne, est *mobile* latéralement et reçoit son mouvement, ainsi que nous le disions, par

la vis V. Cette vis est placée entre les deux blocs E et E′, qui font corps avec la platine moyenne et l'entraînent dans leurs mouvements.

L'étendue de ce mouvement latéral est mesurée en face d'un point de repère marqué sur le bord supérieur de la platine inférieure *immobile* AA.

Dans la platine moyenne, il y a une large découpure rectangulaire II, laissant apercevoir la platine inférieure et servant à loger une partie de la platine supérieure qui porte immédiatement le slide.

III. Outre le mouvement latéral imprimé au porte-objet par la platine moyenne qui entraîne la platine supérieure SS, il faut encore un mouvement perpendiculaire au précédent.

A cet effet, la platine supérieure SS a une portion pleine, à gauche dans la figure. Cette portion pleine glisse sur une pièce en queue d'hirondelle faisant corps avec la platine moyenne. Le mouvement est produit par la vis sans fin EE″, actionnée par un engrenage au moyen du bouton D′, placé sur la tige même de l'autre vis sans fin V.

Lorsque le porte-objet est placé et bien ajusté contre les trois taquets *a*, *b*, *c* de la portion droite, perforée, de la platine supérieure SS, les deux boutons D et D′ peuvent lui imprimer les deux mouvements perpendiculaires l'un à l'autre, combinés selon le besoin.

Est-ce en se basant sur cette seule disposition que le *chariot universel* aurait la prétention de l'emporter sur les autres chariots existants ? Mais alors les autres systèmes n'auront qu'à élargir leurs mouvements, et ils pourront, sinon surpasser, au moins égaler celui-ci.

Les autres systèmes, nous l'avons déjà remarqué plus haut, sont entachés d'un *vice essentiel,* qui siège dans le *choix arbitraire* de leur *zéro* et le *point d'appui accidentel* du chariot même.

Dans notre système de *chariot universel*, les ZÉROS sont *absolus* et non arbitraires, le POINT DE DÉPART est un point *essentiel*, immuable, et non accidentel.



Il sera facile de le démontrer.

Lorsque vous aurez amené le *zéro* de la mesure de la platine supérieure SS devant le *zéro* du vernier correspondant, la droite qui longe le bord des taquets *b* et *c* vient exactement passer par le point O.

Mais la ligne *bc* correspond exactement au bord inférieur du slide qui y est appliqué.

Donc le *zéro* de cette mesure est aussi le *zéro* du bord inférieur de votre porte-objet.

En faisant descendre la platine SS, la mesure de la descente accusée par les divisions placées à gauche sera nécessairement la mesure de la distance que l'objet, vu dans cette position au-dessus du point O, occupe à partir du bord inférieur du porte-objet.

De même, en amenant le *zéro* de la mesure de la platine moyenne devant le *zéro* de son vernier, la ligne qui passe devant le taquet *a* et qui tombe perpendiculairement sur la ligne *bc*, passera exactement par le point O.

Or, comme le bord gauche du porte-objet est appliqué contre le taquet *a*, il s'ensuit nécessairement que le *zéro* de la mesure répond encore une fois au *zéro* du bord latéral gauche de votre porte-objet; il s'ensuit aussi que le déplacement accusé par la mesure sera le déplacement *réel* du porte-objet.

Le point O n'est rien autre que l'*origine des coordonnées rectangulaires* sur lesquelles les mesures d'un point de la surface sont prises. Il en résulte que notre *chariot universel* donne la mesure vraie, objective, réelle de l'endroit occupé par un objet, un détail microscopique; c'est-à-dire que ses indications sont les seules *rationnelles.*

Notre système de *chariot universel* a donc résolu la question du *mesurage rationnel* des préparations microscopiques en prenant comme point de départ le point immuable et rationnel, l'origine des coordonnées appliquées au porte-objet.

Mais du même coup il a fourni le moyen de *retrouver*, sur n'importe quel microscope, tout point une fois déterminé avec un *chariot universel* quelconque.

Et d'abord, il est évident que chaque *chariot universel* est nécessairement *l'équivalent absolu de tous les autres*, tous partant de l'origine des coordonnées.

Ensuite le *chariot universel*, lors de l'application à un microscope quelconque, a un point de départ *essentiel*, qui fait que les mesures, déjà démontrées *rationnelles par rapport au porte-objet*, sont aussi essentiellement *rationnelles par rapport à chaque microscope*.

Nous allons le démontrer en deux mots.

Les mesurages du *chariot universel* sont *rationnels* parce qu'ils partent de l'origine des coordonnées contre lesquelles sont appliqués les côtés du porte-objet. Ceci vient d'être démontré.

Or, notre système de *chariot universel*, à cause de sa construction même, lors de son application à un microscope quelconque, amène toujours *l'origine des coordonnées au centre optique du microscope*. Les mesures sont donc aussi *rationnelles par rapport au microscope*.

Il y a *coïncidence* du point immuable de tout microscope, c'est-à-dire du *centre optique*, avec le point immuable du porte-objet, c'est-à-dire *l'origine de ses coordonnées*.

Seule une négligence dans l'installation du *chariot universel* sur un microscope pourrait faire perdre tous ces avantages. Mais cette négligence est des plus faciles à éviter.

Avant d'appliquer le *chariot universel* sur votre microscope, amenez exactement au *zéro* chacune des deux règles divisées.

Il y a alors un point marqué sur la platine supérieure qui indique l'origine des coordonnées, et qui coïncide avec O de la figure.

Regardez, avec un grossissement faible ou moyen, ce point au microscope et amenez-le exactement au centre du champ.

Alors, l'œil toujours au microscope et une main appliquée sur le chariot, afin de garder *l'origine* au *centre*, glissez de l'autre main l'écrou T contre le bord de la platine du microscope. Ceci fait, de la main qui est libre maintenant, appuyez sur le chariot, en surveillant et corrigeant au microscope les légers écarts ou

déplacements possibles ; de l'autre main, amenez la deuxième vis à sa place et serrez. C'est une manipulation des plus simples.

Toute l'exactitude des indications du *chariot universel* dépend de la place précise du *point d'origine.*

Afin d'assurer avec précision la place du point d'origine, nous aurons soin de le tracer nous-même sur chaque exemplaire du *chariot universel,* et d'attester par écrit que nous l'avons examiné personnellement.

Chacun appliquera alors sans difficulté le chariot à son propre microscope.

L'attention doit se porter uniquement sur le centrage et pas du tout sur *l'orientation* du chariot. Car un chariot plus ou moins *oblique* n'en donne pas moins des indications précises, puisque le *centre* du champ *reste* quand même *l'origine* et que les *coordonnées restent* aussi à angle droit.

Cette indépendance de l'orientation, suite nécessaire du système, rend le *chariot universel* d'un maniement si facile que personne ne se croira hors d'état de l'installer.

La coïncidence de l'origine des coordonnées et du centre de tout microscope est le point essentiel de notre invention.

De là découlent toutes les qualités du *chariot universel.*

Résumons-les brièvement pour faire ressortir les avantages sur les autres systèmes de chariots applicables à volonté (*).

1° Le *chariot universel* est réglé sur le *centre,* le seul point immuable de tout microscope.

Les autres systèmes sont réglés soit sur la tige, soit sur les côtés de la platine, tous détails qui varient dans les divers microscopes.

2° Le *chariot universel* s'adapte à toutes sortes de microscopes sans aucun changement préalable ni du chariot ni du statif.

Les autres systèmes sont adaptés à certains numéros de microscopes déterminés.

(*) Nous parlons uniquement des *chariots applicables à volonté,* pour la bonne raison que les *chariots inamovibles* ne sauraient se prêter à l'avantage de passer d'un microscope à l'autre, ce qui est un des plus grands mérites du *chariot universel.*

3° Le *chariot universel* peut être transporté d'un microscope à l'autre, sans crainte de déranger les indications une fois prises.

Les autres systèmes ne permettent pas ce transport, même d'un exemplaire entièrement similaire, si ce n'est avec grand risque de déviation.

4° Le *chariot universel* donne des indications numériques rationnelles pour chaque région du porte-objet.

Les autres systèmes reposent sur des mesures arbitraires, sans rapport avec le porte-objet.

5° Le *chariot universel* a un mouvement si étendu qu'il permet d'explorer *toute l'étendue* d'un slide.

Les autres systèmes ne permettent qu'une exploration assez restreinte.

Restait encore à résoudre une question très importante, et qui a rendu l'exécution plus difficile.

Notre but constant a été de construire un *chariot* non seulement *applicable* à tout statif, mais *utilisable* pour tout micrographe.

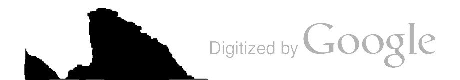
Or, en construisant un *chariot* à trois pièces superposées, — ce qui eût été assez simple, — nous aurions renoncé aux avantages de l'éclairage au condenseur, où il est nécessaire que le porte-objet soit rapproché de la platine du statif : le condenseur, en effet, ne peut monter de beaucoup (*).

Le problème consistait donc à trouver le moyen de maintenir le porte-objet aussi bas que possible, tout en superposant les glissières.

En découpant le rectangle II dans la platine moyenne et en faisant descendre le châssis portant le slide à la surface de la platine inférieure, nous sommes parvenu à ne hausser le porte-objet que de quelques millimètres.

Et comme presque tous les condenseurs permettent une élé-

(*) Sans doute, certains statifs n'auraient pas exigé les dispositions que nous allons décrire. Mais nous avons voulu construire un instrument aussi *universel* que possible.



vation de quelques millimètres (*), la difficulté de l'éclairage au condenseur, la plus grosse de toutes, se trouve encore pratiquement résolue.

Pour finir, nous appelons l'attention sur quelques détails accessoires, qu'une assez longue pratique de la micrographie nous a fait connaître.

D'abord les verniers sont placés de telle sorte que le corps du microscope ne puisse se mettre entre l'œil et ces verniers.

Ensuite les deux mouvements du *chariot universel*, grâce à l'engrenage, ont été réunis sur la même tige, de façon à être toujours sous les doigts et à la même place.

Puis, les deux boutons D et D' ne sont pas placés à droite, mais à *gauche* du chariot, parce que, pendant le dessin à la chambre claire, le pupitre se place *à droite* et empêche de ce côté le libre accès aux boutons.

Nous avons préféré la vis sans fin avec engrenage à la crémaillère, parce que cette crémaillère aurait rendu difficile la réunion des boutons sur la même tige, à moins de dépasser les bords du chariot dans la plupart des positions de la platine supérieure.

Peut-être à première vue la pièce semblera-t-elle trop massive, trop lourde. Remarquons d'abord qu'elle doit être assez résistante pour être transportée souvent d'un microscope à un autre, sans se déformer. En outre, elle ne peut absolument pas plier ou ballotter, ne fût-ce qu'avec un écart purement microscopique. Enfin, pour la rendre applicable même aux microscopes de moins de 4 centimètres de profondeur du centre à la tige, nous avons dû creuser le cadre inférieur de la platine moyenne, de façon à ne pas la priver de la résistance nécessaire (**).

(*) En y regardant de près, aux microscopes où le condenseur est *arrêté* au niveau de la platine, on trouve une vis dont la seule fonction est de butter contre la face inférieure de la platine pour effectuer cet arrêt. En enlevant cette vis, le condenseur peut être élevé au-dessus de la platine, souvent beaucoup plus qu'il ne faut pour corriger l'épaisseur de notre *chariot*.

(**) On a critiqué la présence de la platine inférieure. En la supprimant pour ne garder que son cadre, disait-on, le *chariot* gagnera beaucoup : 1° il deviendra plus léger; 2° il

Autre détail encore. Il arrive malheureusement, surtout pour les porte-objets de laboratoire, que les côtés sont un peu ébréchés. Si alors le côté inférieur était appliqué *contre une règle*, le slide pourrait ballotter et ne pas avoir une position stable. C'est pourquoi nous le plaçons seulement contre *deux* taquets *b* et *c*, qui donnent un appui *stable* malgré les inégalités. La même raison nous a fait placer le taquet *a* sur le côté gauche du slide.

Mais pour que les *coordonnées* en pareil cas ne soient pas déplacées d'un chariot à l'autre, nous avons adopté des points déterminés pour placer les taquets *a*, *b* et *c*, de façon que même pour un porte-objet défectueux le passage d'un exemplaire du *chariot universel* à un autre ne porte pas préjudice à la précision.

Les points pour les taquets *b* et *c* ont été déterminés de manière à pouvoir servir tant pour les slides usuels de 76 millimètres de longueur que pour les petits slides de 48 millimètres.

Il y a aussi une petite agrafe à ressort venant se placer sur l'extrémité gauche du slide, et qui par sa faible pression empêche le déplacement que pourrait produire la viscosité de l'huile d'immersion.

La *profondeur* du chariot aurait pu rendre plus ou moins difficiles le placement et l'enlèvement des porte-objets par le haut; aussi avons-nous ménagé à cet effet une fente *latérale* dans la platine moyenne.

Muni du *chariot universel*, le micrographe se compose le *catalogue rationnel* de tout ce qu'il rencontre dans les archives de ses nombreuses préparations. Il inscrit tout cela dans son carnet avec la certitude de tout retrouver sans le moindre tâtonnement. Même dans le cas où le chariot dont il s'est servi se détraquerait, nulle crainte que les indications soient hors de service. Avec un chariot de tout autre système, ce serait un vrai désastre, puisque toutes les indications y sont arbitraires : avec le *chariot*

---

permettra de placer le porte-objet *sur la platine même* du microscope. La remarque était exacte théoriquement. Seulement, en l'exécutant, tout le fondement du *chariot universel* serait enlevé; car ce serait supprimer l'unique moyen d'appliquer le système à tout microscope.

universel et ses mensurations *rationnelles*, rien n'est perdu. Tout autre *chariot universel* peut remplacer le premier.

En se rendant à une réunion de savants, devant lesquels on désire faire des démonstrations microscopiques, on ne doit plus se préoccuper de la recherche pénible des objets à montrer. Inutile même d'emporter son propre statif. Il suffit d'avoir le *chariot universel*, qui s'appliquera là-bas au premier microscope venu. Et même, si l'on sait qu'à la réunion il existe un *chariot universel*, on n'aura plus qu'à prendre avec soi ses notes de mesures et ses préparations.

Le micrographe veut-il communiquer ses préparations microscopiques à ses collègues, les consulter sur ce qu'il a trouvé, les convaincre de la réalité de ses découvertes, etc., il n'a qu'à leur envoyer, fût-ce à l'autre bout du monde, ses préparations et la liste des chiffres, le *catalogue rationnel* des détails en question. A eux alors d'appliquer ces préparations sur le *chariot universel*. Ils y verront ce qui est à voir.

Une remarque pratique cependant à cette occasion. Lorsque quelqu'un aura à indiquer à un autre un détail visible seulement à un grossissement considérable, et noyé peut-être dans d'autres détails innombrables, il sera d'un grand intérêt de donner, avec les indications de mesures précises *de l'endroit vu à un fort grossissement*, un croquis schématique des alentours de cet endroit *vu à un grossissement faible*. La raison est que le champ des forts grossissements ne dépasse guère quelques fractions de millimètre, et que par conséquent, pour celui qui doit aller à la recherche de ce qu'un autre a vu, il est bon de pouvoir d'abord *s'orienter* dans la préparation au moyen d'un grossissement plus faible d'où il pourra dégager le détail voulu.

Pour conclure, le *chariot universel* nous semble appelé à être d'un grand secours dans les longues recherches de séries et autres investigations délicates, dans les communications des savants entre eux, dans les discussions et les vérifications des découvertes et des nouveautés.

Qui sait même si, dans quelque temps, les travaux micrographiques ne présenteront pas des renvois *micro-bibliographiques*

à des préparations microscopiques citées d'après le *chariot universel*, d'une façon aussi *rationnelle* que les citations actuelles de livres et de figures ?

Uniquement désireux de faire profiter de notre invention, dans une mesure aussi large que possible, nos collègues les micrographes, nous avons cherché une maison qui nous mit en état de procurer le *chariot universel* à un prix encore inférieur à celui de tous les autres chariots applicables à volonté et dépourvus des avantages que présente notre système (*).

(*) La société anonyme *La Précision* (rue des Bogards, 42, Bruxelles) a exécuté le chariot de manière à pouvoir le livrer au prix de : fl 36. = Mk 60. = fr. 75.



ÉTUDES BATOLOGIQUES

PAR

l'abbé BOULAY
Professeur à l'Université catholique de Lille

I

Observations sur le mode de croissance et de propagation des Rubus *dans les bois taillis.*

On sait que les *Rubus* de la section *Eubatus* sont des plantes herbacées vivaces d'un type spécial.

A l'état adulte, leur appareil végétatif comprend :

1° Une racine vivace, ligneuse, diversement ramifiée, devenant avec l'âge très forte et plongeant très avant dans le sol ;

2° Une souche, c'est-à-dire, au sommet de la racine, une tige courte et épaisse, également lignifiée et vivace;

3° Des pousses ou *turions* bisannuels, naissant, sur la souche, de bourgeons adventifs, en plus ou moins grand nombre, selon la fertilité du sol. Ces turions ne forment, la première année de leur développement, qu'une tige normalement simple, garnie de feuilles alternes, disposées dans l'ordre $^2/_5$. Cette tige, qui est un rameau adventif par rapport à la souche, varie en direction selon les espèces et le milieu, déprimée, couchée, procombante, rarement tout à fait dressée, sinon au milieu des buissons où elle trouve un appui.

C'est vers la fin du printemps suivant, soit de la seconde année, que les bourgeons situés à l'aisselle des feuilles de ce turion se développent en rameaux florifères et fructifères. Après la maturation du fruit, le turion tout entier se dessèche et meurt, persistant encore, à l'état de bois mort, pendant un an.

Tout en produisant des graines capables de germer, les ronces

se propagent avec plus de vigueur et d'abondance par voie végétative. Dans la plupart des espèces, à l'exception de quelques *Rubi suberecti*, les turions, vers la fin de leur première année, en septembre et octobre, se reprennent à végéter activement par leur extrémité qui, retombée au contact du sol humide, s'allonge, souvent même se ramifie ; puis l'extrême sommet se gorge de matières de réserve et émet des racines adventives qui pénètrent dans le sol. Ces extrémités enracinées constituent autant de centres nouveaux de développement qui rajeunissent et multiplient la plante mère. Sous ce rapport, les turions de *Rubus* se comportent comme les coulants des fraisiers, quoiqu'ils en diffèrent considérablement à d'autres points de vue (*).

Les graines de ronces germent lentement, pour la plupart au second printemps ; la plantule qui en sort reste petite et grêle la première année, souvent même la seconde année qui suit la germination. Ce n'est guère qu'au bout de cinq ou six ans et même au delà que la plante peut être considérée comme adulte et marquée de ses caractères définitifs. Les plantes nouvelles produites, comme nous l'avons vu, par l'enracinement de l'extrémité des turions, par un marcottage naturel, arrivent beaucoup plus vite, en deux ou trois ans, à l'état adulte.

Ces quelques données très sommaires vont nous permettre d'aborder l'objet spécial de cette note.

C'est principalement dans la forêt de Phalempin (Nord) que j'ai eu l'occasion d'étudier comment les *Rubus* s'adaptent aux conditions périodiquement changeantes d'un bois taillis.

(*) M. E. Mer a traité avec un certain développement de ce phénomène dans un article publié dans le *Bulletin de la Société botanique de France*, 1884, p. 58. Ce travail a pour titre : *Recherches sur le mécanisme et la cause de la pénétration dans le sol et de l'enracinement de l'extrémité des tiges de ronce.* On trouvera dans cet article la bibliographie de la question et en particulier l'indication des études de M. Costantin sur la structure de la partie enracinée et de M. Wiesner sur la physiologie de l'enracinement. M. Mer ne voyant dans les ronces que des individus, s'est trouvé, à propos de l'enracinement, en présence de divergences très grandes qu'il cherche à expliquer sans y parvenir. La direction du turion, sa retombée au contact du sol ou non, son mode particulier d'enracinement comportent des différences spécifiques dont les causes actuelles, telles que la richesse ou la pauvreté du sol, la vigueur ou l'état rabougri des individus, ne peuvent rendre compte.



Cette forêt est établie en plaine, sur un sol argilo-sableux, favorable à la végétation des ronces, d'une perméabilité convenable, ni trop sec ni trop humide, du reste fertile et riche en humus.

Les espèces de ronces les plus répandues dans ce bois sont les suivantes : *Rubus biformis* N. Boul. (C.), *Sprengelii* W. N. (R.), *macrophyllus* W. N. (C.), *pyramidalis* Kalt. (R.), *villicaulis* W. N. (R.), *vestitus* W. N. (A.C.), *flexuosus* P. J. M. (CC.), *coronatus* N. B. (A.C.), *dumetorum* W. N., *cæsius* L., avec un plus ou moins grand nombre de formes secondaires et dérivées.

La forêt de Phalempin est aménagée comme bois taillis sous futaie. Celle-ci se compose principalement de chênes (*Quercus pedunculata* Ehrh.) et de hêtres (*Fagus sylvatica* L.), ces derniers plus disséminés.

Le taillis comprend, par ordre de fréquence, les espèces suivantes :

Carpinus Betulus L. (prédominant), *Alnus glutinosa* Gärtn. (très fréquent dans les lieux humides), *Betula alba* L. et *pubescens* Ehrh., *Sorbus aucuparia* L., *Fraxinus excelsior* L., *Salix caprea* L., *cinerea* L., *Populus tremula* L., *Rhamnus Frangula* L., *Acer pseudoplatanus* L., *platanoides* L., *campestre* L. (lisières), *Ulmus campestris* L., *Mespilus germanica* L., *Prunus spinosa* L. (lisières), des sauvageons de cerisiers, de pommiers et de poiriers provenant de graines apportées par les oiseaux ou autrement.

Le bois est traversé par des chemins vicinaux d'importance inégale; les moins fréquentés sont constamment envahis le long des berges par la végétation spontanée du bois et aussi par les ronces qui trouvent là une lumière tempérée particulièrement favorable. Mais il n'y a pas lieu d'insister sur ce point, vu que l'administration fait procéder périodiquement au curage des fossés, et par suite les ronces disparaissent malgré leur énergique résistance, sauf à recommencer le lendemain leurs tentatives d'empiétement. Il ne peut être question ici que des surfaces limitées par les chemins et occupées par le taillis. Disons enfin

que les coupes s'effectuent dans l'ordre d'une révolution trentenaire.

Or une première observation permet de reconnaître les faits suivants :

Après l'enlèvement des produits de la coupe, la parcelle du bois qui vient d'être mise à nu montre bientôt, dès les mois de juin, juillet et août, une multitude de jeunes pousses de *Rubus* de toutes espèces; ces pousses n'atteignent que quelques décimètres (3-6), de telle sorte qu'un examen superficiel donnerait à penser que ces ronces proviennent de graines, de la même façon qu'on voit lever partout, sur la même parcelle de forêt, des bouleaux, des saules, des chênes, etc. Nous allons voir qu'il n'en est rien.

Passons de cette parcelle à celle qui lui est contiguë, représentant un taillis en cours de sa seconde année. La végétation y est fournie, abondante; les arbres et arbustes levés de graines de l'année précédente, de même que les cépées, poussent avec vigueur; tous les intervalles se sont garnis d'une couverture de plantes herbacées; des graminées, des carex, des millepertuis, des épilobes, des seneçons, etc., y croissent à l'envi. Les *Rubus*, de leur côté, développent des turions plus vigoureux que ceux de l'année précédente, mais la floraison n'ayant lieu, comme il a été dit, que sur les turions de deux ans, et ceux de l'année précédente étant demeurés très maigres, il s'ensuit que les *Rubus* ne fleurissent pas ou ne présentent que des grappes florifères insignifiantes dans les taillis de seconde année.

Les taillis de troisième et surtout de quatrième année présentent un aspect sensiblement différent. Les végétaux ligneux plus vigoureux réduisent de plus en plus et étouffent les plantes herbacées. Les *Rubus* trouvant plus de fraîcheur dans le sol par suite du couvert plus dense, ayant d'ailleurs développé leur appareil souterrain et constitué de fortes réserves nutritives, poussent avec une vigueur extraordinaire; ils multiplient leurs turions, soit sur les souches antérieures, soit par le marcottage expliqué plus haut. Ils arrivent de la sorte à occuper de grands espaces où ils forment des fourrés et des broussailles inextricables.

Quand la saison est arrivée, c'est-à-dire de fin mai à fin août, ils se couvrent successivement de fleurs et de fruits.

Quand on traverse un cantonnement de ce genre, sans se préoccuper de la marche du développement, on est porté à se croire en présence d'une station exceptionnellement favorable au développement des *Rubus* et à penser que l'état actuel se maintiendra sans doute à peu près le même pendant les années suivantes.

On est donc très surpris, en repassant par les mêmes lieux, au bout de trois ou quatre ans, de ne plus y trouver de ronces, sinon quelques pousses effilées qui, de loin en loin, cherchent la lumière au milieu du taillis devenu dense et plus élevé. Dans les taillis de dix à douze ans qui sont d'une belle venue, on ne rencontre à peu près plus de ronces, au moins à première vue, sinon dans quelques clairières, et encore, dans le bois dont il s'agit, ces clairières étant peu développées, les ronces ont disparu pour le botaniste qui cherche à récolter des spécimens d'herbier.

Passons, pour abréger, dans les taillis de vingt à trente ans. Ils ont une physionomie qui mérite d'être signalée dans ses traits relatifs à notre sujet. Les espèces dominantes, le charme, le hêtre, le chêne, le frêne, les bouleaux, le sorbier des oiseleurs, l'aune, l'érable sycomore, etc., ont pris le dessus et étouffé les broussailles; leurs tiges grêles et élancées sont dépourvues de branches jusqu'à la cime; il en résulte que l'intérieur du bois s'est éclairci; on y voit reparaître quelques espèces qui végètent et fleurissent au premier printemps, avant la pleine sortie du feuillage; l'anémone sylvie, en particulier, couvre le sol, en mars-avril, d'un tapis continu de ses fleurs blanches ou rosées; plus tard, on y rencontre l'*Hyacinthus non-scriptus*, l'*Oxalis acetosella* L. et quelques autres espèces.

En plein été, on remarque, disséminés en assez grand nombre, de petits turions de *Rubus*, plus ou moins complètement dressés, à feuilles restreintes, généralement trifoliolées, alors qu'elles ont cinq folioles dans les conditions normales. Ces turions ne fleurissent pas.

L'idée m'étant venue de déraciner un de ces *Rubus*, je fus très surpris de rencontrer une souche relativement grosse et noueuse, indiquant par divers indices qu'elle était âgée et pouvait compter de quinze à vingt ans, peut-être davantage. En ayant déraciné un certain nombre d'autres, je constatai les mêmes faits. J'avais dès lors l'explication de la manière dont les *Rubus* s'adaptent aux conditions variables d'un bois taillis.

Ces maigres turions stériles, portant trois ou quatre feuilles, dans les taillis de vingt à trente ans, sortent des mêmes souches qui étaient en pleine prospérité, donnaient des pousses florifères et fructifères quinze ans auparavant, lorsque le taillis n'avait que quatre, cinq ou six ans. En déracinant les plantes que l'on pouvait supposer venues de graines, dans les taillis de un an et deux ans, on rencontre les mêmes souches noueuses. On arrive de la sorte à établir la continuité et finalement à voir que les *Rubus* sont doués d'une grande longévité et qu'ils sont capables de s'adapter d'une façon merveilleuse aux conditions changeantes d'un bois taillis.

Quand le taillis est monté, les *Rubus*, manquant d'espace et de lumière, ne peuvent plus épanouir leur appareil végétatif et florifère très encombrant, mais ils savent réduire leurs dépenses et se contenter de peu; ils cessent de fleurir; tout leur effort se borne à élaborer, à l'aide d'un maigre turion garni de quelques feuilles, assez de matières nutritives pour maintenir la vitalité de la souche et de la racine.

Ces observations, qui ne donnent pas, il est vrai, l'âge exact que peut atteindre un plant de *Rubus*, montrent que ces végétaux se développent et se maintiennent principalement par voie végétative, par marcottage des turions de première année et par une résistance très tenace des organes souterrains aux conditions adverses du milieu extérieur.

Ce qui se passe dans un bois taillis soumis à une exploitation régulière, se vérifie également, quoique avec moins de rigueur, dans les futaies occupant des surfaces plus accidentées, par exemple dans les pays de montagnes en pente et plus ou moins rocheux.

Les observations que j'avais faites autrefois dans les Vosges sur la disparition relativement brusque des *Rubus* de certaines localités où ils étaient abondants quelques années auparavant, trouvent leur explication dans ce qui vient d'être exposé.

Les *Rubus* sont des végétaux qui exigent pour fleurir et fructifier des conditions très précises, pour chaque espèce, de lumière et de température dans le milieu aérien, de fraîcheur et de fertilité dans le sol. Quand ces conditions ne sont pas ou ne sont plus exactement remplies, la plante se restreint dans son développement, mais elle ne périt pas; elle se réduit à un strict minimum qui lui permet d'attendre longtemps l'arrivée ou le retour des conditions favorables.

II

De l'étude des Rubus *au point de vue de la question de l'espèce.*

I. — Au Congrès international des savants catholiques tenu à Bruxelles en 1894, j'ai signalé en quelques mots les difficultés que présente l'étude spécifique des *Rubus;* il me semble utile de compléter ici ces indications rapides et aussi des notes publiées dans le *Bulletin de la Société botanique de France,* sur la marche à suivre dans l'étude des *Rubus* (*).

Depuis lors, M. Utsch a publié, dans le recueil intitulé : *Jahresbericht des Westfälischen Prov.-Vereins für Wissenschaft und Kunst,* 1894-1895, un travail important sur les hybrides dans le genre *Rubus.*

Ce mémoire est divisé en deux parties. La première, assez courte, contient en quelques pages l'exposition des idées théoriques de l'auteur sur l'origine probable des formes de ronces que nous rencontrons dans la nature. La seconde partie est une application des principes établis dans la première.

(*) *Bull. de la Soc. bot. de France,* séance du 10 février 1893.

M. Utsch n'attribue à la faculté de varier qu'une part très restreinte dans la production de ces très nombreuses formes de ronces, et il déclare que, pour lui, la plupart des formes que l'on désigne habituellement sous le nom de variétés, sont des hybrides (*). Il attribue également à l'hybridité la production des déviations tératologiques qui se rencontrent fréquemment chez les *Rubus*.

Tout en proposant avec quelque réserve l'hypothèse d'une espèce unique au début, il s'arrête à l'idée de l'existence en fait d'un petit nombre de formes qu'il regarde comme primitives ou ayant servi de souches à toutes les autres (*vermutliche Stammarten*). Ces espèces premières sont, pour M. Utsch, les *R. tomentosus, ulmifolius, bifrons, macrophyllus, plicatus, rudis, glandulosus* et *cæsius*.

Il est regrettable que l'auteur ne fasse pas connaître les raisons qui l'ont conduit à ce nombre, ni plus ni moins, de huit espèces (**); d'autres, en effet, seraient tentés, soit de le restreindre encore, soit de l'élargir. Le défaut très notable de cette première partie est de ne contenir que des hypothèses isolées même des probabilités plus ou moins sérieuses que l'on aurait pu rassembler en leur faveur.

La seconde partie offre un intérêt plus direct pour le spécialiste. Il s'agit de voir comment M. Utsch s'y prend pour expliquer l'origine de ces innombrables formes de *Rubus* que nous rencontrons partout et dont la physionomie change si rapidement d'une localité à une autre.

Quand l'auteur établit et nomme des hybrides nouveaux d'après ses observations personnelles dans le domaine de ses excursions, je suis disposé à croire ces observations exactes, les moyens de contrôle me faisant d'ailleurs complètement défaut; il s'agit plutôt des formes décrites depuis longtemps déjà comme espèces et jouissant d'ailleurs d'une large dispersion géogra-

(*) « Die meisten sogenannten Varietäten sind Hybriden. »

(**) Dans le corps de l'ouvrage, il réduit ce nombre à sept en faisant du *R. rudis* un *R. serpens* × *villicaulis*.



phique. Il me semble utile, à titre d'exemples, de discuter quelques-unes des interprétations nouvelles proposées par M. Utsch.

En suivant l'ordre de son mémoire, on rencontre d'abord :

« *Rubus collinus* DC. = *R. tomentosus* × *arduennensis.* »

Le *R. collinus* a été étudié en premier lieu et nommé par A.-P. de Candolle; c'est une plante très localisée sur un espace de quelques centaines de mètres, près de Montpellier. Je suis très disposé à voir un hybride dans le *R. collinus;* c'est le concours du *R. arduennensis* qui me paraît contestable dans cette circonstance. Le *R. ulmifolius,* qui abonde aux environs de Montpellier, permet d'arriver à une interprétation beaucoup plus naturelle des faits; c'est pourquoi, au lieu de *R. tomentosus* × *arduennensis,* je propose *R. tomentosus* × *ulmifolius.* Outre la plante de Montpellier qui est strictement le *R. collinus* DC., on trouve çà et là dans toute la région méditerranéenne, en société des *R. tomentosus* et *ulmifolius,* des formes plus ou moins semblables au *R. collinus* et probablement de même origine. On peut supposer la même chose d'une série de formes signalées par le Dr Ripart aux environs de Bourges et décrites par Genevier : telles sont les *R. amictifolius* Rip., *proximellus* Rip., *pellitus* Rip., *acroleucophorus* Rip., *tomentellus* Rip. Cependant, je ne voudrais pas m'aventurer, de mon côté, à soutenir prématurément des interprétations qui demandent à être vérifiées sur place par des observations attentives et prolongées. C'est plutôt le cas d'insister sur les difficultés que l'on rencontre lorsqu'il s'agit d'appliquer la théorie de l'hybridation à une forme quelconque de *Rubus.*

Le Dr Godron, qui avait étudié soigneusement les *Rubus* des environs de Nancy et connaissait, d'ailleurs, très bien le *R. collinus* DC., crut le reconnaître dans une ronce représentée par quelques pieds seulement sur les coteaux de Laxou (Meurthe-et-Moselle).

En effet, la plante de Laxou et celle de Montpellier sont très semblables; toutefois, P.-J. Müller, se fondant sur diverses particularités, nomma la plante de Nancy *R. chnoophyllus,* pour la distinguer de celle de Montpellier.

Les caractères morphologiques différentiels sont sans doute très faibles, mais la difficulté est ailleurs. Le *R. ulmifolius*, que l'on peut considérer comme l'un des parents du *R. collinus*, n'existe pas aux environs de Nancy ; il y est remplacé par une forme du *R. macrostemon* Fock., qui a pu jouer le même rôle, en sorte que le *R. collinus* de Nancy (*R. chnoophyllus* P.-J. Müll.) doit être compris comme un *R. tomentosus* × *macrostemon.*

M. Utsch dit plus loin : « *R. fallax* Chab. = *R. rectangulatus* × *candicans.* »

Il convient de faire remarquer à ce sujet que le *R. fallax* Chab. ne diffère pas spécifiquement du *R. Questierii* Lef. et Müll. Or le *R. Questierii* est répandu dans tout l'ouest de la France et il se comporte comme une espèce autonome, lorsque le *R. rectangulatus,* forme du *R. villicaulis,* n'a pas été signalé dans cette région ; l'empreinte du *R. candicans* ne se retrouve pas non plus dans le *R. Questierii.*

De même, est-il vraiment probable que le *R. pyramidalis* Kalt. soit un « *R. vestitus* × *gratus* » ? Ni l'analyse des caractères morphologiques, ni la distribution géographique ne conduisent à cette conclusion.

Le *R. pyramidalis* occupe une aire de distribution plus étendue que ses parents supposés ; le *R. gratus*, en particulier, est à peine connu en France, sur quelques points confinant à la Belgique, lorsque le *R. pyramidalis* se développe dans ce pays très avant dans le centre et même dans l'ouest ; il y existe dans un très grand nombre de localités.

Le *R. gratus,* de son côté, devient, pour M. Utsch, un « *R. Bellardii* × *macrophyllus* ».

Je ne puis saisir la valeur de ce rapprochement. M. Focke considère le *R. gratus* comme une espèce beaucoup plus normale que ses prétendus parents, en raison de son pollen presque parfait. Le *R. Bellardii* est hérissé, sur toutes ses parties, de glandes pédicellées et d'aiguillons sétiformes ; ses fleurs sont tout à fait blanches ; sa tige est subcylindrique, tandis que le *R. gratus* a la tige glabre, dépourvue de glandes et de soies, nettement canaliculée sur les faces ; ses fleurs sont d'un beau rose, etc.

Le *R. gratus* prend place dans la même section que le *R. macrophyllus*, mais je ne vois pas qu'il forme un intermédiaire entre celui-ci et le *R. Bellardii.*

On pourrait contester de même, avec d'excellentes raisons à l'appui, les assimilations suivantes :

« *R. Sprengelii* Weih. = *R. rivularis* × *macrophyllus.*
» *R. vestitus* W. et N. = *R. Bellardii* × *bifrons.*
» *R. Borœanus* Genev. = *R. flexuosus* × *hirsutus.*
» *R. rudis* W. et N. = *R. serpens* × *villicaulis.*
» *R. Radula* Weih. = *R. rudis* × *candicans.*
» *R. Kœhleri* W. et N. = *R. hirtus* × *villicaulis.*
» *R. Schleicheri* W. et N. = *R. Bellardii* × *Sprengelii.* »

Le mémoire de M. Utsch a le mérite d'attirer l'attention plus vivement qu'on ne l'avait fait sur la part qui revient aux croisements dans la production des formes si variées de *Rubus*, mais dans l'application, il laisse le lecteur souvent perplexe.

Sans dépasser les limites raisonnables de la critique, il est bien permis de dire que l'auteur n'a rien ajouté à nos connaissances sur l'origine probable des espèces principales largement répandues, telles que *R. vestitus, pyramidalis, gratus, rudis, Sprengelii*, etc.

II. — On doit à M. Focke un travail récent d'une tout autre portée. Il est intitulé : *Ueber* Rubus Menkei W. et N. *und verwandte Formen.*

A la suite de considérations générales sur divers groupes de plantes polymorphes, comme on en rencontre dans les genres *Potentilla*, *Rosa*, etc., l'auteur aborde les *Rubus*. Il rappelle quelques principes généraux posés par lui dans ses publications antérieures, dès 1868, et surtout dans le *Synopsis Ruborum germanicorum* (1877). Voici le résumé qu'en donne l'auteur :

« Il est possible de coordonner sans difficulté une partie des formes de *Rubus* en un nombre modéré d'espèces ou de groupes d'espèces voisines, de deuxième ordre, en cette sorte :

1° Pollen à grains uniformes; espèces largement répandues :

R. rusticanus Merc. (*ulmifolius* Schott), *R. tomentosus* Borkh., *R. cæsius* L.

2° Pollen presque uniforme : *R. gratus* Fock., *R. Arrhenii* J. Lang., *R. incanescens* Bertol.?

3° Pollen mélangé; groupes d'espèces : *suberecti, rhamnifolii, glandulosi* et aussi *thyrsoidei* et *rosacei*.

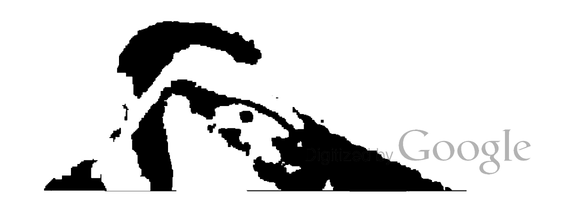
4° Pollen mélangé ; une espèce principale dominante : *R. vestitus, R. micans, R. foliosus, R. rudis, R. scaber*. Peut-être aussi *R. Questierii, R. mucronatus* et *R. egregius*.

En toute hypothèse, les formes de ronces européennes se rattachent, d'après ces idées, à un nombre restreint de types bien caractérisés. »

M. Focke étudie en détail un de ces types, le *R. vestitus* W. et N. Il en fait le centre d'une *Phratrie* (du grec Φρατρία, clan, confrérie), c'est-à-dire d'un groupe d'espèces relativement voisines, quoique bien caractérisées par une large dispersion géographique et la constance de leurs caractères. La phratrie du *R. vestitus* comprend, pour M. Focke, les *R. Borœanus* Genev., *Gymnostachys* Genev. et *pyramidalis* Kaltenb. Il appelle *Gènes* (γενή) des séries de formes reliant comme intermédiaires deux espèces principales. Le *R. Menkei* constitue un de ces ensembles de formes reliant les *R. vestitus* et *Bellardii*. Le *R. obscurus* forme une autre *gène*, où l'on rangera les formes intermédiaires entre le *R. vestitus* et les *R. rosaceus, Hystrix, Lejeunei* et espèces voisines.

Je renvoie pour les développements au travail de M. Focke. L'auteur y fait preuve d'une science consommée et d'un sens d'appréciation très exact des affinités que présentent tant de formes complexes.

Mais la question est si difficile qu'il est nécessaire de l'envisager de diverses façons. C'est pourquoi, tout en tenant grand compte des opinions de M. Focke, je voudrais faire valoir ici les idées personnelles que j'ai puisées dans une longue étude du même sujet, me préoccupant surtout d'arriver à une intelligence satisfaisante de la flore batologique française, moins connue que celle de l'Allemagne et des pays du nord de l'Europe.



Le premier principe qui s'impose, à mon sens, consiste à procéder dans cette étude avec une méthode rigoureuse, à dégager d'abord ce qui paraît certain, puis ce qui est probable à divers degrés, à suivre les faits pas à pas aussi loin que possible, à donner toujours les hypothèses pour ce qu'elles valent, c'est-à-dire des vues de l'esprit en quête de vérités dont la démonstration n'est pas acquise.

Une observation attentive des *Rubus* dans la nature permet d'arriver assez promptement à saisir combien la valeur des espèces ou formes distinctes est inégale dans ce genre. C'est un premier résultat, capital dans cette étude. Tant que l'on s'est obstiné à décrire des espèces sans les comparer, sans chercher à découvrir leur valeur hiérarchique et leurs affinités réciproques, on s'est trouvé comme un pilote désorienté sur une mer immense et sans rivages. On ne pouvait aboutir; les espèces se multipliaient sans limites sous la plume des descripteurs et devenaient dans la même mesure de plus en plus obscures et indéchiffrables. M. Focke a proposé deux critériums pour juger de la valeur relative des espèces.

Le premier, le plus important en théorie, est fondé sur l'état morphologique du pollen. Dans un très petit nombre d'espèces, les *R. ulmifolius, tomentosus* et *cæsius*, le pollen est parfait.

Une seconde série comprend les espèces dont le pollen est presque parfait ou mélangé de très peu de grains mal développés. M. Focke range maintenant à côté du *R. Arrhenii*, le *R. gratus* qu'il avait d'abord placé dans la première catégorie. Il cite encore avec doute le *R. incanescens* Bertol. J'ai constaté de mon côté que le *R. ægocladus* Müll. et Lef. (*R. Lejeunei* Godr.) possède également un pollen presque parfait.

On range dans une troisième catégorie, mais avec des degrés, les espèces dont le pollen est très mélangé, où, avec des grains normaux qui assurent la fertilité de la plante, il s'en trouve un grand nombre d'imparfaits.

Le deuxième critérium, moins important, semble-t-il, en théorie, complète heureusement le premier et même le prime de fait, comme nous allons le voir. Il s'agit de la dispersion géo-

graphique. Certaines espèces, morphologiquement bien caractérisées, n'ont été rencontrées que dans une seule localité et n'y sont représentées que par quelques buissons ou même par un seul. D'autres occupent, au contraire, une aire de distribution très étendue, par exemple toute l'Europe moyenne, ou une région naturelle équivalant en surface à une ou plusieurs de nos anciennes provinces. Toutes choses égales d'ailleurs, il est évident que les espèces à large dispersion sont plus importantes que celles limitées sur un point à quelques buissons.

Combinons l'emploi de ces deux critériums; nous voyons que :

1° Les espèces à pollen parfait sont également des espèces à très large dispersion géographique. Ce sont dès lors des espèces de premier ordre. Elles se réduisent, comme on l'a vu, à trois : les *R. ulmifolius, tomentosus* et *cæsius*.

2° Parmi les espèces à pollen en partie atrophié, il y en a de très largement répandues, telles les *R. vestitus, pyramidalis, rudis, hirtus, Bellardii, plicatus,* etc. Qu'en faire, au point de vue du classement? Il semble qu'elles priment, sous ce rapport, les espèces à pollen presque parfait, telles que *R. gratus* et *Arrhenii,* dont l'aire de dispersion est beaucoup plus restreinte.

Il importe de préciser nos idées relativement à ces espèces largement répandues, mais à pollen plus ou moins imparfait.

Pouvons-nous expliquer *avec certitude* l'imperfection de leur pollen par la théorie de l'hybridité? Je n'ai pu jusqu'ici me faire une conviction dans ce sens. Pouvons-nous dire que les *R. vestitus, bifrons, macrophyllus, plicatus,* etc., sont des hybrides? M. Utsch lui-même a reculé devant cette hypothèse, puisqu'il les range au nombre de ses espèces-souches (*Stammarten*) dont il laisse l'origine inexpliquée. Il cherche sans doute à expliquer par des croisements l'origine de plusieurs autres, telles que les *R. rudis, pyramidalis,* etc., mais nous avons vu qu'il a échoué dans cette entreprise. Sans vouloir condamner toute tentative ultérieure dans le même sens, il me semble qu'il faut pratiquement et pour le moment s'en tenir aux faits, en admettant comme espèces de deuxième ordre celles qui, tout en restant identiques

à elles-mêmes au point de vue morphologique, occupent une aire de distribution très large.

Mais comment délimiter cette catégorie? Combien lui faudra-t-il occuper de myriamètres carrés, pour qu'une espèce puisse figurer sur cette liste des espèces de deuxième ordre? Ici, comme dans la plupart des questions de même genre, nous ne pouvons user d'une rigueur mathématique. Les espèces dont il s'agit se rangeront d'après le même principe en série décroissante. Le *R. vestitus*, répandu dans toute l'Europe moyenne, primera le *R. villicaulis*, répandu plutôt sur les contours de la mer du Nord et de la Baltique, ainsi que le *R. Questierii*, commun seulement dans l'ouest de la France et une partie des Iles Britanniques.

D'autres espèces ont une aire de dispersion de plus en plus restreinte, équivalant à une province ou à un département, correspondant à un petit bassin naturel, à une vallée, et l'on finit par aboutir aux formes les plus étroitement localisées.

III. — C'est à celles-ci que l'on applique avec succès la théorie de l'hybridité.

Dans un quartier de forêt, dans un bois de quelque étendue, on rencontre presque toujours, à côté d'un petit nombre de ces espèces de premier et de second ordre dont il vient d'être question, des formes obscures, intermédiaires aux espèces principales. On ne les trouve pas dans les herbiers les plus complets; elles ne sont décrites nulle part; elles font le désespoir des collectionneurs qui ne peuvent arriver à les déterminer ni même à les faire nommer par les spécialistes.

Toutefois, en les examinant de près, en les comparant successivement aux espèces principales qui croissent souvent à côté ou dans le voisinage immédiat, on arrive à penser qu'elles doivent être le produit de ces dernières, qu'elles sont en définitive des hybrides ou des métis.

Dans certains cas, lorsque les parents appartiennent à des espèces bien définies, très distinctes et que le produit tient par ses caractères exactement le milieu entre les deux, partageant

les traits de l'un et de l'autre, sa nature hybride apparaît avec une réelle évidence et n'est pas contestable lorsqu'on observe les faits sur place.

Outre le caractère de tenir le milieu entre deux espèces, ces formes hybrides se révèlent fréquemment par une fertilité amoindrie à divers degrés, beaucoup de fleurs sur une même inflorescence étant complètement stériles et les autres ne conduisant à maturité qu'un petit nombre de drupéoles.

Le principe de ces croisements étant admis, il entraîne toutes les complications observées dans d'autres genres de plantes.

Le produit d'un croisement n'est pas toujours à distance égale des deux parents; il peut se rapprocher davantage de l'un ou de l'autre, jusqu'à pouvoir passer pour en être une variété. Si les deux parents sont des espèces très variables, telles que les *R. ulmifolius* et *tomentosus*, on conçoit que, selon les lieux et les circonstances, ces deux espèces produisent un très grand nombre d'hybrides assez distincts, quand on les examine sur des échantillons d'herbier, pour avoir pu donner lieu à la création d'une foule de prétendues espèces.

Quand les espèces procréatrices sont de même assez variables et de plus relativement voisines, comme les *R. bifrons* et *macrostemon*, les *R. plicatus* et *nitidus*, les *R. serpens* et *hirtus* ou *Bellardii*, les formes résultant de croisements de ce genre peuvent être extraordinairement difficiles à débrouiller. On n'y arrivera qu'à la suite d'études comparatives prolongées, faites sur place, en s'aidant de tous les indices qui peuvent mettre sur la voie, suggérer une conclusion plus ou moins probable, rarement hors de doute.

J'ai signalé déjà, à titre d'exemple, la ressemblance étroite qui existe entre le *R. tomentosus* × *ulmifolius* (*R. collinus* DC.) et le *R. tomentosus* × *macrostemon* (*R. chnoophyllus* P.-J. M.).

Une forme hybride plus ou moins stérile par elle-même peut devenir fertile si elle est fécondée par le pollen de l'un de ses parents, et les graines donneront des plantes plus ou moins rapprochées de celui-ci. Il est possible, d'autre part, que deux ronces considérées comme espèces, d'après les principes d'une



portée provisoire exposés plus haut, ne soient en réalité que des races plus ou moins tranchées et fixées; elles seront dès lors capables de produire entre elles des métis complètement fertiles.

Ajoutons cette autre remarque digne d'attention, que des espèces, même de premier ordre, deviennent stériles lorsqu'elles végètent dans un milieu défavorable, soit par suite de la pauvreté du sol, de la sécheresse trop grande de l'air, ou de conditions tenant à l'altitude. J'ai eu l'occasion de constater maintes fois des faits de ce genre dans le *R. tomentosus* et le *R. cæsius*.

On ne doit, par conséquent, appliquer le critère de la stérilité à la reconnaissance d'une ronce hybride qu'avec la plus grande circonspection.

Une autre série de faits doit nous retenir encore quelque temps. Les hybrides ou métis dans le genre *Rubus* sont de valeur inégale selon le temps. Quand une ronce hybride n'est représentée que par un seul pied ou un buisson de peu d'étendue, qu'il se trouve dans le voisinage immédiat des parents, il est tout à fait à croire que sa production est récente, qu'elle ne remonte qu'à un petit nombre d'années. C'est le cas le plus simple; quand on est familiarisé avec la flore batologique d'une localité, on finit toujours par rencontrer des faits de ce genre prouvant que des formes de croisement ne sont pas rares parmi les *Rubus*. Il me semble inutile de citer des cas particuliers qui n'ajouteraient rien à la théorie.

Des complications se produisent avec le temps. En raison de la ténacité, de la longévité d'un plant de *Rubus*, de sa merveilleuse faculté de se multiplier et de s'étendre par voie végétative, un hybride, si les circonstances lui sont favorables, est capable de se propager sur des espaces considérables, de devenir une forme dominante dans une forêt. On est dès lors porté à lui attribuer une importance qu'il n'a pas. Je connais un fait de ce genre dans la forêt de Saint-Amand (Nord), où un *R. nitidus* × *Sprengelii* a fini par envahir tout un large quartier

le long des haies, des chemins et des clairières. La plante est toutefois assez peu fertile. Il est à croire qu'un hybride de ce genre remonte à une époque plus ou moins éloignée. Depuis près de vingt ans que j'observe le *R. nitidus* × *Sprengelii*, il s'est parfaitement maintenu, disparaissant sur un point, reparaissant sur un autre, conformément à ce que nous savons de la végétation des *Rubus* dans les bois taillis.

Les parents existent dans le voisinage; le *R. Sprengelii* est, en particulier, très fréquent dans ce quartier où il a donné origine à d'autres hybrides plus rares. Mais il peut se faire que les parents, quoique d'espèces largement répandues, soient rares dans une localité ou même une portion de pays relativement étendue; les *R. vestitus, rudis, Radula, macrostemon* et beaucoup d'autres sont dans ce cas. Deux de ces espèces représentées par quelques pieds sur un point ont pu donner naissance à un hybride et disparaître par une cause naturelle ou le fait de l'homme, tandis que l'hybride persiste et même étend son aire de dispersion. Si un botaniste vient à le rencontrer et à l'examiner, qu'en fera-t-il ? Dans les conditions d'isolement qui viennent d'être décrites, la plante affecte une apparence d'autonomie très capable d'induire en erreur. Si elle n'est pas exactement intermédiaire entre deux espèces bien connues, on ne saura qu'en penser.

Si l'hybride est compliqué, en ce sens que trois ou quatre espèces ont concouru successivement à le produire, le problème sera tout à fait insoluble. C'est le cas de beaucoup de formes de la section des *Rubi triviales* de Müller.

On est amené de la sorte à confesser son ignorance et à borner sa tâche à ce qui est possible en fait, c'est-à-dire à constater les affinités morphologiques, les relations apparentes de ces formes ambiguës avec les espèces mieux fixées dont elles se rapprochent, plutôt que de vouloir leur assigner à toutes une origine peut-être inexacte.

M. Focke, qui semble disposé à faire jouer à l'hybridité et au métissage le rôle principal dans la multiplication des formes

de ronces, ne se prononce, à propos des faits particuliers, qu'avec une prudente réserve. Il réunit dans une même phratrie le *R. vestitus* et le *R. pyramidalis*, mais il se garde bien de dire en termes précis que l'un dérive de l'autre et de décrire le processus de cette filiation.

Sous le titre de gène du *R. Menkei*, il groupe des formes plus ou moins intermédiaires entre le *R. vestitus* et les espèces de la section des *Rubi glandulosi*. Le *R. Menkei* proprement dit est intermédiaire entre le *R. vestitus* et le *R. Bellardii*, tandis que les autres formes de ce groupe le sont entre le même *R. vestitus* et d'autres espèces de *Rubi glandulosi*.

La gène du *R. obscurus* réunit semblablement des formes qui rappellent encore le *R. vestitus* et d'autres espèces à fleurs roses, telles que les *R. rosaceus Hystrix*, *Lejeunei*, etc., sans préciser avec rigueur pour chaque forme l'attribution particulière.

Ces combinaisons, que l'on pourrait appeler *élégantes* quand elles viennent d'un homme aussi profond connaisseur du genre *Rubus* que l'est M. Focke, épuisent-elles le sujet et nous permettent-elles de rendre compte de tous les faits ? Nous sommes loin de cet idéal.

A propos du *R. Menkei*, M. Focke dit qu'il pourrait faire vingt espèces dans ce groupe. Or, ajoute-t-il, ce groupe représente tout au plus $^1/_2$ $^0/_0$ de l'ensemble, et la faculté de distinguer dont nous sommes doués ne suffirait pas à dominer les dix mille ou les vingt mille espèces de *Rubus* européens qu'il faudrait établir pour être conséquent avec soi-même.

A propos du *R. obscurus*, M. Focke dit dans le même sens que si l'on se met à distinguer des espèces dans ce groupe, on en trouve une nouvelle dans chaque localité.

Dans le travail substantiel de M. Focke que j'analyse ici, l'auteur s'occupe surtout de la multiplication des formes de ronces par le croisement ; il ne fait que mentionner d'autres causes, telles que la sélection naturelle, l'influence des conditions physiques et chimiques du sol.

Dans une étude générale où l'on se propose d'examiner la question sous toutes ses faces, il n'est pas permis de faire abstraction de ces causes, dont le rôle à travers de longs siècles n'a certainement pas été négligeable. Avec le temps, des adaptations se sont faites dont nous voyons les résultats sans pouvoir en établir la filière ni le mécanisme.

On peut se demander pourquoi, dans la chaîne des Vosges, sur les terrains siliceux, granits et grès, la plupart des *Rubus* ont des fleurs blanches et quelques espèces seulement des fleurs plus ou moins faiblement rosées, tandis que dans l'ouest et le centre de la France, les ronces à fleurs d'un blanc pur forment une exception et que les formes à fleurs d'un beau rose sont fréquentes (*).

Le *R. vestitus*, dans les hautes Vosges, sur le granit, affecte la forme à fleurs blanches dont Müller avait fait son *R. leucanthemus*.

Dans la forêt de Fontainebleau et sur divers points du Plateau-Central, le *R. vestitus*, sans différer beaucoup pour le reste, présente des fleurs d'un beau rose, cette coloration affectant non seulement la corolle, mais aussi les filets des étamines et les styles. Faut-il encore faire intervenir, pour expliquer ces divergences, la théorie des croisements, l'influence, par exemple, d'espèces du voisinage à fleurs roses, telles que les *R. ulmifolius* ou *Gilloti ?*

Ces faits de coloration ne sont pas toujours purement accidentels. Ayant élevé de semis la variété *leucanthemus* et la cultivant à Lille sur un sol argileux, je n'ai pas été peu surpris de voir la coloration de la fleur se reproduire très exactement ainsi que les autres caractères.

A mesure qu'on s'avance du nord vers le midi, qu'on passe d'un climat froid et humide à un climat plus chaud et plus sec,

---

(*) Il en est de même dans la forêt de Compiègne, où, d'après les observations de V. Lefèvre, les *Rubi spectabiles*, c'est-à-dire les ronces glanduleuses à fleurs roses, abondent.



à des stations où la lumière du soleil est plus pénétrante, l'éclairement plus vif et plus prolongé, beaucoup de *Rubus* présentent, dans les mêmes espèces, des feuilles plus généralement blanches, tomenteuses en dessous. Quelle part faut-il faire à cette cause agissant d'une façon continue à travers le cours de huit mille ou dix mille ans ?

Dans une même région naturelle, un même bassin hydrographique, la plupart des ronces présentent entre elles un certain air de famille, une sorte de physionomie commune, qui embarrasse lorsqu'il s'agit de les ramener à leurs types spécifiques. Il faut parfois les étudier longuement avant de pouvoir dégager ce masque local et retrouver les types généraux. Est-ce toujours et uniquement aux croisements qu'il faut attribuer ces phénomènes curieux? Les *R. vulnerificus* en Normandie, *macrostemon* dans la forêt de Fontainebleau, *Gilloti* dans le Morvan et le Plateau-Central, semblent bien n'être que des formes saillantes du *R. hedycarpus*. Toutefois, s'ils dérivent d'une même souche, par quelle voie les divergences se sont-elles produites? Il y a encore beaucoup à chercher et à découvrir dans ces diverses directions.

IV. — Toutes les considérations développées ou indiquées jusqu'ici se rattachent à des faits du monde actuel. La flore batologique telle que nous la connaissons, prise dans son ensemble, n'est pas très ancienne.

Au début du quaternaire, à l'époque de la grande extension glaciaire, nos régions montagneuses, de 400 à 900 mètres d'altitude dans les Vosges, de 700 à 1200 dans le Plateau-Central, de 800 à 1500 dans les Pyrénées, si riches, de nos jours, en formes variées de *Rubus*, en étaient dépourvues, puisqu'elles étaient occupées par des glaciers. Il faut donc admettre que la dispersion actuelle des *Rubus* en France ne remonte pas au delà de l'établissement définitif des conditions climatériques actuelles, c'est-à-dire au delà de l'époque actuelle ou de ce que l'on appelle en archéologie le néolithique.

En tenant compte de ce qui précède relativement à l'influence de l'hybridité et du métissage, on est conduit à penser que le nombre des espèces ou formes devait être beaucoup moindre au début que de nos jours.

Pendant la seconde partie des temps quaternaires, le climat étant plus froid qu'à notre époque, les espèces qui recherchent les hautes altitudes devaient se rencontrer à un niveau où elles trouvaient des conditions de milieu conformes à leurs exigences. C'est ainsi que l'on rencontre encore, à l'état sporadique et sous des formes rabougries, le *R. Bellardii*, le *R. hirtus* et d'autres analogues dans la région de nos collines basses où ils semblent plus ou moins dépaysés. Mais avant de quitter ces lieux pour s'élever peu à peu sur les flancs de nos montagnes, ces espèces ont pu donner naissance par des croisements à des formes mieux adaptées aux conditions nouvelles du climat et marquées pour une part de leur empreinte.

Ces considérations peuvent donner une force nouvelle aux spéculations de M. Focke sur l'origine de ces formes intermédiaires entre le *R. vestitus* et les espèces glanduleuses (*R. Bellardii, hirtus, serpens*, etc.). C'est ainsi, par exemple, que le *R. Menkei* est largement représenté dans le Morvan et dans les Vosges, à des altitudes où les espèces glanduleuses ci-dessus ne se rencontrent plus sous leurs formes caractéristiques.

Il résulte de là que des formes d'origine hybride peuvent être isolées par cette voie des espèces procréatrices qui auront émigré.

N'oublions pas d'autres possibilités. Certaines formes rares des régions basses peuvent n'être pas toujours des hybrides, mais des espèces en voie d'extinction.

Si les espèces actuelles des régions montagneuses ont dû y parvenir par une ascension graduelle, tout en laissant des retardataires échelonnés sur la route, il est possible également que les causes actuelles de dispersion, les oiseaux migrateurs, les cours d'eau, le vent, l'action de l'homme, transportent des graines d'espèces de montagnes dans les régions basses où elles germent

et se développent tant bien que mal, sous des formes qui, peut-être, finissent par s'adapter au milieu. Il faut donc y regarder de près et tenir compte de tous les indices.

A mesure que les espèces actuelles des montagnes quittaient les collines basses ou des latitudes moins élevées, elles étaient remplacées par d'autres espèces venant de régions plus chaudes, situées plus loin vers le midi. Le *R. ulmifolius* doit être considéré comme une de ces espèces d'origine méridionale dont il est curieux de suivre les colonies dans leur marche continue vers le nord. Le *R. tomentosus*, dont l'aire de dispersion recouvre sur de grands espaces celle du *R. ulmifolius*, avec des écarts notables, se prête à des études de même genre.

La paléontologie seule pourrait nous fournir des documents réels sur l'origine ou du moins le passé, dans une certaine mesure, des espèces végétales actuelles; mais elle est à peu près muette quand il s'agit des *Rubus*. Le vestige le plus ancien se réduit à des noyaux de drupéoles rencontrés dans le forestbed de Cromer, c'est-à-dire dans les couches les plus élevées du pliocène en Angleterre. C'est un indice de l'existence du genre à cette époque, mais pas autre chose.

Quelques similitudes entre le *R.villosus* Ait. de l'Amérique du Nord et le *R. sulcatus* Vest. de l'Europe moyenne se rattachent encore comme un indice très restreint au fait plus général que pendant la durée du tertiaire l'Europe et l'Amérique possédaient en commun un nombre peut-être plus grand que de nos jours d'espèces identiques; dans tous les cas, on rencontre à l'état fossile en Europe, et particulièrement en France, les vestiges d'un certain nombre d'espèces éteintes dans nos contrées, mais persistant aux États-Unis ou au Canada.

Ces indications montrent combien les spéculations générales sur l'origine des espèces végétales sont peu fondées sur des faits réels et bien constatés. Quand même on admettrait que tous nos *Rubus* actuels dérivent par variation ou par des croisements des trois espèces principales à pollen parfait, *R. tomentosus* Borckh., *ulmifolius* Schott et *cæsius* L., ce qui est tout au plus possible,

nullement probable, on se trouverait complètement arrêté à ce point, vu que nous ignorons tout à fait d'où peuvent venir ces trois espèces. Ce point d'arrêt ne peut d'ailleurs être reculé au delà des temps strictement actuels, puisque les documents paléontologiques nous font défaut, lorsqu'ils seraient indispensables pour juger de ce qui existait dans le passé.

V. — Ces considérations peu encourageantes à un certain point de vue quand il s'agit des origines lointaines, ne doivent pas nous détourner de suivre attentivement l'évolution des formes végétales dans le présent plus accessible à des observations vraiment scientifiques. D'un autre côté, les spécialistes ne doivent pas travailler seulement pour eux-mêmes, ils doivent de plus viser à rendre les résultats de leurs recherches accessibles à de nouveaux adeptes de la science.

C'est dans ce dernier but que j'ai publié dans le *Bulletin de la Société botanique de France* un premier travail bibliographique sur l'étude des *Rubus* dans ce pays, puis un second sur la marche à suivre dans cette étude; dans un troisième article, j'ai donné le tableau synoptique des subdivisions hiérarchiques qui conduisent dans la section *Eubatus* jusqu'aux espèces principales.

Avant d'aborder les détails de la partie descriptive, j'ai voulu compléter ici l'exposition de certaines idées générales relatives à la distinction et à l'origine des espèces.

Il me reste à donner, en faveur des botanistes désireux d'entreprendre l'étude des *Rubus*, quelques indications d'un caractère pratique, utiles pour prévenir le découragement au début de ces recherches spéciales.

1° Il convient de n'aborder une étude aussi extraordinairement difficile que lorsqu'on s'est déjà familiarisé de longue date avec la botanique descriptive et les procédés techniques de la formation d'un herbier.

2° Il faut ensuite se mettre au courant de quelques principes spéciaux concernant l'étude et la préparation des *Rubus*.

La première précaution à prendre est d'éviter les mélanges.

Dans les haies et les forêts, il arrive souvent que plusieurs espèces ou au moins des formes méritant d'être distinguées, croissent pêle-mêle, entrelaçant leurs tiges et leurs rameaux foliifères. On n'arrive à les séparer avec certitude qu'en remontant des turions à la souche unique qui porte à la fois les pousses foliifères de première année et celles florifères de deuxième année, selon ce qui a été exposé dans le premier article de ce travail. Une part d'herbier portant la trace de tous les caractères de l'espèce, se composant de pièces indépendantes, segments munis de feuilles du turion de première année, rameaux florifères et fructifères (vu qu'on ne peut conserver dans une collection un plant de *Rubus* tout entier avec sa souche et ses racines), il est d'une nécessité absolue que ces divers éléments d'étude appartiennent au même individu. Il faut donc prendre, au moment de la récolte, pendant la dessiccation et les diverses manipulations ultérieures, toutes les précautions nécessaires pour aboutir sur ce point à une sécurité qui exclue toute incertitude.

3° Il ne faut pas vouloir épuiser dès le début l'étude et la récolte de tous les *Rubus* d'une forêt ou d'un canton; on arrive plus vite à des résultats satisfaisants en commençant par les formes qui paraissent les plus communes et qui semblent d'un développement plus normal. On a de la sorte plus de chances d'atteindre les espèces principales, noyées dans la nature au milieu des formes secondaires qui presque partout constituent la masse à première vue.

4° Les récoltes faites, il faut les étudier et les déterminer. Plusieurs voies s'ouvrent à cet effet : soumettre ses récoltes au visa d'un spécialiste, les étudier soi-même à l'aide d'un manuel et en remontant aux sources bibliographiques, et enfin comparer ses récoltes à des spécimens déterminés authentiquement. Ces trois moyens peuvent et même doivent être employés concurremment. En tout état de cause, il ne faut pas espérer que l'on arrivera du premier coup à une détermination rigoureuse de tous ses échantillons. L'essentiel est, comme on doit le savoir maintenant, d'arriver à une connaissance exacte des espèces principales.

Le meilleur manuel à prendre comme guide dans l'étude des *Rubus* est encore le *Synopsis* de M. Focke (*).

Il faut du reste se mettre au courant de tout ce qui a paru sur ces questions spéciales.

Les *exsiccata* ou collections de plantes sèches les plus remarquables ou les plus accessibles sont, pour les *Rubus :*

Les Ronces vosgiennes, 1864-1869. Sept livraisons de 20 numéros chacune.

Herbarium Ruborum germanicorum, publié par E. Braun. Dix fascicules de 20 numéros, 1877-1881.

Rubi Helvetiæ austro-occidentalis, publiés par L. et A. Favrat.

Rubi exsiccati Daniæ et Sleswigiæ, par MM. K. Friderichsen et O. Gelert, 1885. Trois fascicules et 101 numéros.

L'*Association rubologique* (1873-1893) a distribué entre ses membres 1202 numéros préparés à 15-20 parts.

Rubi præsertim gallici exsiccati. Trois livraisons, 150 numéros ont paru dès ce moment.

Quand on est arrivé, par l'emploi de ces moyens, à se faire une idée juste des types spécifiques à large dispersion, quand, par des observations sur place, on s'est familiarisé avec les variations locales ou régionales de ces espèces, on se trouve à même d'aborder avec succès l'étude des formes dérivées par variation ou par croisement. Le domaine de ces études est encore en ce moment, on peut le dire, indéfini.

Il a été impossible jusqu'ici de décrire en détail toutes ces formes intermédiaires qui cependant occupent une très grande place dans la plupart des localités.

Lors de mes premières recherches, je rencontrais aux environs de Rambervillers (Vosges) les *R. amphichlorus, cuspidatus, calvescens* et d'autres, qui, nommés par P.-J. Müller, affec-

---

(*) *Synopsis Ruborum Germaniæ*, v. Dr W. Focke. In-8°, Brême, 1877. L'auteur a publié un résumé de cet ouvrage fondamental dans *W. D. J. Koch's Synopsis*, 3e éd., publié par le Dr E. Hallier; le genre *Rubus*, traité par M. Focke, occupe les pages 735-800 de cet ouvrage, 1891.



taient toutes les allures de bonnes espèces. Cependant je ne les ai jamais rencontrés ailleurs, ni ne les ai reçus de mes correspondants. En les examinant de nouveau, j'arrive à penser que le *R. amphichlorus*, quoique répandu dans le canton ci-dessus et même plus loin, n'est autre qu'un produit d'origine ancienne du croisement des *R. vestitus* et *pyramidalis*. On rencontre à peu près partout des faits de même genre.

Les botanistes de l'avenir ont là une œuvre de longue haleine à accomplir; car il s'agit de recueillir toutes ces formes, de reconnaître exactement leur aire de dispersion, de discuter tous les faits relatifs aux probabilités d'origine.

Il y a de trente à quarante ans, un effort gigantesque fut tenté par MM. Jordan, Boreau et d'autres. C'était l'école *multiplicatrice* qui cataloguait et décrivait, comme autant d'espèces autonomes et primitives toutes les formes dont les différences même minimes semblaient douées de quelque constance. P.-J. Müller et G. Genevier en firent autant pour les *Rubus*. Ce système, auquel je pris quelque part, ne pouvait aboutir, même avec la réserve que j'y mettais de ne voir dans ces études qu'un travail préliminaire et provisoire de statistique. On devait succomber en présence d'une tâche impossible à remplir sous cette forme vague et indéterminée : l'action doit toujours être dirigée par un principe, une théorie.

Le darwinisme fut une réponse à l'école multiplicatrice; mais il a dégénéré trop souvent en une prime à l'ignorance. Avec quelques formules abstraites, telles que la concurrence vitale, la sélection naturelle, l'atavisme, etc., on a sans grand effort une réponse à tout; on abuse de ces formules pour se dispenser d'étudier de près la nature dont les voies sont infiniment plus complexes.

Ce sont les travaux basés sur des observations personnelles, même ceux qui n'ont pu conduire à un résultat définitif dans leur direction primitive, qui nous ont valu, chacun pour sa part, une somme déjà très importante de connaissances acquises sur l'histoire des formes végétales et leur valeur comparative. Ce capital, acquis par des efforts longs et persévérants, doit être

augmenté de même par des recherches consciencieuses, sans parti pris, poursuivies sans relâche. Pour ne pas sortir de l'étude spéciale des *Rubus*, après avoir donné à cette étude tous mes loisirs pendant plusieurs mois chaque année depuis près de quarante ans, je vois très clairement la nécessité d'associer dans le même but des efforts encore plus nombreux, de mieux répartir la tâche des collaborateurs, de laisser moins de place au hasard, afin d'aboutir plus vite à des conclusions générales.

MÉMOIRE

SUR

L'ATTRACTION DU PARALLÉLIPIPÈDE ELLIPSOÏDAL

PAR

M. le Vte de SALVERT

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LILLE

INTRODUCTION

EXPOSÉ GÉNÉRAL DU SUJET, ET POSITION DU PROBLÈME ANALYTIQUE

Parmi les faits saillants qui ont marqué les progrès si considérables de l'Analyse et de ses applications vers le milieu du siècle qui finit, les Mathématiciens comptent à juste titre la solution fournie par Lamé du problème difficile de l'équilibre de température relatif à l'Ellipsoïde, qui semblait avoir déjoué l'habileté de célèbres Analystes, tels que Laplace et Poisson lorsqu'ils avaient rencontré cette question (*). Tous les Géomètres savent que ce résultat considérable a été obtenu par le moyen d'un système nouveau de coordonnées spécialement imaginé en vue de ce problème, et désigné depuis lors à bon droit par le nom de l'illustre Auteur, système dans lequel chaque coordonnée rectiligne s'exprime par un produit de trois facteurs qui sont chacun une certaine fonction doublement périodique assez simple de l'une des nouvelles coordonnées en question (**). Toutefois,

(*) Laplace ne résout la question que pour la Sphère seulement [Voir *Traité de Mécanique Céleste*, Livre XI, Chap. IV, § 9. *Œuvres complètes de Laplace*, Tome V (1882) page 82].

(**) Voir, si l'on veut, à ce sujet, Jordan, *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, Tome III, §§ 323-324 (pp. 420-424).

malgré la puissance incontestable de ce nouvel instrument analytique ainsi mise en lumière par ce seul fait, il semble qu'il se soit assez peu répandu depuis lors, et n'ait rendu par la suite que des services fort restreints : sans doute, en raison de ce que, d'une part, les types de transcendantes doublement périodiques introduits par Lamé dans ses formules ne sont pas exactement les types classiques d'Abel et de Jacobi, mais seulement des types *voisins*, dont l'emploi pratique réclamerait dès lors un nouvel arsenal de formules parallèles à celles couramment employées aujourd'hui; et d'autre part, de ce que ces mêmes formules de Lamé ne réalisent pas la précieuse condition de double permutation circulaire qu'offrait déjà l'élégant Système des Coordonnées Elliptiques de Jacobi, lequel, étant issu de la considération du même système géométrique de surfaces, semblerait devoir convenir également bien pour la même catégorie de problèmes.

Nous espérons avoir remédié d'une façon satisfaisante, dans le dernier Chapitre de notre *Théorie Nouvelle du Système Orthogonal triplement Isotherme* (*), à cette double défectuosité de l'admirable invention de Lamé, et nous croyons avoir fourni une preuve péremptoire de la fécondité et de la commodité de son système de coordonnées transformé comme nous l'indiquons, en résolvant complètement par le moyen de son emploi, non seulement quant à la forme analytique du résultat, mais encore *numériquement*, avec telle approximation que l'on voudra, un Problème intéressant et compliqué de Statique, inabordable avec les instruments antérieurs, à savoir celui de la détermination exacte de l'Action totale exercée, suivant la loi d'Attraction Newtonienne, par la masse entière d'un Ellipsoïde homogène sur le Solide homogène délimité par trois couples de surfaces homofocales du second ordre, c'est-à-dire appartenant toutes par consé-

(*) Gauthier-Villars, Paris, 1894. Cet Ouvrage a également été publié par portions successives dans les six Tomes XIII-XVIII (1889-1894) des ANNALES DE LA SOC. SCIENTIF. DE BRUXELLES, sous le titre différent de *Mémoire sur la Recherche la plus Générale d'un Système Orthogonal triplement Isotherme*.

quent à un même Système Ellipsoïdal, quelle que soit d'ailleurs la situation relative que l'on imagine pour les deux Corps.

Nous voudrions pareillement aujourd'hui apporter une nouvelle démonstration des précieux services que semble appelé à rendre ce même système de coordonnées, en traitant par son moyen, toujours à propos du même Solide, qui est celui que nous désignons dans le titre de cet Ouvrage par la dénomination expressive de *Parallélipipède Ellipsoïdal*, un nouveau Problème de Statique également rebelle aux procédés actuels, mais notablement plus compliqué que le précédent, savoir la détermination exacte de l'Attraction exercée d'après la même loi par le Solide en question sur un point quelconque. Les formules que nous avons établies dans l'Ouvrage précité nous permettront en effet, comme on va le voir : en premier lieu, de résoudre ce problème *complètement* (c'est-à-dire jusques et y compris la détermination de toutes les constantes, et l'évaluation numérique des résultats avec telle approximation que l'on voudra) dans le Cas particulier où l'on suppose le point attiré situé sur l'un des trois axes du Système Ellipsoïdal auquel appartiennent les six surfaces limitatives du Solide envisagé; puis, en second lieu, de reconnaître avec certitude la forme analytique des résultats définitifs, dans le Cas plus étendu où l'on suppose le même point situé dans l'un des trois plans principaux dudit Système; et enfin, pour le Cas le plus général, d'apercevoir clairement la nature analytique des résultats définitifs, c'est-à-dire, en fait, d'effectuer complètement, même dans ce cas, deux des trois intégrations successives auxquelles se ramène le calcul des intégrales triples qui expriment précisément les composantes de l'Attraction qu'il s'agit d'évaluer. Et, dans la seconde hypothèse comme dans la première, les résultats auxquels nous parviendrons devront évidemment reproduire à titre de cas-limite les formules connues relatives à l'Attraction exercée par la masse entière d'un Ellipsoïde homogène, ce qui nous fournira, sinon une vérification de ces résultats dans toute l'acception que ce mot comporte, tout au moins un élément de contrôle qui, eu égard à la nouveauté et à la difficulté du sujet, ne nous semble pas devoir être considéré comme superflu ni dénué d'intérêt.

Nous allons donc traiter successivement, relativement à ce Problème, les différents Cas particuliers que nous venons de dire, pour lesquels nous arriverons à la forme explicite du résultat, puis le Cas le plus général, pour lequel nous ne parviendrons qu'à en déterminer la nature analytique seulement. Mais, toutefois, en raison de la complication du sujet, et dans le but de faciliter notablement, à l'occasion de calculs plus simples, l'intelligence de la méthode et des procédés dont se composera notre recherche dans le Cas le plus général, nous commencerons par les exposer en traitant séparément tout d'abord un Cas particulier encore plus restreint que celui que nous venons de spécifier, à savoir l'hypothèse tout à fait particulière dans laquelle le point attiré coïnciderait avec le Centre du Système Ellipsoïdal auquel appartiennent toutes les six surfaces limitatives du Solide envisagé.

Mais auparavant, posons les données du Problème analytique qu'il s'agit de résoudre, lesquelles restent les mêmes, qu'il s'agisse des Cas particuliers, ou bien du Cas le plus général que nous aurons ainsi successivement à examiner.

Si l'on désigne par f l'attraction sur la masse sollicitée de l'unité de masse à l'unité de distance (*), celle exercée par l'élément de masse $d\mathfrak{M}$ situé au point (x, y, z) sur le point attiré (x_0, y_0, z_0) aura pour composantes respectives suivant les trois axes

$$\frac{fd\mathfrak{M}}{\rho^2}\,\frac{x-x_0}{\rho},\qquad \frac{fd\mathfrak{M}}{\rho^2}\,\frac{y-y_0}{\rho},\qquad \frac{fd\mathfrak{M}}{\rho^2}\,\frac{z-z_0}{\rho},$$

la distance ρ des deux points étant déterminée par l'équation

$$(1)\qquad \rho^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2,$$

et par conséquent les composantes de l'Attraction totale du Corps envisagé qu'il s'agit de calculer, seront exprimées respectivement

(*) C'est-à-dire le produit de la *constante d'attraction* par la masse du point attiré.

par les trois sommes étendues à tout le volume précédemment défini :

(2) $$X = f\mathbf{S}\frac{x - x_0}{\rho^3}d\mathfrak{M}, \quad Y = f\mathbf{S}\frac{y - y_0}{\rho^3}d\mathfrak{M}, \quad Z = f\mathbf{S}\frac{z - z_0}{\rho^3}d\mathfrak{M}$$

Cela étant, les surfaces qui limitent le Corps attirant appartenant toutes, par hypothèse, au Système Ellipsoïdal représenté synthétiquement par le type d'équation

(3) $$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} = 1,$$

nous emploierons, pour l'évaluation de ces trois sommes, les Coordonnées de Lamé sous la forme nouvelle que nous leur donnons dans l'Ouvrage précité, c'est-à-dire, en employant, comme nous le faisons dans cet Ouvrage, les notations très commodes

(4) $$l^2 = a^2 - b^2, \qquad m^2 = b^2 - c^2, \qquad n^2 = c^2 - a^2,$$

qui donnent la relation d'usage très fréquent

(5) $$l^2 + m^2 + n^2 = 0,$$

les trois Coordonnées u, v, w introduites par les formules de transformation

(6) $$\left\{\begin{aligned} x &= l\,\mathrm{sn}(u, k)\,\mathrm{dn}(v, k')\,\mathrm{cn}(w, k''), & k^2 &= \frac{l^2}{-n^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}, \\ y &= m\,\mathrm{sn}(v, k')\,\mathrm{dn}(w, k'')\,\mathrm{cn}(u, k), & k'^2 &= \frac{m^2}{-l^2} = \frac{b^2 - c^2}{b^2 - a^2}, \\ z &= n\,\mathrm{sn}(w, k'')\,\mathrm{dn}(u, k)\,\mathrm{cn}(v, k'), & k''^2 &= \frac{n^2}{-m^2} = \frac{c^2 - a^2}{c^2 - b^2}, \end{aligned}\right.$$

qui se déduisent les unes des autres en permutant circulairement à la fois les cinq groupes (x, y, z), (u, v, w), (k, k', k''), (l, m, n), et (a, b, c), et relativement auxquelles les surfaces

coordonnées qui leur correspondent géométriquement sont précisément les surfaces homofocales du second ordre comprises dans le type ci-dessus (3), ainsi qu'il ressort clairement des considérations d'où nous déduisons lesdites formules (*). Il résultera alors immédiatement des deux propriétés fondamentales de ces coordonnées que nous venons de rappeler : en premier lieu, qu'il suffira de calculer une seule des trois composantes en question (2), les deux autres devant s'obtenir ensuite par simple permutation circulaire; et en second lieu, que les limites relatives à chaque quadrature dans l'opération de l'intégration triple seront encore de simples constantes, comme pour la question traitée dans l'Ouvrage déjà rappelé, à savoir les valeurs de ces coordonnées u, v, w qui correspondront aux surfaces limitatives du Solide envisagé. Observons toutefois à ce sujet que l'élément des intégrales triples actuellement proposées n'étant plus ici un produit de trois facteurs dépendant chacun exclusivement d'une variable différente, ainsi qu'il en était dans les divers exemples traités dans l'Ouvrage susmentionné, lesdites intégrales ne se réduiront plus comme alors à un produit de trois quadratures relatives chacune à l'une des trois variables (**), mais seront bien de véritables intégrales triples dont l'élément dépendra à la fois des trois variables, avec la simplification, toutefois, résultant de ce que les limites relatives à chaque quadrature successive seront des constantes données, ainsi que nous venons de le dire (***).

La question étant ainsi posée, on facilitera considérablement le calcul desdites intégrales triples en introduisant de nouveau pour cette opération, à titre provisoire, comme dans l'Ouvrage précité, à la place de nos coordonnées u, v, w spécifiées tout à l'heure, des fonctions très simples de ces variables qui seront

---

(*) *Théorie du Système Orthogonal triplement Isotherme*, Chap. VI (pp. 404–407).

(**) *Ibid., loc. cit.* (pp. 473-474).

(***) Le problème de Calcul Intégral, dans les conditions données, est en effet, comme on voit, entièrement analogue à celui relatif à la détermination, par le moyen des Coordonnées Rectilignes, de la masse d'un parallélipipède, de *densité variable* en chacun de ses points, dont chacune des six faces serait parallèle à l'un des plans coordonnés.

respectivement, pour chacune des trois sommes proposées (2), celles inscrites dans chacune des trois lignes d'équations suivantes

(*)

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{lll} p = l\,\mathrm{sn}\,(u, k\ ), & q\ = l\,\mathrm{dn}\,(v, k'\,), & r\ = -\,in\,\mathrm{cn}\,(w, k''), \\ p' = m\,\mathrm{sn}\,(v, k'\,), & q'\ = m\,\mathrm{dn}\,(w, k''), & r'\ = -\,il\,\mathrm{cn}\,(u, k\ ), \\ p'' = n\,\mathrm{sn}\,(w, k''), & q'' = n\,\mathrm{dn}\,(u, k\ ), & r'' = -\,im\,\mathrm{cn}\,(v, k'\,), \end{array}\right.$$

lesquelles se déduisent encore les unes des autres par la même loi de permutation circulaire que les formules précédentes (6).

En effet, si c'est, par exemple, la première des trois sommes (2) que l'on se propose de calculer, il résulte des formules de la page 478 du Tome Ier de l'Ouvrage en question, rapprochées de celles (6) ci-dessus, que les trois coordonnées rectilignes x, y, z s'exprimeront alors, à l'aide des variables auxiliaires p, q, r, définies par la première ligne du tableau qui précède, par les valeurs

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{l} x = l\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,v\,\mathrm{cn}\,w = \dfrac{1}{l\,(-\,in)}\,l\,\mathrm{sn}\,u.l\,\mathrm{dn}\,v.(-in)\,\mathrm{cn}\,w = \dfrac{-1}{l.in}pqr, \\[2ex] y = m\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{dn}\,w\,\mathrm{cn}\,u = m\sqrt{\dfrac{q^2-l^2}{m^2}}\sqrt{\dfrac{-l^2+r^2}{m^2}}\sqrt{\dfrac{l^2-p^2}{l^2}} \\[2ex] \qquad = \dfrac{1}{lm}\sqrt{(l^2-p^2)(l^2-q^2)(l^2-r^2)}, \\[2ex] z = n\,\mathrm{sn}\,w\,\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{cn}\,v = n\sqrt{\dfrac{n^2+r^2}{n^2}}\sqrt{\dfrac{n^2+p^2}{n^2}}\sqrt{\dfrac{-n^2-q^2}{m^2}} \\[2ex] \qquad = \dfrac{i}{mn}\sqrt{(n^2+p^2)(n^2+q^2)(n^2+r^2)}, \end{array}\right.$$

(*) *Ibid., loc. cit.* (pp. 474-475). Afin de ne pas compliquer ni allonger outre mesure le développement de la présente théorie, nous renonçons à regret ici à l'introduction du double signe dans ces équations de définition, ainsi qu'aux discussions qui s'y rapportent, à l'effet d'une complète rigueur, considérations que l'on trouvera exposées, avec toutes les conséquences qui en découlent, en divers endroits de l'Ouvrage susmentionné (Voir notamment Tome Ier, Chap. VI, pp. 474-477, et 488-491).

d'où l'on conclura par la formule (1) la valeur de la distance ρ, tandis qu'en vertu de la formule (119) du même Ouvrage (page 491), l'élément de masse $d\mathfrak{M}$ se trouvera exprimé, D représentant la densité, par le déterminant

$$(9) \qquad d\mathfrak{M} = \mathrm{D} \begin{vmatrix} 1, & p^2, & p^4 \\ 1, & q^2, & q^4 \\ 1, & r^2, & r^4 \end{vmatrix} \frac{dp}{\sqrt{\mathrm{P}}} \frac{dq}{\sqrt{\mathrm{Q}}} \frac{dr}{\sqrt{\mathrm{R}}},$$

dans lequel, chaque radical étant entendu expressément dans le sens de la détermination positive, l'on convient de désigner respectivement par P, Q, R la quantité dans laquelle se transforme à tour de rôle le trinôme

$$(9^{\text{bis}}) \qquad \mathrm{T} = (l^2 - t^2)(n^2 + t^2) = l^2 n^2 + (l^2 - n^2) t^2 - t^4,$$

lorsque l'on y écrit successivement p, q, r à la place de t. Et il est clair que pour le calcul des deux autres sommes (2), les deux autres lignes du tableau (7) donneraient naissance à des formules toutes pareilles qui se déduiraient de celles-ci par le simple changement de p, q, r en p', q', r', ou p'', q'', r'', conjointement avec les permutations circulaires que nous avons déjà spécifiées.

Quant aux nouvelles limites des intégrations, ce seront évidemment, quand il s'agira de la première somme, les valeurs (*)

$$(10) \qquad \begin{cases} p_1 = l \operatorname{sn}(u_1, k), & q_1 = l \operatorname{dn}(v_1, k'), & r_1 = -in \operatorname{cn}(w_1, k''), \\ p_2 = l \operatorname{sn}(u_2, k), & q_2 = l \operatorname{dn}(v_2, k'), & r_2 = -in \operatorname{cn}(w_2, k''), \end{cases}$$

(*) Pour que les limites inférieures des nouvelles variables dans l'intégration en p, q, r correspondent ainsi toutes précisément aux limites inférieures des anciennes dans l'intégration en u, v, w, et de même, par conséquent aussi, quant aux limites supérieures, il est nécessaire que ces nouvelles variables p, q, r varient chacune dans le même sens que l'ancienne variable correspondante, ou, en d'autres termes, que les trois dérivées $\frac{dp}{du}$, $\frac{dq}{dv}$, $\frac{dr}{dw}$ soient toutes trois positives, quel que soit le signe de cette dernière coordonnée. Or nous montrons par une discussion attentive, dans l'Ouvrage précité (auquel nous prions le Lecteur de se reporter pour cet objet), que cette condition indispensable est bien réalisée par le moyen d'une certaine distinction de signe à spécifier dans la défi-



correspondant aux valeurs données des u, v, w relatives aux limites du Corps en vertu des définitions (7). Et de même pour les autres sommes.

Si l'on remet les valeurs (8) des x, y, z dans l'équation (1) qui doit fournir celle de la distance ρ, puis la valeur ainsi obtenue conjointement avec la même valeur de x dans la première des sommes (2), l'on reconnaît tout de suite que l'élément de l'intégrale triple renfermera alors des radicaux superposés, ce qui semble devoir rendre très difficile, même dès la première quadrature, l'opération de l'intégration triple. Nous verrons néanmoins qu'en raison de la forme particulière de l'expression (9) de l'élément $d\mathfrak{M}$, cette première quadrature pourra s'effectuer complètement et fournira un résultat simple, même dans le Cas le plus général, et que les deux autres quadratures s'effectueront également dans les Cas particuliers assez étendus que nous avons spécifiés en commençant notre exposé, la dernière quadrature seule apparaissant comme inabordable avec les moyens actuels de l'Analyse dans le Cas le plus général du Problème.

Ayant ainsi indiqué d'un mot le but que nous nous proposons d'atteindre, il est temps maintenant d'examiner séparément les trois Cas sur lesquels nous avons annoncé que nous appellerions successivement dans cet Ouvrage l'attention du Lecteur.

---

nition de ces variables, discussion que la crainte d'allonger outre mesure le présent travail nous détourne seule de reproduire ici (Voir *Théorie Nouvelle du Système Orthogonal triplement Isotherme*, Tome I, pp. 474 et 488-491).

CHAPITRE PREMIER

Le point attiré coïncide avec le Centre du Système Ellipsoïdal

Réduction de la recherche a la détermination d'une seule intégrale double, ou calcul effectif de la première quadrature. — Si nous désignons encore, comme dans notre *Théorie Nouvelle du Système Orthogonal triplement Isotherme,* par λ, μ, ν les trois Coordonnées Elliptiques du point (x, y, z), c'est-à-dire les trois racines, réelles et inégales, de l'équation en λ (3) qui, étant mise sous forme entière, devient, en faisant passer tous les termes dans le second membre,

$$(10^{bis})\quad \left\{ \begin{array}{c} (a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda) \\ -\left[(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)x^2 + (c^2+\lambda)(a^2+\lambda)y^2 + (a^2+\lambda)(b^2+\lambda)z^2\right] = 0, \end{array} \right.$$

ou, en la développant et l'ordonnant,

$$\lambda^3 + \left[(a^2 + b^2 + c^2) - (x^2 + y^2 + z^2)\right]\lambda^2 + \left[\cdots\right]\lambda + a^2b^2c^2 = 0,$$

l'on aura donc, entre les coefficients et les racines, la relation

$$-(\lambda + \mu + \nu) = (a^2 + b^2 + c^2) - (x^2 + y^2 + z^2),$$

d'où l'on conclura, quant à la valeur de la distance ρ, x_0, y_0, z_0 étant supposés nulles dans le Cas très particulier qui nous occupe en ce moment,

$$(11)\quad \left\{ \begin{array}{l} \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 = (a^2 + b^2 + c^2) + (\lambda + \mu + \nu) \\ = (a^2+\lambda) + (b^2+\mu) + (c^2+\nu) = l^2 \mathrm{sn}^2 u + m^2 \mathrm{sn}^2 v + n^2 \mathrm{sn}^2 w, \end{array} \right.$$

en vertu des relations (8) du Chapitre VI de l'Ouvrage précité (Tome Ier, page 406), qui établissent la correspondance entre les Coordonnées Elliptiques de Jacobi et les Coordonnées de Lamé transformées d'après notre théorie, relations que, pour plus de clarté, nous allons reproduire ici ainsi qu'il suit, parce que nous

aurons très fréquemment à nous en servir dans le cours de cette Étude,

$$(12)\quad \begin{cases} a^2+\lambda = l^2\,\mathrm{sn}^2 u, & b^2+\lambda = (il)^2\,\mathrm{cn}^2 u, & c^2+\lambda = n^2\,\mathrm{dn}^2 u, \\ b^2+\mu = m^2\,\mathrm{sn}^2 v, & c^2+\mu = (im)^2\,\mathrm{cn}^2 v, & a^2+\mu = l^2\,\mathrm{dn}^2 v, \\ c^2+\nu = n^2\,\mathrm{sn}^2 w, & a^2+\nu = (in)^2\,\mathrm{cn}^2 w, & b^2+\nu = m^2\,\mathrm{dn}^2 w, \end{cases}$$

étant entendu, une fois pour toutes, comme nous le ferons pour toute la suite de ce travail, que le module des différentes fonctions elliptiques relatives aux coordonnées u, v, w elles-mêmes, sera toujours k pour la coordonnée u, k' pour la coordonnée v, et k'' pour la coordonnée w, les valeurs de ces trois modules étant celles indiquées par les équations du groupe de droite (6).

En tenant compte, dès lors, des formules déjà rappelées de la page 478 du Tome Ier de l'Ouvrage susmentionné, la dernière valeur (11) de ρ^2 deviendra donc

$$(13)\quad \rho^2 = p^2+(q^2-l^2)+(n^2+r^2) = p^2+q^2+r^2-(l^2-n^2) = p^2+q^2+r^2-f,$$

en convenant dorénavant d'introduire encore, par analogie avec ce que nous faisons dans l'Ouvrage en question, les notations abrégées

$$(14)\qquad f = l^2-n^2, \qquad g^2 = l^2n^2,$$

à l'aide desquelles l'expression ci-dessus (9bis) du trinôme typique T s'écrira plus simplement

$$(15)\qquad \mathrm{T} = (l^2-t^2)(n^2+t^2) = g^2+ft^2-t^4.$$

Cela posé, si dans l'expression de la première des composantes demandées (2), qui se réduisent dans l'hypothèse actuelle à

$$(16)\quad \mathrm{X} = \mathrm{f}\,\mathbf{S}\frac{x}{\rho^3}\,d\mathfrak{M}, \qquad \mathrm{Y} = \mathrm{f}\,\mathbf{S}\frac{y}{\rho^3}\,d\mathfrak{M}, \qquad \mathrm{Z} = \mathrm{f}\,\mathbf{S}\frac{z}{\rho^3}\,d\mathfrak{M},$$

l'on suppose remise la valeur de ρ qui résulterait de cette

dernière formule (13), en même temps que celles précédemment indiquées (8) de x, et (9) de $d\mathfrak{M}$, elle deviendra par là

$$X = f \mathbf{S} \frac{-1}{l\,in} pqr \cdot \frac{1}{\rho^3} \cdot D \begin{vmatrix} 1, & p^2, & p^4 \\ 1, & q^2, & q^4 \\ 1, & r^2, & r^4 \end{vmatrix} \frac{dp}{\sqrt{P}} \frac{dq}{\sqrt{Q}} \frac{dr}{\sqrt{R}}$$

$$= \frac{-fD}{l.in} \mathbf{S} \frac{1}{\rho^3} \begin{vmatrix} 1, & p^2, & p^4 \\ 1, & q^2, & q^4 \\ 1, & r^2, & r^4 \end{vmatrix} \frac{pdp}{\sqrt{P}} \frac{qdq}{\sqrt{Q}} \frac{rdr}{\sqrt{R}};$$

et par conséquent, si l'on convient dès maintenant, pour toute l'étendue de ce travail, de faire, en vue de simplifier les écritures,

(17) $$X = \frac{-fD}{l.in} \Delta_x, \qquad Y = \frac{-fD}{m.il} \Delta_y, \qquad Z = \frac{-fD}{n.im} \Delta_z,$$

la quantité Δ_x introduite par ces définitions aura pour valeur, dans la question qui fait l'objet de ce premier Chapitre :

(18) $$\Delta_x = \mathbf{S} \frac{1}{\rho^3} \begin{vmatrix} 1, & p^2, & p^4 \\ 1, & q^2, & q^4 \\ 1, & r^2, & r^4 \end{vmatrix} \frac{pdp}{\sqrt{P}} \frac{qdq}{\sqrt{Q}} \frac{rdr}{\sqrt{R}}.$$

Or cette intégrale triple se réduit, comme nous allons le faire voir, à six intégrales doubles du même type (*).

(*) L'annonce de ce fait n'offre rien de nouveau ni d'imprévu, attendu que l'on sait que, dans l'hypothèse d'un Corps homogène, si l'on se propose de calculer avec l'instrument habituel des Coordonnées Rectilignes les composantes de son Attraction sur un point quelconque, la première intégration s'effectuera presque immédiatement et fournira dans tous les cas un résultat très simple (Jordan, *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, Tome II, § 200, pp. 202-203).

En prenant dès lors comme point de départ ce résultat classique, et l'exprimant au moyen de nos Coordonnées actuelles, ainsi que nous le ferons à titre de vérification au début du Chapitre suivant, l'on parviendra donc ainsi, sinon plus rapidement, du moins sans aucun effort d'invention ni calcul nouveau d'intégration, au même résultat que nous allons rencontrer tout à l'heure à la suite d'une première quadrature effectuée de prime abord par le moyen de nos Coordonnées Thermométriques.

Pour le montrer, posons

(19) $$\Omega = \int_{p_1}^{p_2} \frac{1}{\rho} \frac{pdp}{\sqrt{P}}, \qquad \Omega' = \int_{q_1}^{q_2} \frac{1}{\rho} \frac{qdq}{\sqrt{Q}}, \qquad \Omega'' = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{\rho} \frac{rdr}{\sqrt{R}},$$

les limites de chacune de ces quadratures étant, par hypothèse, celles afférentes à la même variable dans l'intégration triple relative à la première des sommes (16) qu'il s'agit de calculer, c'est-à-dire, par conséquent, les valeurs constantes données (10), et le symbole ρ désignant toujours la fonction de p, q, r correspondant à la dernière expression (13), laquelle donnera en particulier :

$$\rho \frac{d\rho}{dq} = q, \qquad \rho \frac{d\rho}{dr} = r, \qquad \text{ou} \qquad \frac{d\rho}{dq} = \frac{q}{\rho}, \qquad \frac{d\rho}{dr} = \frac{r}{\rho}.$$

L'on trouvera donc, en différentiant en q la première de ces expressions (19),

$$\frac{d\Omega}{dq} = \int_{p_1}^{p_2} \frac{d}{dq}\left(\frac{1}{\rho}\right) \frac{pdp}{\sqrt{P}} = \int_{p_1}^{p_2} \frac{-1}{\rho^2} \frac{q}{\rho} \frac{pdp}{\sqrt{P}},$$

et par suite, en multipliant, en premier lieu, par $\sqrt{Q}\,dq$,

$$\sqrt{Q} \frac{d\Omega}{dq} dq = \sqrt{Q} \int_{p_1}^{p_2} \frac{-q}{\rho^3} \frac{pdp}{\sqrt{P}} dq = -\int_{p_1}^{p_2} \frac{Q}{\rho^3} \frac{pdp}{\sqrt{P}} \frac{qdq}{\sqrt{Q}};$$

et de là, en multipliant en second lieu par $\frac{1}{2} \frac{R'dr}{\sqrt{R}} = \frac{R'}{2r} \frac{rdr}{\sqrt{R}}$,

$$\sqrt{Q} \frac{d\Omega}{dq} dq . \frac{R'dr}{2\sqrt{R}} = -\int_{p_1}^{p_2} \frac{R'}{2r} \frac{Q}{\rho^3} \frac{pdp}{\sqrt{P}} \frac{qdq}{\sqrt{Q}} \frac{rdr}{\sqrt{R}},$$

puis permutant dans ce résultat les deux variables q et r, changement qui n'atteint pas les quantités ρ (13) ni Ω (19),

$$\sqrt{R} \frac{d\Omega}{dr} dr . \frac{Q'dq}{2\sqrt{Q}} = -\int_{p_1}^{p_2} \frac{Q'}{2q} \frac{R}{\rho^3} \frac{pdp}{\sqrt{P}} \frac{qdq}{\sqrt{Q}} \frac{rdr}{\sqrt{R}},$$

et retranchant alors ces deux derniers résultats l'un de l'autre,

l'on obtiendra

$$\left(\frac{R'\sqrt{Q}}{2\sqrt{R}}\frac{d\Omega}{dq}-\frac{Q'\sqrt{R}}{2\sqrt{Q}}\frac{d\Omega}{dr}\right)dqdr$$

$$=-\int_{p_1}^{p_2}\frac{1}{\rho^5}\left(\frac{QR'}{2r}-\frac{RQ'}{2q}\right)\frac{pdp}{\sqrt{P}}\frac{qdq}{\sqrt{Q}}\frac{rdr}{\sqrt{R}};$$

d'où finalement, en intégrant en q et r l'expression que nous venons de former, et ajoutant ensuite les trois égalités semblables que donnerait la permutation circulaire des trois variables p, q, r, résultera la nouvelle égalité

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned}&\int_{q_1}^{q_2}\int_{r_1}^{r_2}\left(\frac{R'\sqrt{Q}}{2\sqrt{R}}\frac{d\Omega}{dq}-\frac{Q'\sqrt{R}}{2\sqrt{Q}}\frac{d\Omega}{dr}\right)dqdr\\&+\int_{r_1}^{r_2}\int_{p_1}^{p_2}\left(\frac{P'\sqrt{R}}{2\sqrt{P}}\frac{d\Omega'}{dr}-\frac{R'\sqrt{P}}{2\sqrt{R}}\frac{d\Omega'}{dp}\right)drdp\\&+\int_{p_1}^{p_2}\int_{q_1}^{q_2}\left(\frac{Q'\sqrt{P}}{2\sqrt{Q}}\frac{d\Omega''}{dp}-\frac{P'\sqrt{Q}}{2\sqrt{P}}\frac{d\Omega''}{dq}\right)dpdq\\&=-\int_{p_1}^{p_2}\int_{q_1}^{q_2}\int_{r_1}^{r_2}\frac{1}{\rho^5}\left[\left(\frac{QR'}{2r}-\frac{RQ'}{2q}\right)+\left(\frac{RP'}{2p}-\frac{PR'}{2r}\right)\right.\\&\qquad\left.+\left(\frac{PQ'}{2q}-\frac{QP'}{2p}\right)\right]\frac{pdp}{\sqrt{P}}\frac{qdq}{\sqrt{Q}}\frac{rdr}{\sqrt{R}},\end{aligned}\right.$$

dont nous allons calculer à tour de rôle les deux membres.

Pour le second tout d'abord, partant de la définition (15) qui donnera successivement

$$(20^{bis})\qquad Q=g^2+fq^2-q^4,\qquad R=g^2+fr^2-r^4,$$

$$(21)\qquad Q'=2fq-4q^3=2q(f-2q^2),\qquad R'=2r(f-2r^2),$$

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{QR'}{2r}&=(g^2+fq^2-q^4)(f-2r^2)=g^2f-2g^2r^2+f^2q^2-2fq^2r^2-fq^4+2r^2q^4,\\\frac{RQ'}{2q}&=(g^2+fr^2-r^4)(f-2q^2)=g^2f-2g^2q^2+f^2r^2-2fr^2q^2-fr^4+2q^2r^4,\end{aligned}\right.$$

$$(22^{\text{bis}})\qquad \frac{QR'}{2r}-\frac{RQ'}{2q}=(f^2+2g^2)(q^2-r^2)-f(q^4-r^4)-2(q^2r^4-r^2q^4),$$

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned}&\left(\frac{QR'}{2r}-\frac{RQ'}{2q}\right)+\left(\frac{RP'}{2p}-\frac{PR'}{2r}\right)+\left(\frac{PQ'}{2q}-\frac{QP'}{2p}\right)\\ &\quad=-2[(q^2r^4-r^2q^4)+(r^2p^4-p^2r^4)+(p^2q^4-q^2p^4)]=-2\begin{vmatrix}1, & p^2, & p^4\\ 1, & q^2, & q^4\\ 1, & r^2, & r^4\end{vmatrix},\end{aligned}\right.$$

il est donc visible que ce second membre ne sera autre chose que la quantité

$$-\int_{p_1}^{p_2}\int_{q_1}^{q_2}\int_{r_1}^{r_2}\frac{-2}{\rho^3}\begin{vmatrix}1, & p^2, & p^4\\ 1, & q^2, & q^4\\ 1, & r^2, & r^4\end{vmatrix}\frac{pdp}{\sqrt{P}}\frac{qdq}{\sqrt{Q}}\frac{rdr}{\sqrt{R}}=2\Delta_z,$$

eu égard à la définition (18), c'est-à-dire le double de celle que nous nous proposons précisément d'évaluer.

Voyons maintenant le premier membre, et comme cela n'ajoutera aucune espèce de difficulté à la recherche, examinons-en la signification en étendant tant soit peu la question, c'est-à-dire en n'astreignant plus la quantité ρ à représenter la fonction particulière des variables p, q, r définie par l'équation (13), mais en entendant, pour le calcul qui va suivre, qu'elle désigne une fonction déterminée quelconque de ces variables.

Pour ce calcul, en vue d'une parfaite clarté, nous conviendrons des notations suivantes : les symboles P, Q, R affectés de l'indice 1 ou 2, signifieront que la variable respective p, q, ou r est elle-même affectée de cet indice dans leur expression, et nous représenterons semblablement par les symboles Ω_{r_1}, Ω_{q_2}, et indifféremment Ω_{q_2,r_1} ou Ω_{r_1,q_2}, ce que deviendra respectivement la fonction Ω lorsque l'on y remplacera, d'abord isolément r par r_1 ou q par q_2, ou bien simultanément q et r par q_2 et r_1.

Ces conventions étant admises, l'intégration par parties nous donnera, d'abord relativement à la variable r,

$$\int_{r_1}^{r_2} \sqrt{Q}\frac{d\Omega}{dq}dq.\frac{R'dr}{2\sqrt{R}} = \left(\sqrt{Q}\frac{d\Omega}{dq}dq.\sqrt{R}\right)_{r_1}^{r_2} - \int_{r_1}^{r_2}\sqrt{R}\frac{d}{dr}\left(\sqrt{Q}\frac{d\Omega}{dq}dq\right)dr$$

$$= \sqrt{Q}dq\left(\frac{d\Omega_{r_2}}{dq}\sqrt{R_2} - \frac{d\Omega_{r_1}}{dq}\sqrt{R_1}\right) - \int_{r_1}^{r_2}\sqrt{R}\sqrt{Q}\frac{d}{dr}\left(\frac{d\Omega}{dq}\right)dqdr,$$

puis, en intégrant de nouveau, relativement à la variable q :

$$(23^{bis})\quad \begin{cases} \int_{q_1}^{q_2}\int_{r_1}^{r_2}\sqrt{Q}\frac{d\Omega}{dq}\frac{R'dr}{2\sqrt{R}}dq = \sqrt{R_2}\int_{q_1}^{q_2}\sqrt{Q}\frac{d\Omega_{r_2}}{dq}dq \\ \qquad - \sqrt{R_1}\int_{q_1}^{q_2}\sqrt{Q}\frac{d\Omega_{r_1}}{dq}dq \\ \qquad - \int_{q_1}^{q_2}\int_{r_1}^{r_2}\sqrt{QR}\frac{d^2\Omega}{dqdr}dqdr. \end{cases}$$

Or, le même procédé fournit immédiatement la valeur

$$\int_{q_1}^{q_2}\sqrt{Q}\frac{d\Omega}{dq}dq = (\sqrt{Q}\Omega)_{q_1}^{q_2} - \int_{q_1}^{q_2}\Omega\frac{Q'}{2\sqrt{Q}}dq$$

$$= \sqrt{Q}_2\Omega_{q_2} - \sqrt{Q}_1\Omega_{q_1} - \int_{q_1}^{q_2}\Omega\frac{Q'}{2\sqrt{Q}}dq,$$

et par conséquent, en supposant dans Ω r remplacé successivement par r_2 et r_1, celles-ci :

$$\begin{cases} \int_{q_1}^{q_2}\sqrt{Q}\frac{d\Omega_{r_2}}{dq}dq = \sqrt{Q}_2\Omega_{q_2,r_2} - \sqrt{Q}_1\Omega_{q_1,r_2} - \int_{q_1}^{q_2}\Omega_{r_2}\frac{Q'}{2\sqrt{Q}}dq, \\ \int_{q_1}^{q_2}\sqrt{Q}\frac{d\Omega_{r_1}}{dq}dq = \sqrt{Q}_2\Omega_{q_2,r_1} - \sqrt{Q}_1\Omega_{q_1,r_1} - \int_{q_1}^{q_2}\Omega_{r_1}\frac{Q'}{2\sqrt{Q}}dq. \end{cases}$$

L'égalité précédente (23bis) deviendra donc, en y remettant ces valeurs,

$$\int_{q_1}^{q_2}\int_{r_1}^{r} \sqrt{Q}\frac{d\Omega}{dq}\frac{R'dr}{2\sqrt{R}}\,dq = -\int_{q_1}^{q_2}\int_{r_1}^{r_2} \sqrt{QR}\,\frac{d^2\Omega}{dqdr}\,dqdr$$

$$+ \sqrt{R_2}\left(\sqrt{Q_2}\Omega_{q_2,r_2} - \sqrt{Q_1}\Omega_{q_1,r_2} - \int_{q_1}^{q_2}\Omega_{r_2}\frac{Q'}{2\sqrt{Q}}\,dq\right)$$

$$- \sqrt{R_1}\left(\sqrt{Q_2}\Omega_{q_2,r_1} - \sqrt{Q_1}\Omega_{q_1,r_1} - \int_{q_1}^{q_2}\Omega_{r_1}\frac{Q'}{2\sqrt{Q}}\,dq\right),$$

ou, ce qui est la même chose, en écrivant les différents termes dans un ordre plus rationnel,

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned} \int_{q_1}^{q_2}\int_{r_1}^{r_2} \frac{R'\sqrt{Q}}{2\sqrt{R}}\frac{d\Omega}{dq}\,dqdr = {} & \sqrt{Q_1R_1}\,\Omega_{q_1,r_1} + \sqrt{Q_2R_2}\,\Omega_{q_2,r} \\ & - (\sqrt{Q_1R_2}\,\Omega_{q_1,r_2} + \sqrt{Q_2R_1}\,\Omega_{q_2,r_1}) \\ + \sqrt{R_1}\int_{q_1}^{q_2}\Omega_{r_1}\frac{Q'}{2\sqrt{Q}}\,dq & - \sqrt{R_2}\int_{q_1}^{q_2}\Omega_{r_2}\frac{Q'}{2\sqrt{Q}}\,dq \\ & - \int_{q_1}^{q_2}\int_{r_1}^{r_2}\sqrt{QR}\,\frac{d^2\Omega}{dqdr}\,dqdr, \end{aligned}\right.$$

laquelle égalité engendrera d'abord, par la permutation de q et r, la suivante

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} \int_{r_1}^{r_2}\int_{q_1}^{q_2} \frac{Q'\sqrt{R}}{2\sqrt{Q}}\frac{d\Omega}{dr}\,drdq = {} & \sqrt{R_1Q_1}\,\Omega_{r_1,q_1} + \sqrt{R_2Q_2}\,\Omega_{r_2,q_2} \\ & - (\sqrt{R_1Q_2}\,\Omega_{r_1,q_2} + \sqrt{R_2Q_1}\,\Omega_{r_2,q_1}) \\ + \sqrt{Q_1}\int_{r_1}^{r_2}\Omega_{q_1}\frac{R'}{2\sqrt{R}}\,dr & - \sqrt{Q_2}\int_{r_1}^{r_2}\Omega_{q_2}\frac{R'}{2\sqrt{R}}\,dr \\ & - \int_{r_1}^{r_2}\int_{q_1}^{q_2}\sqrt{RQ}\,\frac{d^2\Omega}{drdq}\,drdq, \end{aligned}\right.$$

puis, par la différence de ces deux derniers résultats, cet autre analogue

$$\int_{q_1}^{q}\int_{r_1}^{r}\left(\frac{R'\sqrt{Q}}{2\sqrt{R}}\frac{d\Omega}{dq}-\frac{Q'\sqrt{R}}{2\sqrt{Q}}\frac{d\Omega}{dr}\right)dqdr$$

$$=\left(\sqrt{Q_2}\int_{r_1}^{r_2}\Omega_{q_2}\frac{R'dr}{2\sqrt{R}}-\sqrt{R_2}\int_{q_1}^{q_2}\Omega_{r_2}\frac{Q'dq}{2\sqrt{Q}}\right)$$

$$-\left(\sqrt{Q_1}\int_{r_1}^{r_2}\Omega_{q_1}\frac{R'dr}{2\sqrt{R}}-\sqrt{R_1}\int_{q_1}^{q_2}\Omega_{r_1}\frac{Q'dq}{2\sqrt{Q}}\right),$$

laquelle expression ne comprend plus, comme on le voit, que des intégrales doubles, la partie non intégrée représentée par le seul dernier terme des développements précédents (24) et (25) ayant disparu par l'effet de la soustraction. Il en sera donc de même pour la somme des trois différences analogues, issues de celle-là par la permutation circulaire des trois variables p, q, r, laquelle somme constitue précisément le second membre de l'égalité ci-dessus (20), que nous voulions calculer.

Pour apercevoir clairement l'expression de cette somme, nous remplacerons, en premier lieu, dans le second membre de la dernière égalité qui précède, les différents symboles Ω, Q', et R' par leurs valeurs de définition (19) et (21), en ayant égard en même temps à la signification que nous sommes convenus d'attribuer aux indices; ce qui nous donnera la suivante

$$\int_{q_1}^{q_2}\int_{r_1}^{r_2}\left(\frac{R'\sqrt{Q}}{2\sqrt{R}}\frac{d\Omega}{dq}-\frac{Q'\sqrt{R}}{2\sqrt{Q}}\frac{d\Omega}{dr}\right)dqdr$$

$$=\left[\sqrt{Q_2}\int_{r_1}^{r_2}\left(\int_{p_1}^{p_2}\frac{1}{\rho_{q_2}}\frac{pdp}{\sqrt{P}}\right)\frac{r(f-2r^2)}{\sqrt{R}}dr\right.$$

$$\left.-\sqrt{R_2}\int_{q_1}^{q_2}\left(\int_{p_1}^{p_2}\frac{1}{\rho_{r_2}}\frac{pdp}{\sqrt{P}}\right)\frac{q(f-2q^2)}{\sqrt{Q}}dq\right]$$

$$-\left[\sqrt{Q_1}\int_{r_1}^{r_2}\left(\int_{p_1}^{p_2}\frac{1}{\rho_{q_1}}\frac{pdp}{\sqrt{P}}\right)\frac{r(f-2r^2)}{\sqrt{R}}dr\right.$$

$$\left.-\sqrt{R_1}\int_{q_1}^{q_2}\left(\int_{p_1}^{p_2}\frac{1}{\rho_{r_1}}\frac{pdp}{\sqrt{P}}\right)\frac{q(f-2q^2)}{\sqrt{Q}}dq\right],$$

c'est-à-dire, sous forme plus claire, la première des trois équations suivantes, les deux autres étant ensuite déduites de celle-là par la permutation circulaire des trois variables p, q, r,

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\int_{q_1}^{q_2}\int_{r_1}^{r_2}\left(\frac{R'\sqrt{Q}}{2\sqrt{R}}\frac{d\Omega}{dq}-\frac{Q'\sqrt{R}}{2\sqrt{Q}}\frac{d\Omega}{dr}\right)dq\,dr \\
&=\left[\sqrt{Q_2}\int_{r_1}^{r_2}\int_{p_1}^{p_2}\frac{f-2r^2}{\rho_{q_2}}\frac{rdr}{\sqrt{R}}\frac{pdp}{\sqrt{P}}-\sqrt{R_2}\int_{p_1}^{p_2}\int_{q_1}^{q_2}\frac{f-2q^2}{\rho_{r_2}}\frac{pdp}{\sqrt{P}}\frac{qdq}{\sqrt{Q}}\right] \\
&-\left[\sqrt{Q_1}\int_{r_1}^{r_2}\int_{p_1}^{p_2}\frac{f-2r^2}{\rho_{q_1}}\frac{rdr}{\sqrt{R}}\frac{pdp}{\sqrt{P}}-\sqrt{R_1}\int_{p_1}^{p_2}\int_{q_1}^{q_2}\frac{f-2q^2}{\rho_{r_1}}\frac{pdp}{\sqrt{P}}\frac{qdq}{\sqrt{Q}}\right], \\
\\
&\int_{r_1}^{r_2}\int_{p_1}^{p_2}\left(\frac{P'\sqrt{R}}{2\sqrt{P}}\frac{d\Omega'}{dr}-\frac{R'\sqrt{P}}{2\sqrt{R}}\frac{d\Omega'}{dp}\right)dr\,dp \\
&=\left[\sqrt{R_2}\int_{p_1}^{p_2}\int_{q_1}^{q_2}\frac{f-2p^2}{\rho_{r_2}}\frac{pdp}{\sqrt{P}}\frac{qdq}{\sqrt{Q}}-\sqrt{P_2}\int_{q_1}^{q_2}\int_{r_1}^{r_2}\frac{f-2r^2}{\rho_{p_2}}\frac{qdq}{\sqrt{Q}}\frac{rdr}{\sqrt{R}}\right] \\
&-\left[\sqrt{R_1}\int_{p_1}^{p_2}\int_{q_1}^{q_2}\frac{f-2p^2}{\rho_{r_1}}\frac{pdp}{\sqrt{P}}\frac{qdq}{\sqrt{Q}}-\sqrt{P_1}\int_{q_1}^{q}\int_{r_1}^{r_2}\frac{f-2r^2}{\rho_{p_1}}\frac{qdq}{\sqrt{Q}}\frac{rdr}{\sqrt{R}}\right], \\
\\
&\int_{p_1}^{p_2}\int_{q_1}^{q_2}\left(\frac{Q'\sqrt{P}}{2\sqrt{Q}}\frac{d\Omega'}{dp}-\frac{P'\sqrt{Q}}{2\sqrt{P}}\frac{d\Omega''}{dq}\right)dp\,dq \\
&=\left[\sqrt{P_2}\int_{q_1}^{q_2}\int_{r_1}^{r_2}\frac{f-2q^2}{\rho_{p_2}}\frac{qdq}{\sqrt{Q}}\frac{rdr}{\sqrt{R}}-\sqrt{Q_2}\int_{r_1}^{r_2}\int_{p_1}^{p_2}\frac{f-2p^2}{\rho_{q_2}}\frac{rdr}{\sqrt{R}}\frac{pdp}{\sqrt{P}}\right] \\
&-\left[\sqrt{P_1}\int_{q_1}^{q_2}\int_{r_1}^{r_2}\frac{f-2q^2}{\rho_{p_1}}\frac{qdq}{\sqrt{Q}}\frac{rdr}{\sqrt{R}}-\sqrt{Q_1}\int_{r_1}^{r_2}\int_{p_1}^{p_2}\frac{f-2p^2}{\rho_{q_1}}\frac{rdr}{\sqrt{R}}\frac{pdp}{\sqrt{P}}\right],
\end{aligned}
\right.
$$

desquelles nous conclurons alors, en les ajoutant, puis rapprochant les intégrales de mêmes limites, et réduisant ensuite, pour le premier membre de l'égalité (20),

$$
\begin{aligned}
&\int_{q_1}^{q_2}\int_{r_1}^{r_2}\left(\frac{R'\sqrt{Q}}{2\sqrt{R}}\frac{d\Omega}{dq}-\frac{Q'\sqrt{R}}{2\sqrt{Q}}\frac{d\Omega}{dr}\right)dqdr \\
&+\int_{r_1}^{r_2}\int_{p_1}^{p_2}\left(\frac{P'\sqrt{R}}{2\sqrt{P}}\frac{d\Omega'}{dr}-\frac{R'\sqrt{P}}{2\sqrt{R}}\frac{d\Omega'}{dp}\right)drdp \\
&+\int_{p_1}^{p_2}\int_{q_1}^{q_2}\left(\frac{Q'\sqrt{P}}{2\sqrt{Q}}\frac{d\Omega''}{dp}-\frac{P\sqrt{Q}}{2\sqrt{P}}\frac{d\Omega''}{dq}\right)dpdq \\
&=\left[\sqrt{P_2}\int_{q_1}^{q_2}\int_{r_1}^{r_2}\frac{(f-2q^2)-(f-2r^2)}{\rho_{p_2}}\frac{qdq}{\sqrt{Q}}\frac{rdr}{\sqrt{R}}\right. \\
&\left.-\ \sqrt{P_1}\int_{q_1}^{q_2}\int_{r_1}^{r_2}\frac{(f-2q^2)-(f-2r^2)}{\rho_{p_1}}\frac{qdq}{\sqrt{Q}}\frac{rdr}{\sqrt{R}}\right] \\
&+\left[\sqrt{Q_2}\int_{r_1}^{r_2}\int_{p_1}^{p_2}\frac{(f-2r^2)-(f-2p^2)}{\rho_{q_2}}\frac{rdr}{\sqrt{R}}\frac{pdp}{\sqrt{P}}\right. \\
&\left.-\ \sqrt{Q_1}\int_{r_1}^{r_2}\int_{p_1}^{p_2}\frac{(f-2r^2)-(f-2p^2)}{\rho_{q_1}}\frac{rdr}{\sqrt{R}}\frac{pdp}{\sqrt{P}}\right] \\
&+\left[\sqrt{R_2}\int_{p_1}^{p_2}\int_{q_1}^{q_2}\frac{(f-2p^2)-(f-2q^2)}{\rho_{r_2}}\frac{pdp}{\sqrt{P}}\frac{qdq}{\sqrt{Q}}\right. \\
&\left.-\ \sqrt{R_1}\int_{p}^{p_2}\int_{q}^{q_2}\frac{(f-2p^2)-(f-2q^2)}{\rho_{r_1}}\frac{pdp}{\sqrt{P}}\frac{qdq}{\sqrt{Q}}\right]
\end{aligned}
\tag{26}
$$

(26)
$$\begin{aligned}
&= \left[-\sqrt{P_2}\int_{q_1}^{q_2}\int_{r_1}^{r_2} \frac{2(q^2 - r^2)}{\rho_{p_2}} \frac{qdq}{\sqrt{Q}} \frac{rdr}{\sqrt{R}} \right. \\
&\qquad \left. + \sqrt{P_1}\int_{q_1}^{q_2}\int_{r_1}^{r_2} \frac{2(q^2 - r^2)}{\rho_{p_1}} \frac{qdq}{\sqrt{Q}} \frac{rdr}{\sqrt{R}} \right] \\
&+ \left[-\sqrt{Q_2}\int_{r_1}^{r_2}\int_{p_1}^{p_2} \frac{2(r^2 - p^2)}{\rho_{q_2}} \frac{rdr}{\sqrt{R}} \frac{pdp}{\sqrt{P}} \right. \\
&\qquad \left. + \sqrt{Q_1}\int_{r_1}^{r_2}\int_{p_1}^{p_2} \frac{2(r^2 - p^2)}{\rho_{q_1}} \frac{rdr}{\sqrt{R}} \frac{pdp}{\sqrt{P}} \right] \\
&+ \left[-\sqrt{R_2}\int_{p_1}^{p_2}\int_{q_1}^{q_2} \frac{2(p^2 - q^2)}{\rho_{r_2}} \frac{pdp}{\sqrt{P}} \frac{qdq}{\sqrt{Q}} \right. \\
&\qquad \left. + \sqrt{R_1}\int_{p_1}^{p_2}\int_{q_1}^{q_2} \frac{2(p^2 - q^2)}{\rho_{r_1}} \frac{pdp}{\sqrt{P}} \frac{qdq}{\sqrt{Q}} \right] \\
&= 2\left[\left(\sqrt{P}\int_{q_1}^{q_2}\int_{r_1}^{r_2} \frac{q^2 - r^2}{\rho} \frac{qdq}{\sqrt{Q}} \frac{rdr}{\sqrt{R}} \right)_{p_2}^{p_1} \right. \\
&\qquad + \left(\sqrt{Q}\int_{r_1}^{r_2}\int_{p_1}^{p_2} \frac{r^2 - p^2}{\rho} \frac{rdr}{\sqrt{R}} \frac{pdp}{\sqrt{P}} \right)_{q_2}^{q_1} \\
&\qquad \left. + \left(\sqrt{R}\int_{p_1}^{p_2}\int_{q_1}^{q_2} \frac{p^2 - q^2}{\rho} \frac{pdp}{\sqrt{P}} \frac{qdq}{\sqrt{Q}} \right)_{r_2}^{r_1} \right];
\end{aligned}$$

et cette expression à laquelle nous venons ainsi d'arriver pour le premier membre de l'égalité (20) ayant été obtenue en dehors de toute hypothèse sur la forme particulière de la fonction des variables p, q, r représentée dans la définition des intégrales (19) par la quantité ρ, subsistera donc sans aucune modification dans les deux autres cas, particulier ou général, que nous examinerons ci-après, et dans lesquels l'expression du carré de cette même

distance ρ, au lieu de la forme très simple (15), prendra la forme plus compliquée en p, q, r (1), indiquée en premier lieu.

Cette observation, très importante pour la suite de cette recherche, étant ainsi faite, et revenant au cas très particulier qui nous occupe en ce moment, il résulte donc, comme conclusion de l'analyse qui précède, que des deux membres de l'égalité ci-dessus (20), le second a pour valeur $2\Delta_x$, ainsi que nous l'avons reconnu d'abord, et le premier, l'expression à laquelle nous venons d'arriver en dernier lieu tout à l'heure. En égalant dès lors ces deux valeurs ainsi successivement calculées, et les divisant par 2, nous trouverons donc de cette façon pour valeur de la quantité Δ_x définie par la première des équations (17), l'expression remarquable, composée d'intégrales doubles seulement :

$$(27)\quad \left\{ \begin{aligned} \Delta_x = & \left(\sqrt{\mathrm{P}}\int_{q_1}^{q_2}\int_{r_1}^{r_2}\frac{q^2-r^2}{\rho}\,\frac{q\,dq}{\sqrt{\mathrm{Q}}}\,\frac{r\,dr}{\sqrt{\mathrm{R}}}\right)_{p_2}^{p_1} + \left(\sqrt{\mathrm{Q}}\int_{r_1}^{r_2}\int_{p_1}^{p_2}\frac{r^2-p^2}{\rho}\,\frac{r\,dr}{\sqrt{\mathrm{R}}}\,\frac{p\,dp}{\sqrt{\mathrm{P}}}\right)_{q_2}^{q_1} \\ & + \left(\sqrt{\mathrm{R}}\int_{p_1}^{p_2}\int_{q_1}^{q_2}\frac{p^2-q^2}{\rho}\,\frac{p\,dp}{\sqrt{\mathrm{P}}}\,\frac{q\,dq}{\sqrt{\mathrm{Q}}}\right)_{r_2}^{r_1}. \end{aligned} \right.$$

Avant de procéder au calcul de cette expression, l'on observera qu'elle consiste en une fonction linéaire de six intégrales doubles qui seront toutes du type

$$(28)\qquad \mathrm{I}^{(\varpi)} = \frac{1}{4}\int_{s_1}^{s_2}\int_{t_1}^{t_2}\frac{s-t}{\sqrt{s+t+\varpi-f}}\,\frac{ds}{\sqrt{\mathrm{S}}}\,\frac{dt}{\sqrt{\mathrm{T}}},$$

en représentant encore par les symboles S et T, par analogie avec les notations antérieurement admises, les quantités

$$(29)\qquad \mathrm{S}=(l^2-s)(n^2+s)=g^2+fs-s^2, \qquad \mathrm{T}=(l^2-t)(n^2+t)=g^2+ft-t^2,$$

les radicaux étant encore entendus dans le sens de la détermination positive, et étant convenu de prendre pour s et t successivement q^2 et r^2 dans les deux premières intégrales doubles,

puis r^2 et p^2 dans les deux suivantes, et enfin p^2 et q^2 dans les deux dernières, le symbole ϖ tenant lieu alors à chaque fois du carré de la troisième variable restante, laquelle sera supposée recevoir l'une des valeurs constantes (10) admises à l'avance pour limites dans l'opération de l'intégration triple.

En entendant ainsi ces différents symboles, la quantité en question Δ_x, définie par la première formule (17), que nous nous proposons de calculer, pourra donc être représentée par la notation abrégée

$$(30) \qquad \Delta_x = (\sqrt{P}.I^{(p^2)})_2^1 + (\sqrt{Q}.I^{(q^2)})_2^1 + (\sqrt{R}.I^{(r^2)})_2^1,$$

les indices 1 et 2, qui figurent les limites, se rapportant à la seule variable dénotée par $\sqrt{\varpi}$, c'est-à-dire correspondant au terme envisagé; et le problème se trouve en conséquence ramené à la détermination de la seule intégrale double (28), dont nous allons nous occuper un peu plus loin.

Mais auparavant il importe de bien observer, pour en tenir compte ultérieurement, quelle est, dans cette dernière formule, la signification exacte de chacun des radicaux $\sqrt{P}$, $\sqrt{Q}$, ou $\sqrt{R}$ qui multiplient lesdites intégrales doubles $I^{(\varpi)}$.

Pour cela, il suffit de se reporter aux équations (118) du Chapitre VI de notre *Théorie Nouvelle du Système Orthogonal triplement Isotherme,* équation que nous y établissons rigoureusement, *en grandeur et en signe* (Tome Ier, pp. 448-491), savoir

$$du = \frac{ndp}{\sqrt{P}}, \qquad dv = \frac{ldq}{\sqrt{Q}}, \qquad dw = \frac{mdr}{\sqrt{R}},$$

lesquelles donnent

$$(31) \qquad \sqrt{P} = n\frac{dp}{du}, \qquad \sqrt{Q} = l\frac{dq}{dv}, \qquad \sqrt{R} = m\frac{dr}{dw},$$

et en même temps à la définition également *en grandeur et en*

signe de nos variables auxiliaires p, q, r, qui est la suivante (*Ibid.*, p. 474)

$$(32) \qquad p = l\,\mathrm{sn}(u, k), \qquad q = \pm\, l\,\mathrm{dn}(v, k'), \qquad r = \pm\, in\,\mathrm{cn}(w, k''),$$

avec la condition, quant au double signe, de prendre le signe + dans chacune des deux dernières égalités, lorsque la coordonnée correspondante v ou w sera elle-même positive, et par conséquent aussi le signe —, lorsque cette coordonnée sera négative.

En effet, de cette définition précise résulteront alors, en tenant compte de celle (6) des trois modules, pour les expressions précédentes (31), les valeurs suivantes, dans lesquelles chacun des doubles signes devra donc être interprété de la façon que nous venons de rappeler,

$$(33) \quad \left\{ \begin{aligned} \sqrt{\mathrm{P}} &= n\frac{dp}{du} = n\frac{d \,.\, l\,\mathrm{sn}(u, k)}{du} = nl \,.\, \mathrm{cn}\, u\, \mathrm{dn}\, u, \\ \sqrt{\mathrm{Q}} &= l\frac{dq}{dv} = l\frac{d[\pm\, l\,\mathrm{dn}(v, k')]}{dv} = \pm\, l^2(-k'^2\,\mathrm{sn}\, v\,\mathrm{cn}\, v) \\ &\qquad = \pm\, l^2\frac{m^2}{l^2}\,\mathrm{sn}\, v\,\mathrm{cn}\, v = \pm\, m^2\mathrm{sn}\, v\,\mathrm{cn}\, v, \\ \sqrt{\mathrm{R}} &= m\frac{dr}{dw} = m\frac{d[\pm\, in\mathrm{cn}(w, k'')]}{dw} = \pm\, min(-\mathrm{sn}\, v\,\mathrm{dn}\, w) \\ &\qquad = \pm\, m\,(-in)\,\mathrm{sn}\, w\,\mathrm{dn}\, w, \end{aligned} \right.$$

ce qui revient à dire que les radicaux en question, positifs par définition (page 8), représentent tous les trois dans la formule (30) des *fonctions paires*, l'une de u, l'autre de v, la troisième de w, lesquelles ont pour expressions les valeurs que nous venons d'écrire. Et avec cette interprétation expresse, la dite formule s'écrira dès lors sous forme plus explicite

$$(34) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta_z = ln\,(\mathrm{cn}\, u\,\mathrm{dn}\, u\, \mathrm{I}^{(p^2)})_2^1 &\pm m^2\,(\mathrm{sn}\, v\,\mathrm{cn}\, v\, \mathrm{I}^{(q^2)})_2^1 \\ &\pm m\,(-in)\,(\mathrm{sn}\, w\,\mathrm{dn}\, w\, \mathrm{I}^{(r^2)})_2^1, \end{aligned} \right.$$

les indices 1 et 2 se rapportant à présent à la fois, à la variable

p, q, r figurée par $\sqrt{\varpi}$ dans la définition (28) du symbole $I^{(\varpi)}$, et en même temps à la coordonnée u, v, w correspondante.

Il résulte de là une conséquence importante qu'il convient de noter dès maintenant, parce qu'elle nous servira plus tard, pour l'hypothèse où le Corps donné serait composé de huit portions séparées (une dans chaque angle trièdre des plans coordonnés), symétriques par rapport à chacun desdits plans coordonnés.

Mais, pour que les explications que nous allons donner paraissent parfaitement claires, il est nécessaire que nous rappelions d'abord certaines notions fondamentales relatives à la constitution de notre Système de Coordonnées, que nous allons présenter ainsi qu'il suit.

En premier lieu, les trois Coordonnées Elliptiques λ, μ, ν étant, comme nous l'avons dit (page 10), les trois racines de l'équation du troisième degré (5) ou (10bis), qui ne renferme les coordonnées x, y, z qu'à l'état de carrés, il suit de là que les trois quantités de gauche (12), savoir

$$a^2 + \lambda = l^2 \operatorname{sn}^2 u, \qquad b^2 + \mu = m^2 \operatorname{sn}^2 v, \qquad c^2 + \nu = n^2 \operatorname{sn}^2 w,$$

ne dépendront, elles aussi, des Coordonnées Rectilignes que par leurs carrés, et par conséquent il en sera de même encore à l'égard d'abord des trois sinus d'amplitude $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{sn} v$, $\operatorname{sn} w$, puis des trois coordonnées u, v, w elles-mêmes, lesquelles conserveront donc ainsi, comme les Coordonnées Elliptiques, les mêmes valeurs absolues pour les huit points distribués symétriquement dans chacun des huit angles trièdres des plans coordonnés.

En second lieu, si l'on tient compte des limites admises par hypothèse pour la variation en valeur absolue de chaque coordonnée, savoir 0 et K pour u, 0 et K′ pour v, 0 et $i K_1''$ pour w, les équations de définition (6) montrent alors que u ne change de signe qu'en même temps que x, v qu'avec y, et w qu'avec z.

De ces deux faits primordiaux, il résulte alors qu'en deux points symétriquement placés de part et d'autre du plan yz, les coordonnées u seront égales et de signe contraire, et les coordonnées

v et w égales et de même signe, puisque pour passer de l'un à l'autre il ne faut traverser ni le plan zx, ni le plan xy. De même, en deux points symétriquement placés par rapport au plan zx, les coordonnées v sont égales et de signes contraires, les coordonnées w et u égales et de même signe; et l'on formulerait enfin une conclusion analogue relativement au plan xy, en permutant de nouveau à la fois les deux systèmes de coordonnées.

Ces notions fondamentales étant rappelées, voyons à présent quelles conséquences elles entraîneront relativement à la formule en question (30), dans l'hypothèse du Corps particulier spécifié tout à l'heure.

Pour cela, supposons d'abord que nous ayons déterminé l'intégrale double $I^{(\varpi)}$, et que nous ayons formé effectivement, par la substitution dans ce résultat des valeurs (10), les six fonctions correspondantes des limites données u_1, v_1, w_1; u_2, v_2, w_2, qui entreront dans la composition de l'expression de Δ_x, et admettons en outre que nous ayons dès lors reconnu, comme nous le ferons plus tard dans un cas étendu, que lesdites fonctions sont des fonctions bien déterminées, de parité simple, des limites en question de u, v, w; voici alors ce qui se produira, suivant la parité (*), successivement pour chacun des trois termes qui composent l'expression précitée de Δ_x.

(*) Il faut bien se garder de conclure que les fonctions $I^{(\varpi)}$ seront nécessairement dans tous les cas des fonctions paires des variables u, v, w, en se basant sur ce seul fait que, dans la définition (23) de ces fonctions, les variables indépendantes s et t et la constante ϖ y représentent à chaque fois les carrés des variables

$$p = l \operatorname{sn} u, \qquad q = \pm\, l \operatorname{dn} v, \qquad r = \pm\, m \operatorname{cn} w,$$

supposées permutées entre elles d'une façon quelconque. Cette conclusion prématurée serait illégitime et inexacte, en raison de ce que rien ne montre *a priori* que les expressions de ces intégrales doubles supposées calculées seront alors des fonctions bien déterminées des dites variables, c'est-à-dire des carrés p^2, q^2, r^2, de manière qu'elles ne puissent ainsi contenir aucun des radicaux

$$(\alpha) \qquad \sqrt{p^2} = \pm\, l \operatorname{sn} u, \qquad \sqrt{l^2 - q^2} = \pm\, im \operatorname{sn} v, \qquad \sqrt{n^2 + r^2} = \pm\, n \operatorname{sn} w,$$

qui sont des fonctions impaires des coordonnées u, v, w : circonstance qui se présentera

Pour le premier, par exemple, savoir $(\sqrt{P}I^{(p^2)})_2^1$, d'après ce que nous venons de dire à l'instant, il résultera immédiatement de la symétrie admise pour l'ensemble du Corps, d'une part, qu'à chaque limite donnée u_1 ou u_2, inférieure ou supérieure, de la variable u à l'intérieur de l'une des huit portions du Corps, correspondra une autre limite semblable qui sera $-u_1$ ou $-u_2$, c'est-à dire égale et de signe contraire à la précédente, pour la variation de la même coordonnée à l'intérieur de l'autre portion du Corps symétrique de la précitée par rapport au plan yz; et d'autre part, que les deux limites constantes données, relatives à la variation de chacune des deux autres coordonnées v_1, v_2 ou w_1, w_2 seront au contraire les mêmes, en grandeur et en signe, pour les deux portions en question.

Si donc l'intégrale double $I^{(p^2)}$, supposée exprimée en fonction de u et des limites données de v et w, à la place de p et de celles de q et r, est une fonction impaire de u, comme son coefficient $\sqrt{P}$ est une fonction paire, la quantité $\sqrt{P}I^{(p^2)}$ sera elle-même une fonction impaire de u, et l'on voit alors que pour chacune des limites de u, soit u_1, soit u_2, séparément, l'ensemble des deux termes correspondant à cette limite pour les deux portions du Corps envisagées en ce moment donnera une somme nulle,

---

précisément dans tous les cas, ainsi que nous le constaterons dès ce premier Chapitre lui-même, et plus tard dans les suivants.

D'ailleurs une autre raison viendra s'ajouter à celle-là dans le Cas général, pour lequel nous retrouverons, au début du prochain Chapitre, l'expression de la quantité analogue $\Delta_z = \frac{lin}{-fD} X$ relative à ce Cas, composée encore de la même façon avec six intégrales doubles du même type

$$(6) \qquad I^{(\varpi)} = \frac{1}{4}\int_{s_1}^{s_2}\int_{t_1}^{t_2} \frac{s-t}{\rho_\varpi}\frac{ds}{\sqrt{S}}\frac{dt}{\sqrt{T}},$$

à savoir que l'expression du facteur ρ_ϖ qui entre en dénominateur dans l'élément de cette intégrale contiendra dans ce cas les trois radicaux $\sqrt{\varpi}$, $\sqrt{l^2-\varpi}$, $\sqrt{n^2+\varpi}$, qui pour les hypothèses successives $\varpi = p^2, q^2, r^2$, représenteront respectivement les trois radicaux ci-dessus (α), et par conséquent, que quelle que soit la signification attribuée au symbole ϖ, l'élément de ladite intégrale (6) renfermera toujours l'une des trois fonctions impaires spécifiées par les égalités précitées (α).

et par conséquent le premier terme $(\sqrt{\mathrm{P}}\mathrm{I}^{(r^2)})_2^1$ disparaîtra de l'expression (30) de Δ_x relative à l'ensemble du Corps.

Si, au contraire, l'intégrale double $\mathrm{I}^{(r^2)}$ est une fonction paire de u, comme il en sera de même de la quantité $\sqrt{\mathrm{P}}\mathrm{I}^{(r^2)}$, il est clair que le terme $(\sqrt{\mathrm{P}}\mathrm{I}^{(r^2)})_2^1$, considéré encore pour deux portions du Corps symétriques par rapport au plan yz, aura la même valeur en grandeur et en signe pour ces deux portions, et par conséquent ce même terme considéré pour l'ensemble de tout le Corps, aura pour valeur le double de celle de la même expression envisagée seulement pour l'une des moitiés du Corps séparées par le plan yz, par exemple celle située du côté des x positifs.

Pour évaluer maintenant dans ce cas cette dernière valeur elle-même, nous pourrons reprendre à son égard une série de considérations analogues à celles que nous venons de faire intervenir, c'est-à-dire que nous reconnaîtrons exactement de la même façon que si la même intégrale double $\mathrm{I}^{(r^2)}$ est encore une fonction impaire par rapport aux limites de l'une ou de l'autre des deux variables v ou w, l'ensemble des deux termes correspondants à une même limite (inférieure ou supérieure) de cette variable-là, pour deux portions du Corps symétriques par rapport au plan zx ou au plan xy, donneront encore une somme nulle dans l'expression $(\sqrt{\mathrm{P}}\mathrm{I}^{(r^2)})_2^1$, et par conséquent ledit terme disparaîtra de nouveau de l'expression (30) de Δ_x étendue à la moitié du corps envisagée en ce moment, et par suite aussi de la même expression étendue à la totalité du Corps.

Si, au contraire, cette même intégrale double $\mathrm{I}^{(r^2)}$ est une fonction paire, à la fois, relativement aux limites de v et aux limites de w séparément, le terme $(\sqrt{\mathrm{P}}\mathrm{I}^{(r^2)})_2^1$ aura encore la même valeur en grandeur et en signe pour les quatre portions symétriques dont l'ensemble constitue la moitié du Corps envisagée actuellement, et par conséquent la valeur du terme en question, considéré pour la totalité du Corps, sera alors égale à huit fois celle du même terme relative à l'une des huit portions du Corps précitées, soit encore celle située dans le trièdre des coordonnées positives.

Si maintenant l'intégrale double envisagée $I^{(p^2)}$, tout en restant une fonction bien déterminée par rapport aux différentes variables déjà considérées tout à l'heure, dans l'étendue des limites assignées par la question aux coordonnées u, v, w, n'était de parité simple ni par rappprt à u, ni par rapport aux limites de v ou de w séparément, il est clair qu'il suffirait, pour pouvoir profiter encore des conclusions auxquelles nous venons d'arriver, de mettre en évidence, dans ladite fonction, la partie $I_0^{(p^2)}$ qui est paire à la fois, par rapport à u d'une part, et aux limites de v et de w, séparément, d'autre part, en faisant

$$I^{(p^2)} = I_0^{(p^2)'} + I_1^{(p^2)},$$

l'autre partie $I_1^{(p^2)}$ étant dès lors impaire par rapport à l'une au moins des différentes quantités que nous venons de dire. Et alors il résulte immédiatement des explications qui précèdent, que la valeur du terme $(\sqrt{P}I^{(p^2)})_2^1$ étendu à la totalité du Corps, sera celle de la quantité $8(\sqrt{P}I_0^{(p^2)})_2^1$ considérée seulement pour la portion comprise dans l'angle trièdre des coordonnées positives.

Ayant commencé par établir que les deux coefficients $\sqrt{Q}$ et $\sqrt{R}$ représentaient également dans la formule (30) ou (34) (nonobstant la première apparence) des fonctions paires de v ou de w, il est clair que les mêmes raisonnements conduiront encore à un résultat exactement semblable à l'égard des deux autres termes de ladite formule, savoir $(\sqrt{Q}I^{(q^2)})_2^1$ et $(\sqrt{R}I^{(r^2)})_2^1$.

Donc, en résumé, et c'est là la conclusion définitive à laquelle nous voulions parvenir :

« *Pour appliquer la formule* (30) *ou* (34) *à un Corps composé* » *de huit parties symétriques par rapport aux trois plans coor-* » *donnés* (*une dans chaque trièdre de ces plans*), *il n'y aura à* » *tenir compte, pour chacune des six fonctions du type* $I^{(\varpi)}$ *qui* » *figurent dans le second membre de ladite formule, que de la* » *seule partie* $I_0^{(\varpi)}$ *paire à la fois, et séparément, par rapport à*

» *chacune des variables* u, v, w (*ou plus exactement par rap-*
» *port à leurs limites données*), *et la valeur de chacun des six*
» *termes correspondants pour la totalité du corps sera alors*
» (*abstraction faite de son signe, ainsi que de l'indice relatif à* ϖ)
» *du type* $8\sqrt{(l^2 - \varpi)(n^2 + \varpi)}\ \mathrm{I}_0^{(\varpi)}$, *cette dernière quantité étant*
» *étendue à la seule portion renfermée dans l'angle trièdre des*
» *coordonnées positives.* »

Cette conclusion si nette nous sera de la plus grande utilité, lorsque nous nous proposerons, à titre de vérification de nos calculs, de retrouver les résultats classiques relatifs à l'Ellipsoïde homogène, en envisageant alors le cas limite où le Corps attirant serait considéré comme formé de l'ensemble des huit octants de ce Solide.

Réduction de cette intégrale double a deux quadratures successives. — A. *Introduction de nouvelles variables pour l'intégration double.* — Si l'on voulait procéder au calcul de l'intégrale double (28) dans la forme même sous laquelle elle vient de s'offrir à nous, c'est-à-dire avec les deux mêmes variables s et t qui y figurent, la première quadrature, soit celle par rapport à s, s'opérerait à la vérité sans aucune difficulté, et fournirait, comme on l'aperçoit immédiatement, des intégrales elliptiques de première et de deuxième espèce dont le carré du module serait une fonction linéaire de l'autre variable t. La seconde quadrature, c'est-à-dire celle relative à t, introduirait donc ensuite des intégrales par rapport à leur module de produits de semblables fonctions par certaines fonctions algébriques de ce module (*), lesquelles appartiendraient dès lors à un type de fonctions inusité dans la pratique courante de l'Analyse, dont les propriétés n'ont pas encore été étudiées, et dont il serait très difficile, par conséquent, de calculer la combinaison qui représentera l'intégrale double en question, combinaison qui pourrait

(*) Ce calcul sera développé avec toutes les explications désirables dans la Note II de l'*Appendice* qui termine le présent Ouvrage.

peut-être éventuellement être exprimée par un ordre de fonctions beaucoup plus simple (*). Il y a donc lieu d'introduire d'autres variables à la place de s et t pour procéder à la détermination de cette intégrale double.

Nous ferons choix, dans ce but, des deux variables θ et ω, définies en fonction des précédentes par les deux équations

$$(35) \qquad s + t = \theta + f, \qquad st = \omega - g^2,$$

à l'aide desquelles l'intégrale en question se trouvera représentée, d'après la théorie classique du changement de variables (en laissant de côté provisoirement la détermination des limites relatives à ces nouvelles variables, sur laquelle nous fournirons un peu plus loin toutes les explications convenables), par la nouvelle expression

$$(36) \qquad \mathrm{I}^{(\varpi)} = \frac{1}{4}\iint \frac{s-t}{\sqrt{s+t+\varpi-f}} \frac{\pm\partial(s,t)}{\partial(\theta,\omega)} \frac{d\theta d\omega}{\sqrt{\mathrm{ST}}},$$

à la condition de supposer dans cette formule s et t remplacées par leurs valeurs en θ et ω déduites des équations précédentes (35), et le double signe qui y affecte le déterminant fonctionnel comportant par définition la signification expresse de la valeur absolue de ce déterminant.

(*) Les faits de ce genre sont, en effet, fréquents en Analyse. C'est ainsi, pour n'en citer que deux exemples concernant l'un et l'autre les fonctions elliptiques, c'est ainsi, disons-nous, que les formules d'addition des arguments des fonctions de deuxième et de troisième espèces, étant écrites respectivement comme il suit

$$\left\{\begin{aligned} &\mathrm{Z}(\varphi+\psi) - \mathrm{Z}(\varphi) - \mathrm{Z}(\psi) = k^2 \operatorname{sn}\varphi \operatorname{sn}\psi \operatorname{sn}(\varphi+\psi), \\ &\Pi(\varphi+\psi, h) - \Pi(\varphi, h) - \Pi(\psi, h) \\ &\qquad = \frac{1}{4}\log\frac{[1-k^2\operatorname{sn}^2(\varphi-h)\operatorname{sn}^2\psi][1-k^2\operatorname{sn}^2\varphi\operatorname{sn}^2(\psi-h)]}{[1-k^2\operatorname{sn}^2(\varphi+h)\operatorname{sn}^2\psi][1-k^2\operatorname{sn}^2\varphi\operatorname{sn}^2(\psi+h)]}, \end{aligned}\right.$$

montrent alors que, dans l'un et l'autre cas, une certaine combinaison simple de fonctions d'une même catégorie déterminée s'exprime par une combinaison d'autres fonctions de nature plus simple, ou tout au moins antérieure dans l'ordre de génération des diverses fonctions par le Calcul Intégral.

Cela posé, la différentiation des équations (35) par rapport aux nouvelles variables donnant

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{ds}{d\theta}+\frac{dt}{d\theta}=1, && \frac{ds}{d\omega}+\frac{dt}{d\omega}=0,\\ &t\frac{ds}{d\theta}+s\frac{dt}{d\theta}=0, && t\frac{ds}{d\omega}+s\frac{dt}{d\omega}=1,\end{aligned}\right.$$

les deux systèmes formés des équations, soit de gauche, soit de droite, équivaudront aux deux suivants

$$\left\{\begin{aligned} &(s-t)\frac{ds}{d\theta}=s, && (s-t)\frac{ds}{d\omega}=-1,\\ &(s-t)\frac{dt}{d\theta}=-t, && (s-t)\frac{dt}{d\omega}=1,\end{aligned}\right.$$

et fourniront, en conséquence, les valeurs des dérivées

$$\frac{ds}{d\theta}=\frac{s}{s-t},\qquad \frac{dt}{d\theta}=\frac{-t}{s-t},\qquad \frac{ds}{d\omega}=\frac{-1}{s-t},\qquad \frac{dt}{d\omega}=\frac{1}{s-t},$$

desquelles on conclura, pour le déterminant $\frac{d(s,t)}{d(\theta,\omega)}$, la valeur

$$(37)\qquad \frac{\partial(s,t)}{\partial(\theta,\omega)}=\frac{s-t}{(s-t)^2}=\frac{1}{s-t},$$

que l'on devra donc introduire dans la formule précédente (36) avec le signe + lorsque l'on aura $s>t$, et avec le signe — dans l'hypothèse contraire.

Dans les mêmes circonstances, c'est-à-dire avec la même interprétation du double signe qui y figure, la nouvelle forme (36) de notre intégrale double (28) deviendra donc, en y reportant cette valeur (37) du déterminant fonctionnel,

$$(38)\qquad I^{(\varpi)}=\frac{1}{4}\iint\frac{\pm 1}{\sqrt{s+t+\varpi-f}}\frac{d\theta d\omega}{\sqrt{ST}},$$

à la condition d'y remettre en même temps, à la place de s et t, leurs valeurs tirées des équations (35). Or on trouvera sans peine, en tenant compte de ces équations, ainsi que des définitions (29) et (14),

$$(38^{bis})\quad \begin{cases} ST=(l^2-s)(n^2+s).(l^2-t)(n^2+t)=(l^2-s)(l^2-t).(n^2+s)(n^2+t) \\ \quad =[l^4-l^2(s+t)+st][n^4+n^2(s+t)+st] \\ \quad =[l^4-l^2(\theta+f)+(\omega-g^2)][n^4+n^2(\theta+f)+(\omega-g^2)] \\ \quad =[l^4-l^2(\theta+l^2-n^2)+(\omega-l^2n^2)][n^4+n^2(\theta+l^2-n^2)+(\omega-l^2n^2)]=\Omega, \end{cases}$$

en convenant donc de faire à nouveau désormais, pour abréger les écritures,

$$(39)\qquad \Omega=(\omega-l^2\theta)(\omega+n^2\theta).$$

En introduisant dès lors cette valeur, ainsi que celle de gauche (35) dans l'expression de l'intégrale double (38), celle-ci deviendra donc, la question des limites étant réservée pour un examen ultérieur,

$$(40)\qquad I^{(\varpi)}=\pm\frac{1}{4}\iint\frac{d\omega}{\sqrt{\Omega}}\frac{d\theta}{\sqrt{\varpi+\theta}},$$

forme beaucoup plus avantageuse pour la facilité de l'intégration que la forme primitive (28) en s et t, car il résultera, tant de l'expression précédente (39) de la quantité Ω, que des limites de ω relatives à la première intégration que nous allons reconnaître à l'instant, que pour les deux intégrations successives en ω et θ, l'on se trouvera désormais respectivement en présence de quadratures du type

$$\int\frac{d\omega}{\sqrt{A+B\omega+\omega^2}}\quad \text{et}\quad \int\log\left(\sqrt{A'+B'\theta}+\sqrt{A''+B''\theta}\right)\frac{d\theta}{\sqrt{\varpi+\theta}},$$

que les seuls procédés classiques donneront le moyen d'effectuer complètement.

B. ***Limites de l'intégration relatives à chaque nouvelle variable.*** — L'intelligence de la discussion assez complexe et minutieuse à laquelle nous sommes actuellement forcé de nous livrer, sera notablement facilitée, si l'on convient d'y considérer les variables primitives s et t de l'intégrale double (28) comme des coordonnées cartésiennes tenant lieu de x et y, et les variables θ et ω comme un système de coordonnées curvilignes, relatif au même plan que les précédentes, système défini par les équations (35).

Avec cette interprétation toute naturelle, le champ d'intégration relatif à l'intégrale proposée (28) est un rectangle ABCD limité par les parallèles aux axes des s et des t, $s = s_1$, $t = t_1$ et $s = s_2$, $t = t_2$. Sous cette même forme (28), la première intégration, soit celle par rapport à s, étant effectuée en considérant t comme constant, correspond donc à la sommation de tous les éléments situés le long d'une parallèle à l'axe des s. Avec la seconde forme d'intégrale (40), au contraire, la première intégration (nous entendons expressément par là celle relative à ω, la raison de ce choix ayant été formulée un peu plus haut) étant effectuée en laissant θ constant, correspond à la sommation de tous les éléments situés le long de la courbe représentée en coordonnées rectilignes s et t par l'équation de gauche (35), en y considérant θ comme un paramètre variable, laquelle est alors manifestement une normale à la bissectrice de l'angle des coordonnées positives, dont la distance à l'origine sera une fonction linéaire de θ à coefficients positifs, et variera par conséquent constamment dans le même sens que ce paramètre. Et dès lors, si l'on imagine qu'une semblable normale se transporte d'un mouvement continu en s'éloignant de l'origine dans la direction des coordonnées positives, les limites extrêmes de la seconde intégration (celle relative à θ) seront évidemment les valeurs de ce paramètre correspondant aux positions extrêmes de cette normale qui rencontreront le rectangle ou champ d'intégration, soit celles représentées dans les figures 2 ou 2bis ci-dessous (p. 38) par les droites pointillées AI, DH, c'est-à-dire les deux valeurs de θ, $\theta = \theta_1$ et $\theta = \theta_2$, fournies par les deux équations

$$s_1 + t_1 = \theta_1 + f, \qquad \text{et} \qquad s_2 + t_2 = \theta_2 + f,$$

savoir

$$(41) \qquad \theta_1 = s_1 + t_1 - f, \qquad \text{et} \qquad \theta_2 = s_2 + t_2 - f.$$

Quant aux limites relatives à la première intégration, en ω, qui s'aperçoivent moins immédiatement, il faut, pour les découvrir, se rappeler que, d'après la théorie connue du changement de variables, l'on devra s'arranger, dans l'intégration de la nouvelle forme d'expression (40), de manière que les nouvelles variables θ et ω puissent y être considérées, conformément à la définition d'une intégrale double, comme des variables véritablement indépendantes, c'est-à-dire telles que chacune des deux différentielles $d\omega$ et $d\theta$ soient invariablement positives: ce qui revient à dire qu'il faudra fractionner le champ d'intégration en régions telles que, dans chacune, ces deux variables aillent constamment en croissant, de la limite inférieure à la limite supérieure de la quadrature correspondante à cette région.

Pour la seconde intégration relative à θ, il faudra donc faire croître θ constamment de la limite θ_1 à la limite θ_2 ci-dessus spécifiées (41), sauf à fractionner cet intervalle de la façon que nous allons dire en vue de l'intégration relative à ω.

Quant à cette première intégration, en ω, qui s'effectuera, avons-nous dit, le long d'une normale à la bissectrice des axes telle que P'P'' (voir les figures 2 et 2bis précitées), nous observerons que, d'après les équations de définition (35), la quantité $\omega - g^2$ est, en vertu de la seconde, un produit de deux facteurs s et t dont la somme est supposée constante dans cette intégration en vertu de la première, et dont le maximum aura lieu, par conséquent, pour $s = t$ (*), c'est-à-dire pour le point de la normale envisagée situé sur la bissectrice elle-même.

Il faudra par conséquent tout d'abord, d'après ce que nous venons de dire à l'instant, distinguer pour l'intégration, en vue de les traiter à part, les deux régions du plan séparées par la

(*) Voir, si l'on veut, BERTRAND, *Traité d'Algèbre*, 1re Partie, § 301, p. 234 (1873)

bissectrice des axes, distinction qui nous était d'ailleurs déjà imposée antérieurement au point de vue du signe à prendre dans la formule (38) ou (40), car pour la région située au-dessous de la bissectrice (nous voulons dire du côté des t négatifs), comme l'on a en un point quelconque de cette région $s > t$, ce sera donc, ainsi que nous l'avons dit (page 32), le signe $+$ que l'on devra prendre, et pour l'autre région, ayant au contraire en chaque point $s < t$, ce sera dès lors le signe — qu'il faudra adopter.

La première question qui se pose est donc de savoir si le rectangle d'intégration pourra être coupé par la bissectrice des axes, puisque, dans ce cas, l'on devrait envisager séparément chacune des deux portions dudit champ situées de part et d'autre de cette bissectrice.

Pour décider ce point, remarquant tout d'abord qu'en vertu des limites assignées par leur définition à la variation de nos coordonnées u, v, w, savoir 0 et $\pm K$ pour u, 0 et $\pm K'$ pour v, 0 et $\pm iK''_1$ pour w, il résulte dès lors des définitions ci-dessus rappelées (32) que les valeurs absolues de ces variables seront comprises elles-mêmes, savoir : celle de p entre 0 et l, celle de q entre l et in, celle de r entre in et ∞, c'est-à-dire que l'on aura par conséquent, quant à leurs carrés,

$$(41^{bis}) \qquad 0 < p^2 < l^2, \qquad l^2 < q^2 < -n^2, \qquad -n^2 < r^2 < \infty;$$

l'on en déduira dès lors immédiatement cette conséquence, à savoir que si l'on trace sur le plan les parallèles aux axes des s et des t, répondant aux valeurs s ou $t = l^2$ ou $-n^2$, le rectangle ou champ d'intégration sera forcément cantonné à l'intérieur de l'une des trois régions rectangulaires déterminées par lesdites parallèles, régions, finie quant à l'une, ou infinie dans un sens quant aux deux autres, que nous marquons par les chiffres I, II, III, en les mettant en évidence par des hachures sur le bord intérieur dans la figure 1 ci-contre, et indiquant en même temps à côté de ces chiffres la signification de ϖ, s, et t que suppose chacune de ces trois situations différentes du rectangle d'inté-

gration. Or la même figure, d'une part, fait voir clairement qu'aucune des trois régions précitées n'est coupée par la bissectrice des axes, d'où il suit que le champ d'intégration sera dans tous les cas situé en entier d'un même côté de la bissectrice en question; et, d'autre part, elle montre également, d'après ce que nous avons dit tout à l'heure, que dans les hypothèses I et III ce sera le signe — qu'il faudra prendre dans la formule (40) et le signe + dans l'hypothèse II.

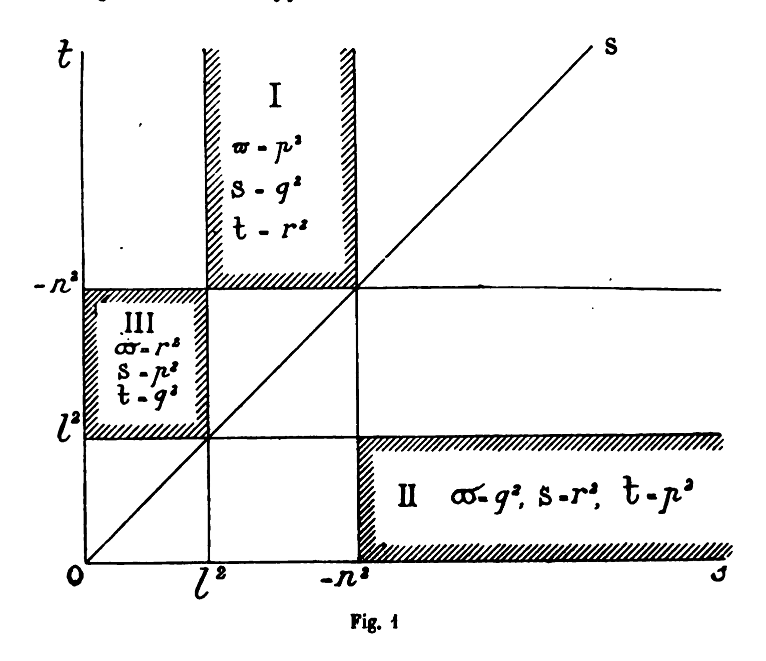


Fig. 1

Ce premier point essentiel étant éclairci, et l'hypothèse envisagée étant, pour fixer les idées, l'hypothèse II qui correspond à l'une ou l'autre des figures 2 ou 2bis ci-après (page 38), dans lesquelles la droite OS représente la bissectrice des axes s et t, les deux limites de la quadrature en ω seront alors, comme on le voit, les deux valeurs de cette variable relatives aux deux points d'intersection P′ et P″ de la normale correspondante à la valeur de θ envisagée avec deux côtés parallèles du rectangle d'intégration : la limite inférieure étant toujours celle qui correspond au

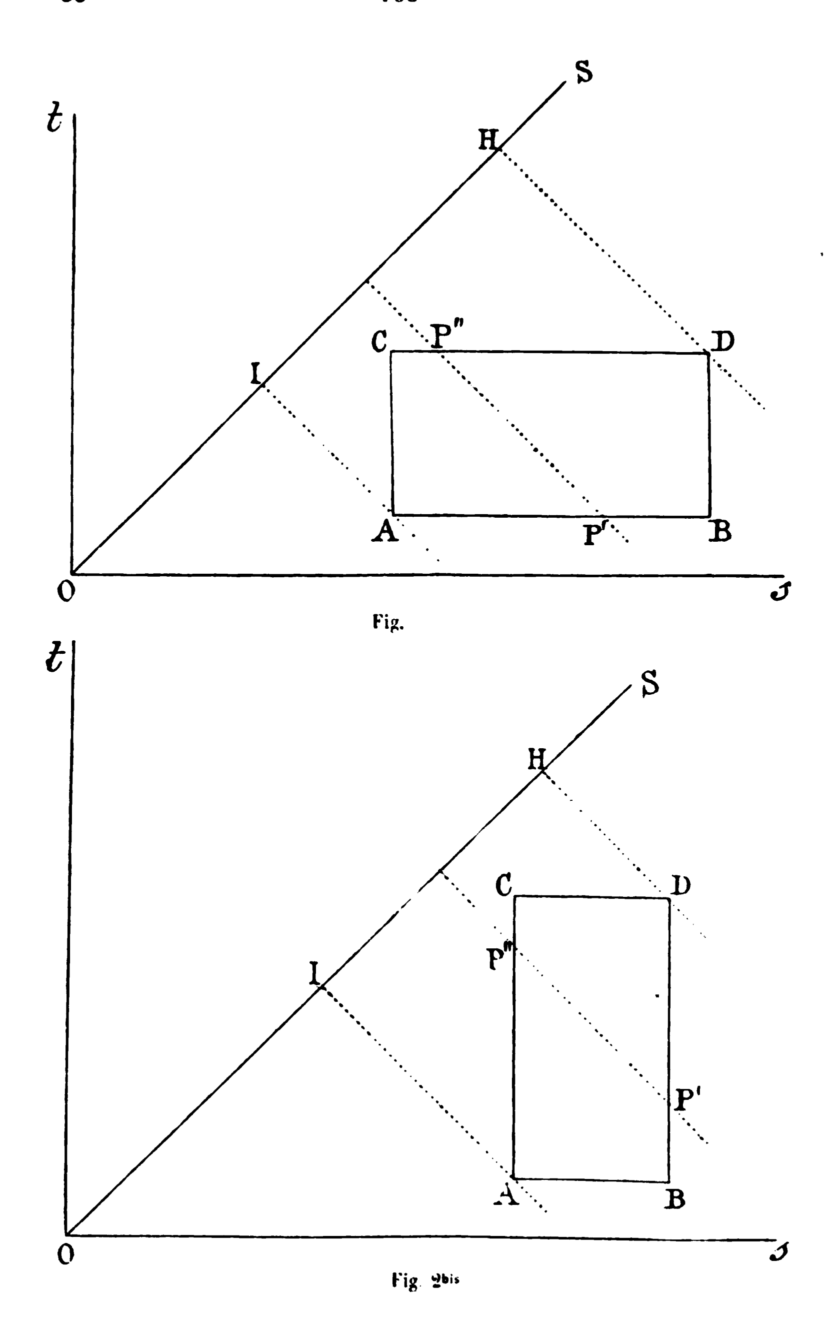


Fig.

Fig. 2bis

point P′ le plus éloigné de la bissectrice, et la limite supérieure, celle qui répond au point P″ le plus rapproché.

La question étant ainsi posée, il est aisé de déterminer dans tous les cas possibles l'expression de ces limites de la quadrature en ω, en examinant séparément les trois cas suivants :

a) Lorsque la normale sur laquelle s'effectuera l'intégration rencontrera le contour du rectangle en un côté parallèle aux s, l'équation du contour dans cette région étant alors de la forme $t = \tau$, τ désignant l'une des deux limites primitives t_1 ou t_2, l'expression de la limite demandée sera la valeur de ω résultant de l'élimination de la variable s entre les deux équations

$$(42) \qquad s + \tau = \theta + f, \qquad s\tau = \omega - g^2,$$

obtenues en faisant $t = \tau$ dans les équations de définition (35), c'est-à-dire par conséquent la valeur

$$\omega = g^2 + (\theta + f - \tau)\,\tau,$$

que l'on pourra écrire, par rapprochement avec les expressions (29),

$$(43) \qquad \omega = (g^2 + f\tau - \tau^2) + \tau\theta = (l^2 - \tau)(n^2 + \tau) + \tau\theta.$$

b) Exactement de la même façon, lorsque le point d'intersection correspondant à la limite envisagée se trouvera sur un côté du rectangle parallèle aux t, l'équation du contour dans cette région étant alors de la forme $s = \sigma$, σ désignant semblablement l'une des limites données s_1 ou s_2, l'expression de la nouvelle limite demandée sera la valeur de ω résultant de l'élimination de la variable t entre les deux équations

$$(44) \qquad \sigma + t = \theta + f, \qquad \sigma t = \omega - g^2,$$

c'est-à-dire la valeur

$$\omega = g^2 + \sigma\,(\theta + f - \sigma),$$

que nous écrirons de nouveau, comme la précédente,

$$(45) \qquad \omega = (g^2 + f\sigma - \sigma^2) + \sigma\theta = (l^2 - \sigma)(n^2 + \sigma) + \sigma\theta.$$

c) Enfin (l'on verra un peu plus loin l'utilité de cette considération), si ledit point d'intersection eût appartenu à la bissectrice elle-même, alors l'expression de la limite correspondante eût été la valeur de ω résultant de l'élimination de t entre les deux équations

$$(46) \qquad 2t = \theta + f, \qquad t^2 = \omega - g^2,$$

obtenues en faisant $s = t$ dans les équations proposées (35), c'est-à-dire la valeur

$$(47) \qquad \omega = g^2 + \frac{1}{4}(\theta + f)^2 = \Theta,$$

laquelle, d'après ce que nous avons expliqué, eût représenté dans tous les cas une limite supérieure de l'intégration, tandis que les deux expressions précédentes (43) et (45) pouvaient représenter, suivant le cas, une limite supérieure ou bien une limite inférieure de l'intégration en ω.

Ces explications étant bien comprises, il est clair à présent qu'il suffira de projeter sur la bissectrice des axes en I, E, F, H, les quatre sommets A, B, C, D du rectangle d'intégration (voir les figures 3 ou 3[bis] ci-après, page 47), pour partager ainsi ce champ en trois champs partiels, en forme de triangle ou de parallélogramme, tels que, dans l'étendue de chacun d'eux, l'une et l'autre des deux limites de l'intégration en ω conserve constamment la même expression (43) ou (45) et que, au contraire, chacune de ces limites isolément change d'expression en passant de l'une de ces portions à la suivante.

Quant aux deux limites de θ correspondant à chacune de ces parties du champ d'intégration, ce seront évidemment, d'après les explications fournies plus haut, les deux valeurs de ce paramètre correspondant, de par l'équation de gauche (35), aux



deux normales d'entrée et de sortie de la portion considérée, c'est-à-dire les valeurs de cette variable θ fournies par cette équation (35) dans laquelle on aura remis, à la place de s et t, les coordonnées du sommet du rectangle qui définiront précisément ces normales extrêmes, limites latérales de la région en question.

L'ordre dans lequel se succéderont les deux limites intermédiaires, correspondant aux normales BE et CF, ainsi envisagées pour l'intégration en θ, dépendra, comme on le voit aisément, des dimensions relatives des côtés du rectangle d'intégration, c'est-à-dire en fait des valeurs données des quatre limites primitives d'intégration s_1, t_1, s_2, t_2, qui représentent les coordonnées des quatre sommets du rectangle, et par conséquent l'expression de chacune des intégrales partielles correspondant à chacun des trois champs définis tout à l'heure en dépendra du même coup. Mais il est très remarquable que, nonobstant cette variabilité de la forme d'expression de chacune de ses parties, l'expression de la somme totale n'en conservera pas moins une forme constante qu'il importe de faire connaître à présent, parce que seule elle mettra en évidence la nature analytique très simple et uniforme des différents termes dont se composera la solution pour le cas particulier que nous étudions dans ce premier Chapitre.

A cet effet, imaginons par exemple que l'hypothèse, étant empruntée aux cas I ou III, soit celle qui correspond à la figure 3[bis] (page 47), dans laquelle il est possible de mener une normale à la bissectrice des axes rencontrant le contour du rectangle en ses deux côtés parallèles aux s, circonstance qui exige géométriquement que lesdits côtés soient plus longs que ceux parallèles aux t, et qui correspond dès lors analytiquement à l'hypothèse

$$(48) \qquad s_2 - s_1 > t_2 - t_1, \qquad \text{ou} \qquad s_1 - s_2 - t_1 + t_2 < 0,$$

les quatre projections spécifiées ci-dessus, qui se présentent, pour le cas envisagé, en s'avançant sur la bissectrice dans le sens de la variation de θ, dans l'ordre I, F, E, H, détermineront

successivement quatre normales à cette bissectrice, correspondant aux valeurs de la variable θ indiquées comme il suit

$$(49)\qquad \left\{\begin{matrix} \text{I}, & \text{F}, & \text{E}, & \text{H}, \\ s_1+t_1-f, & s_1+t_2-f, & s_2+t_1-f, & s_2+t_2-f, \end{matrix}\right.$$

lesquelles normales partageront, ainsi que nous l'avons expliqué, le rectangle ou champ d'intégration primitif en trois champs d'intégration partiels (triangle ou parallélogramme) délimités de toutes parts sur la figure par des traits pleins, et marqués des numéros 1, 2, 3, pour chacun desquels les limites de l'intégration en θ seront représentées par deux valeurs successives empruntées à la série que nous venons d'écrire.

Quant à la quadrature en ω, il résulte immédiatement des explications très complètes que nous avons données ci-dessus au sujet de la détermination des limites relatives à cette variable (pp. 39-40), que cette quadrature sera représentée, pour chacun des trois champs partiels précités, en tenant compte toujours de la définition (29) des symboles S et T, respectivement par les trois expressions

$$(50)\qquad \int_{S_1+s_1\theta}^{T_1+t_1\theta}\frac{d\omega}{\sqrt{\Omega}},\qquad \int_{T_2+t_2\theta}^{T_1+t_1\theta}\frac{d\omega}{\sqrt{\Omega}},\qquad \int_{T_2+t_2\theta}^{S_2+s_2\theta}\frac{d\omega}{\sqrt{\Omega}},$$

et par conséquent l'intégrale double demandée (40), dans laquelle on devra prendre le signe —, l'hypothèse étant empruntée aux cas I ou III (page 37), aura définitivement pour expression, en tenant compte cette fois des limites, dans la dite hypothèse correspondant à la figure 3bis :

$$(51)\qquad \left\{\begin{aligned} \text{I}^{(\varpi)} = \frac{-1}{4}\Bigg[&\int_{s_1+t_1-f}^{s_1+t_2-f}\left(\int_{S_1+s_1\theta}^{T_1+t_1\theta}\frac{d\omega}{\sqrt{\Omega}}\right)\frac{d\theta}{\sqrt{\varpi+\theta}} \\ &+\int_{s_1+t_2-f}^{s_2+t_1-f}\left(\int_{T_2+t_2\theta}^{T_1+t_1\theta}\frac{d\omega}{\sqrt{\Omega}}\right)\frac{d\theta}{\sqrt{\varpi+\theta}}+\int_{s_2+t_1-f}^{s_2+t_2-f}\left(\int_{T_2+t_2\theta}^{S_2+s_2\theta}\frac{d\omega}{\sqrt{\Omega}}\right)\frac{d\theta}{\sqrt{\varpi+\theta}}\Bigg]. \end{aligned}\right.$$

Il sera avantageux, comme on le reconnaîtra dans la suite de ce Chapitre, de substituer à cette expression ainsi composée de trois termes seulement, une autre expression composée de quatre termes que nous allons indiquer, parce que celle-là sera susceptible d'un mode de représentation synthétique qui la fixera très aisément dans la mémoire, avantage qui n'appartient pas à celle que nous venons d'obtenir.

Pour cela, rappelant que sur la normale à la bissectrice correspondant au paramètre θ, l'autre variable ω atteint son maximum au point de rencontre de cette droite avec ladite bissectrice, maximum dont la valeur est donc l'expression Θ (47), nous mettrons en conséquence les trois quadratures en ω (50) respectivement sous la forme des expressions

$$\left\{\begin{aligned}
\int_{S_1+s_1\theta}^{T_1+t_1\theta}\frac{d\omega}{\sqrt{\Omega}} &= \int_{S_1+s_1\theta}^{\Theta}\frac{d\omega}{\sqrt{\Omega}} - \int_{T_1+t_1\theta}^{\Theta}\frac{d\omega}{\sqrt{\Omega}},\\
\int_{T_2+t_2\theta}^{T_1+t_1\theta}\frac{d\omega}{\sqrt{\Omega}} &= \int_{T_2+t_2\theta}^{\Theta}\frac{d\omega}{\sqrt{\Omega}} - \int_{T_1+t_1\theta}^{\Theta}\frac{d\omega}{\sqrt{\Omega}},\\
\int_{T_2+t_2\theta}^{S_2+s_2\theta}\frac{d\omega}{\sqrt{\Omega}} &= \int_{T_2+t_2\theta}^{\Theta}\frac{d\omega}{\sqrt{\Omega}} - \int_{S_2+s_2\theta}^{\Theta}\frac{d\omega}{\sqrt{\Omega}},
\end{aligned}\right.$$

lesquelles étant alors remises dans celle (51) que nous venons d'obtenir pour $I^{(\varpi)}$, la transformera dans la suivante

$$\begin{aligned}
I^{(\varpi)} = -\frac{1}{4}\Bigg[&\int_{s_1+t_1-f}^{s_1+t_2-f}\left(\int_{S_1+s_1\theta}^{\Theta}\frac{d\omega}{\sqrt{\Omega}} - \int_{T_1+t_1\theta}^{\Theta}\frac{d\omega}{\sqrt{\Omega}}\right)\frac{d\theta}{\sqrt{\varpi+\theta}}\\
&+\int_{s_1+t_2-f}^{s_2+t_1-f}\left(\int_{T_2+t_2\theta}^{\Theta}\frac{d\omega}{\sqrt{\Omega}} - \int_{T_1+t_1\theta}^{\Theta}\frac{d\omega}{\sqrt{\Omega}}\right)\frac{d\theta}{\sqrt{\varpi+\theta}}\\
&+\int_{s_2+t_1-f}^{s_2+t_2-f}\left(\int_{T_2+t_2\theta}^{\Theta}\frac{d\omega}{\sqrt{\Omega}} - \int_{S_2+s_2\theta}^{\Theta}\frac{d\omega}{\sqrt{\Omega}}\right)\frac{d\theta}{\sqrt{\varpi+\theta}}\Bigg],
\end{aligned}$$

ou, ce qui est la même chose, en groupant différemment les six

intégrales doubles que nous venons d'écrire, à savoir, en rapprochant celles qui ont mêmes limites en ω,

$$I^{(\varpi)} = -\frac{1}{4}\Bigg[\int_{s_1+t_1-f}^{s_1+t_2\;f}\left(\int_{S_1+s_1\theta}^{\Theta}\frac{d\omega}{\sqrt{\Omega}}\right)\frac{d\theta}{\sqrt{\varpi+\theta}}$$

$$-\left\{\int_{s_1+t_1-f}^{s_1+t_2-f}\left(\int_{T_1+t_1\theta}^{\Theta}\frac{d\omega}{\sqrt{\Omega}}\right)\frac{d\theta}{\sqrt{\varpi+\theta}}+\int_{s_1+t_2-f}^{s_2+t_1-f}\left(\int_{T_1+t_1\theta}^{\Theta}\frac{d\omega}{\sqrt{\Omega}}\right)\frac{d\theta}{\sqrt{\varpi+\theta}}\right\}$$

$$+\left\{\int_{s_1+t_2-f}^{s_2+t_1-f}\left(\int_{T_2+t_2\theta}^{\Theta}\frac{d\omega}{\sqrt{\Omega}}\right)\frac{d\theta}{\sqrt{\varpi+\theta}}+\int_{s_2+t_1-f}^{s_2+t_2-f}\left(\int_{T_2+t_2\theta}^{\Theta}\frac{d\omega}{\sqrt{\Omega}}\right)\frac{d\theta}{\sqrt{\varpi+\theta}}\right\}$$

$$-\int_{s_2+t_1-f}^{s_2+t_2-f}\left(\int_{s_2+s_2\theta}^{\Theta}\frac{d\omega}{\sqrt{\Omega}}\right)\frac{d\theta}{\sqrt{\varpi+\theta}}\Bigg],$$

c'est-à-dire définitivement pour $I^{(\varpi)}$ la nouvelle expression

$$(52)\quad \begin{cases} I^{(\varpi)} = -\frac{1}{4}\Bigg[\int_{s_1+t_1-f}^{s_1+t_2\;f}\left(\int_{S_1+s_1\theta}^{\Theta}\frac{d\omega}{\sqrt{\Omega}}\right)\frac{d\theta}{\sqrt{\varpi+\theta}}-\int_{s_1+t_1-f}^{s_2+t_1-f}\left(\int_{T_1+t_1\theta}^{\Theta}\frac{d\omega}{\sqrt{\Omega}}\right)\frac{d\theta}{\sqrt{\varpi+\theta}} \\ \quad + \int_{s_2+t_1-f}^{s_2+t_2-f}\left(\int_{T_2+t_2\theta}^{\Theta}\frac{d\omega}{\sqrt{\Omega}}\right)\frac{d\theta}{\sqrt{\varpi+\theta}}-\int_{s_2+t_1-f}^{s_2+t_2-f}\left(\int_{S_2+s_2\theta}^{\Theta}\frac{d\omega}{\sqrt{\Omega}}\right)\frac{d\theta}{\sqrt{\varpi+\theta}}\Bigg], \end{cases}$$

laquelle devient alors susceptible d'un mode d'écriture condensée qui la rend très facile à retenir, en ayant recours aux considérations suivantes.

Convenons de nouveau de désigner indifféremment l'une des deux variables s ou t par ε et l'autre par η et, de plus, étendons à ce symbole ε ainsi compris le même mode de notation déjà adopté pour les symboles p, q, r, s, et t, lors des définitions (9bis) et (29), c'est-à-dire faisons de nouveau, par analogie avec lesdites définitions,

$$(53)\qquad E = (l^2 - \varepsilon)(n^2 + \varepsilon) = g^2 + f\varepsilon - \varepsilon^2;$$

enfin, cela étant admis, représentons, pour abréger les écritures, par le symbole (ε) l'intégrale double

$$(54)\qquad \left\{\begin{aligned}(\varepsilon) &= -\frac{1}{4}\int_{\varepsilon+\eta_1-f}^{\varepsilon+\eta_2-f}\left(\int_{E+\varepsilon\theta}^{\Theta}\frac{d\omega}{\sqrt{\Omega}}\right)\frac{d\theta}{\sqrt{\varpi+\theta}}\\ &= \frac{1}{4}\int_{\varepsilon+\eta_1-f}^{\varepsilon+\eta_2-f}\left(\int_{\Theta}^{E+\varepsilon\theta}\frac{d\omega}{\sqrt{\Omega}}\right)\frac{d\theta}{\sqrt{\varpi+\theta}};\end{aligned}\right.$$

il est visible alors qu'avec ces notations l'expression (52), à laquelle nous venons d'arriver, s'écrira sous la forme abréviative

$$(55)\qquad I^{(\varpi)} = (s_1) - (t_1) + (t_2) - (s_2),$$

dont les signes des différents termes sont exactement, comme on le voit, ceux des termes correspondant aux mêmes symboles de l'inégalité de droite (48) : d'où il suit immédiatement que la formule en question pourra être écrite sous la forme condensée

$$(56)\qquad I^{(\varpi)} = \sum \pm (\varepsilon) = \sum_{\varepsilon} \pm \frac{1}{4}\int_{\varepsilon+\eta_1-f}^{\varepsilon+\eta_2-f}\left(\int_{\Theta}^{E+\varepsilon\theta}\frac{d\omega}{\sqrt{\Omega}}\right)\frac{d\theta}{\sqrt{\varpi+\theta}},$$

en convenant de prendre successivement pour ε chacune des quatre limites données s_1, s_2, t_1, t_2 qui figurent dans l'inégalité de droite (48), avec la condition, quant au double signe, d'adopter à chaque fois devant l'intégrale double le signe qui affecte, dans la seconde forme de la susdite inégalité, celle de ces quatre quantités qui sera représentée par ε.

En se plaçant ensuite dans l'hypothèse contraire à celle sur laquelle repose le calcul qui précède, c'est-à-dire celle-ci

$$(57)\qquad s_2 - s_1 < t_2 - t_1, \qquad \text{ou} \qquad s_1 - s_2 - t_1 + t_2 > 0,$$

hypothèse à laquelle correspond la figure 2bis ci-dessus (page 38), puis, supposant d'autre part, dans l'un et l'autre cas, le rectangle d'intégration situé par rapport à la bissectrice des axes, tantôt d'un côté, tantôt de l'autre côté de cette droite, l'on s'assure

aisément que les mêmes raisonnements conduiront toujours, pour l'intégrale double en question $I^{(\varpi)}$, à la même expression (52) ou (56) que nous venons d'obtenir.

Mais si l'on veut, sinon éviter complètement cette discussion un peu fastidieuse par sa monotonie et sa longueur, du moins la réduire à quelques mots seulement, au lieu de déduire la formule en question (52), par le moyen de transformations analytiques de la formule précédente (51), dont la démonstration reposait en beaucoup d'endroits sur la disposition particulière de la figure représentative de l'hypothèse envisagée, il sera préférable, pour l'objet que nous venons de dire, d'y arriver directement par des considérations géométriques qui auront l'avantage de ne dépendre qu'en un seul point, très facile à apercevoir, des particularités de cette figure, c'est-à-dire en fait de l'hypothèse elle-même.

Pour cela, rappelant d'abord que, par définition, s_1 et t_1 étant les limites inférieures de l'intégration en s ou t, et s_2 et t_2 les limites supérieures, on a dès lors par hypothèse $s_1 < s_2$ et $t_1 < t_2$, et convenant de marquer toujours sur la figure, comme ci-dessus, des quatre lettres A, B, C, D les quatre sommets du rectangle qui ont respectivement pour coordonnées

$$(s_1, t_1), \qquad (s_2, t_1), \qquad (s_1, t_2), \qquad (s_2, t_2),$$

il n'y aura qu'à considérer le rectangle d'intégration proposé ABCD comme la différence des aires de deux pentagones, l'un saillant et l'autre rentrant, qui auraient d'une part trois côtés communs, savoir les deux normales extrêmes AI et DH déjà envisagées dans la démonstration précédente, et de même la base commune IH, empruntée à la bissectrice des axes, qui est la projection sur cette droite de la diagonale AD du rectangle; et d'autre part, pour les deux autres côtés, deux côtés adjacents de ce même rectangle situés soit au-dessus, soit au-dessous de cette même diagonale; puis, cela fait, qu'à évaluer les deux aires en question à l'aide des mêmes règles et procédés exposés plus haut et déjà employés dans la première démonstration.

En projetant donc encore les quatre sommets sur la bissec-

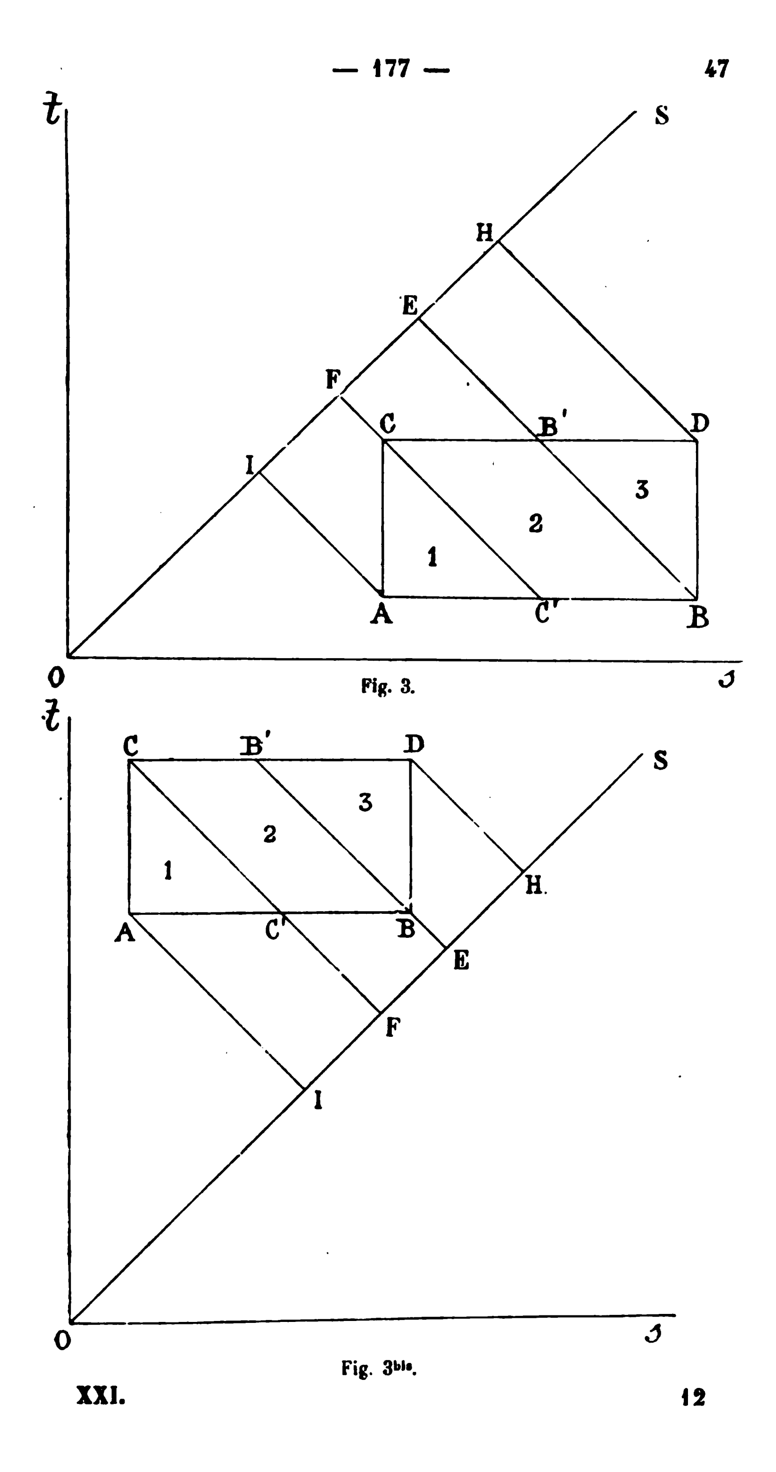


Fig. 3.

Fig. 3bis.

trice, et considérant de même l'aire de l'un de ces pentagones, soit IACDH, comme la somme des deux trapèzes IACF et FCDH, les règles formulées ci-dessus pour l'évaluation des limites relatives à chacune des deux intégrations en ω et θ (pp. 39-40) donneront alors manifestement, quel que soit l'ordre de succession des deux projections F et E, pour expression de l'aire de ce premier pentagone, la somme

$$(\mathrm{I})\qquad \int_{s_1+t_1-f}^{s_1+t_2-f}\left(\int_{S_1+s_1\theta}^{\Theta}\frac{d\omega}{\sqrt{\Omega}}\right)\frac{d\theta}{\sqrt{\varpi+\theta}}+\int_{s_1+t_2-f}^{s_2+t_2-f}\left(\int_{T_2+t_2\theta}^{\Theta}\frac{d\omega}{\sqrt{\Omega}}\right)\frac{d\omega}{\sqrt{\varpi+\theta}};$$

et de même, l'aire de l'autre pentagone IABDH, étant envisagée à son tour comme la somme des deux trapèzes IABE et EBDH, aura manifestement, d'après les mêmes règles, pour expression l'autre somme

$$(\mathrm{II})\qquad \int_{s_1+t_1-f}^{s_2+t_1-f}\left(\int_{T_1+t_1\theta}^{\Theta}\frac{d\omega}{\sqrt{\Omega}}\right)\frac{d\theta}{\sqrt{\varpi+\theta}}+\int_{s_2+t_1-f}^{s_2+t_2-f}\left(\int_{S_2+s_2\theta}^{\Theta}\frac{d\omega}{\sqrt{\Omega}}\right)\frac{d\omega}{\sqrt{\varpi+\theta}}.$$

Cela étant établi, s'il s'agit d'abord de l'intégrale $I^{(p^2)}$ ou $I^{(r^2)}$, le rectangle d'intégration étant alors, comme nous l'avons vu (page 37), situé tout entier, par rapport à la bissectrice des axes du même côté que les t positifs, c'est-à-dire comme l'indique la figure 3bis (page 47), c'est alors le premier pentagone envisagé tout à l'heure IACDH qui est saillant et le second IABDH qui est rentrant. L'aire du rectangle d'intégration s'obtiendra donc, dans ce cas, en retranchant la somme (II) ci-dessus de la somme (I), et comme par ailleurs, dans la même hypothèse, c'est le signe — qu'il faut prendre, avons-nous dit (page 37), dans la formule (40), l'on voit ainsi que l'on retrouvera bien, pour l'expression de la quantité $I^{(\varpi)}$ dans ce cas, précisément l'expression déjà obtenue (52).

Supposons, en second lieu, qu'il s'agisse de l'intégrale $I^{(q^2)}$, le rectangle d'intégration étant alors situé, par rapport à la bissectrice, du même côté que les t négatifs, ce sera au contraire, ainsi

que le montre la figure 3 (page 47), le second pentagone IABDH qui sera saillant, et l'autre qui sera rentrant. Il faudra donc, dans ce cas, pour avoir l'aire du rectangle d'intégration, retrancher la somme (I) de la somme (II); mais comme dans la même circonstance l'on devra, cette fois, prendre le signe + dans la formule (40), l'on voit que l'on retombera bien encore, pour la quantité $I^{(\varpi)}$ dans ce second cas, exactement sur la même expression que tout à l'heure (32); et par conséquent la généralité, tant de cette formule (32) que de sa représentation condensée (36), se trouve ainsi établie aussi rigoureusement qu'on le peut désirer.

Passons donc maintenant à l'accomplissement effectif des diverses quadratures indiquées par cette formule.

Calcul effectif des deux dernières quadratures. — A. *Expression de la quadrature indéfinie relative à chacune des deux intégrations successives.* — Le problème d'Analyse est désormais ramené par la formule précédente à deux quadratures successives, qui s'effectueront complètement l'une et l'autre avec la plus grande facilité.

En effet, quant à la première tout d'abord, à savoir celle en ω, si l'on écrit, en tenant compte de la définition (39) de Ω,

$$(38)\qquad \frac{d\omega}{\sqrt{\Omega}} = \frac{d\omega}{\sqrt{\omega - l^2\theta}\sqrt{\omega + n^2\theta}} = 2\,\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{\omega - l^2\theta}} + \dfrac{1}{2\sqrt{\omega + n^2\theta}}}{\sqrt{\omega - l^2\theta} + \sqrt{\omega + n^2\theta}}\,d\omega,$$

il s'ensuivra immédiatement, pour l'intégrale indéfinie que nous conviendrons de désigner, abstraction faite de la constante arbitraire, par le symbole $\mathcal{F}(\omega, \theta)$, l'expression

$$(39)\qquad \mathcal{F}(\omega, \theta) = \int \frac{d\omega}{\sqrt{\Omega}} = 2 \log\left[\sqrt{\omega - l^2\theta} + \sqrt{\omega + n^2\theta}\right],$$

de laquelle on conclura ensuite, pour la valeur de la quadrature en ω qui figure dans la formule proposée (36),

$$(60) \qquad \int_{\Theta}^{E+\varepsilon\theta} \frac{d\omega}{\sqrt{\Omega}} = \mathcal{S}(E + \varepsilon\theta, \theta) - \mathcal{S}(\Theta, \theta),$$

l'expression du premier terme $\mathcal{S}(E + \varepsilon\theta, \theta)$ étant la suivante

$$(61) \quad \mathcal{S}(E + \varepsilon\theta, \theta) = 2 \log \left[\sqrt{(E + \varepsilon\theta) - l^2\theta} + \sqrt{(E + \varepsilon\theta) + n^2\theta}\right] = 2 \log F(\theta),$$

en représentant désormais par la notation abrégée $F(\theta)$ la fonction

$$(62) \qquad F(\theta) = \sqrt{E - (l^2 - \varepsilon)\theta} + \sqrt{E + (n^2 + \varepsilon)\theta}.$$

Puis, cela fait, la dernière intégration en θ donnera, en faisant provisoirement abstraction des limites, par suite des égalités précédentes (60) et (61),

$$(63) \int \left(\int_{\Theta}^{E+\varepsilon\theta} \frac{d\omega}{\sqrt{\Omega}}\right) \frac{d\theta}{\sqrt{\varpi + \theta}} = 2 \int \log F(\theta) \frac{d\theta}{\sqrt{\varpi + \theta}} - \int \mathcal{S}(\Theta, \theta) \frac{d\theta}{\sqrt{\varpi + \theta}}.$$

Nous pourrions sans peine, en partant de la valeur (47) de la quantité Θ, calculer l'expression explicite du second des deux termes qui constituent le second membre de cette dernière égalité (*), mais nous ne le ferons pas ici, parce que cette expression

---

(*) En effet, la valeur précitée (47) de la quantité Θ donnant séparément, en tenant compte des définitions (14),

$$\begin{cases} \Theta - l^2\theta = \left[g^2 + \frac{1}{4}(\theta + f)^2\right] - l^2\theta = \frac{1}{4}\left[(\theta^2 + 2f\theta + f^2) + 4g^2 - 4l^2\theta\right] \\ \quad = \frac{1}{4}\left[\theta^2 + 2(l^2 - n^2)\theta - 4l^2\theta + \{(l^2 - n^2)^2 + 4l^2n^2\}\right] \\ \quad = \frac{1}{4}\left[\theta^2 - 2(l^2 + n^2)\theta + (l^2 + n^2)^2\right] = \frac{1}{4}(\theta^2 + 2m^2\theta + m^4), \\ \Theta + n^2\theta = \left[g^2 + \frac{1}{4}(\theta + f)^2\right] + n^2\theta = \frac{1}{4}\left[(\theta^2 + 2f\theta + f^2) + 4g^2 + 4n^2\theta\right] \\ \quad = \frac{1}{4}\left[\theta^2 + 2(l^2 - n^2)\theta + 4n^2\theta + \{(l^2 - n^2)^2 + 4l^2n^2\}\right] \\ \quad = \frac{1}{4}\left[\theta^2 + 2(l^2 + n^2)\theta + (l^2 + n^2)^2\right] = \frac{1}{4}(\theta^2 - 2m^2\theta + m^4), \end{cases}$$

est en réalité, comme on le verra plus loin, sans aucun intérêt pour l'objet que nous poursuivons, à savoir la valeur de la quantité $I^{(\varpi)}$ représentée par l'expression (56).

Occupons-nous donc simplement du premier terme, relativement auquel le procédé de l'intégration par parties fournira de suite l'égalité

$$(64)\quad \int \log F(\theta)\frac{d\theta}{\sqrt{\varpi+\theta}} = 2\log F(\theta).\sqrt{\varpi+\theta} - 2\int\sqrt{\varpi+\theta}\,\frac{F'(\theta)}{F(\theta)}d\theta + \text{const.},$$

---

l'on conclura respectivement de ces deux expressions

$$(\alpha)\qquad \sqrt{\Theta - l^2\theta} = \pm\tfrac{1}{2}(\theta + m^2),\qquad \sqrt{\Theta + n^2\theta} = \pm\tfrac{1}{2}(\theta - m^2),$$

égalités dans lesquelles il faudra prendre, en ayant égard à la signification de la somme $s+t$ corrélative de celle de ϖ, un signe tel que les valeurs des deux radicaux en question soient de même signe, afin que leur produit qui représente, en vertu des équations (38bis) et (39), pour l'hypothèse $s=t$ la valeur du produit $\sqrt{ST}$, c'est-à-dire celle de l'un des trois produits deux à deux des trois radicaux $\sqrt{P}$, $\sqrt{Q}$, $\sqrt{R}$, soit positive, ainsi que lesdits radicaux le sont chacun par définition.

Cela posé, la définition (59) de $\mathcal{F}(\omega, \theta)$ donnant par le moyen des valeurs (α) que nous venons de calculer,

$$\mathcal{F}(\Theta, \theta) = 2\log\left(\sqrt{\Theta - l^2\theta} + \sqrt{\Theta + n^2\theta}\right) = 2\log[\pm\tfrac{1}{2}(\theta + m^2) \pm \tfrac{1}{2}(\theta - m^2)],$$

l'on obtiendra donc ainsi

$$\mathcal{F}(\Theta, \theta) = 2\log\theta,\qquad \text{ou bien}\qquad \mathcal{F}(\Theta, \theta) = 2\log m^2,$$

suivant que l'on aura dû prendre, selon la signification particulière admise pour ϖ, d'après ce que nous avons dit tout à l'heure, le même signe ou bien des signes contraires dans les égalités ci-dessus (α). Et dès lors, l'on trouverait immédiatement, dans la seconde hypothèse

$$(6)\left\{\begin{aligned}\int\mathcal{F}(\Theta, \theta)\frac{d\theta}{\sqrt{\varpi+\theta}} &= \int 2\log m^2\cdot\frac{d\theta}{\sqrt{\varpi+\theta}} = 4\log m^2\int\frac{d\theta}{2\sqrt{\varpi+\theta}}\\ &= 4\log m^2\sqrt{\varpi+\theta} + \text{const.},\end{aligned}\right.$$

et dans la première, l'intégration par parties donnerait très aisément, en premier lieu,

$$(\gamma)\quad \int\mathcal{F}(\Theta, \theta)\frac{d\theta}{\sqrt{\varpi+\theta}} = \int 2\log\theta\cdot\frac{d\theta}{\sqrt{\varpi+\theta}} = 2\log\theta\cdot 2\sqrt{\varpi+\theta} - 4\int\sqrt{\varpi+\theta}\,\frac{d\theta}{\theta},$$

dans laquelle l'intégrale qui figure au second membre se calculera sans peine ainsi qu'il suit.

Introduisant pour un instant les quantités

$$(65)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{L} &= \mathrm{E} - (l^2 - \varepsilon)\,\theta = (l^2 - \varepsilon)(n^2 + \varepsilon - \theta),\\ \mathfrak{Q} &= \mathrm{E} + (n^2 + \varepsilon)\,\theta = (n^2 + \varepsilon)(l^2 - \varepsilon + \theta), \end{aligned}$$

qui donnent, $\mathfrak{L}'$ et $\mathfrak{Q}'$ désignant leurs dérivées en θ,

---

puis en second lieu, à la constante près,

$$(\delta)\qquad \begin{aligned} \int \frac{\sqrt{\varpi+\theta}}{\theta}\,d\theta &= \int \frac{(\varpi+\theta)\,d\theta}{\theta\sqrt{\varpi+\theta}} = \int \frac{d\theta}{\sqrt{\varpi+\theta}} + \int \frac{\varpi\,d\theta}{\theta\sqrt{\varpi+\theta}}\\ &= 2\sqrt{\varpi+\theta} + \sqrt{\varpi}\int \frac{\sqrt{\varpi}\,d\theta}{\theta\sqrt{\theta}\sqrt{\frac{\varpi}{\theta}+1}}\\ &= 2\sqrt{\varpi+\theta} - 2\sqrt{\varpi}\int \frac{-\frac{1}{2}\sqrt{\varpi}\,\theta^{-\frac{3}{2}}d\theta}{\sqrt{1+\left(\sqrt{\varpi}\,\theta^{-\frac{1}{2}}\right)^2}}\\ &= 2\sqrt{\varpi+\theta} - 2\sqrt{\varpi}\log\left[\sqrt{\varpi}\,\theta^{-\frac{1}{2}} + \sqrt{1+\left(\sqrt{\varpi}\,\theta^{-\frac{1}{2}}\right)^2}\right]\\ &= 2\sqrt{\varpi+\theta} - 2\sqrt{\varpi}\log\left(\frac{\sqrt{\varpi}}{\sqrt{\theta}} + \sqrt{1+\frac{\varpi}{\theta}}\right)\\ &= 2\sqrt{\varpi+\theta} - 2\sqrt{\varpi}\log\frac{\sqrt{\varpi}+\sqrt{\theta+\varpi}}{\sqrt{\theta}}\\ &= 2\sqrt{\varpi+\theta} + 2\sqrt{\varpi}\log\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\varpi}+\sqrt{\varpi+\theta}} + \text{const.}, \end{aligned}$$

et par conséquent définitivement, en reportant cette dernière valeur au dernier terme de l'égalité précédente (γ) :

$$(\varepsilon)\qquad \int \mathcal{F}(\Theta,\theta)\frac{d\theta}{\sqrt{\varpi+\theta}} = 4\sqrt{\varpi+\theta}\,(\log\theta - 2) - 8\sqrt{\varpi}\log\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\varpi}+\sqrt{\varpi+\theta}} + \text{const.}$$

Mais on reconnaîtra un peu plus loin que ces deux expressions (δ) et (ε), ainsi trouvées suivant le cas, n'interviennent pas en fait dans le résultat définitif relatif à la question proposée.

$$
(66)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\mathfrak{L}' = -(l^2-\varepsilon), \qquad\qquad \mathfrak{Q}' = n^2+\varepsilon,\\
&\mathfrak{L}'-\mathfrak{Q}' = -(l^2-\varepsilon)-(n^2+\varepsilon) = -(l^2+n^2) = m^2,\\
&\mathfrak{L}-\mathfrak{Q} = [-(l^2-\varepsilon)-(n^2+\varepsilon)]\,\theta = -(l^2+n^2)\,\theta = m^2\theta,\\
&\mathfrak{L}\mathfrak{Q} = (l^2-\varepsilon)(n^2+\varepsilon-\theta).(n^2+\varepsilon)(l^2-\varepsilon+\theta) = \mathrm{E}\,(l^2-\varepsilon+\theta)(n^2+\varepsilon-\theta),\\
&\mathfrak{L}\mathfrak{Q}'-\mathfrak{Q}\mathfrak{L}' = (l^2-\varepsilon)(n^2+\varepsilon)[(n^2+\varepsilon-\theta)+(l^2-\varepsilon+\theta)] = \mathrm{E}(n^2+l^2) = -m^2\mathrm{E},
\end{aligned}\right.
$$

la définition ci-dessus (62) de F(θ) donnera successivement

$$
(67)\qquad \mathrm{F}(\theta) = \sqrt{\mathfrak{L}}+\sqrt{\mathfrak{Q}}, \qquad\qquad \mathrm{F}'(\theta) = \frac{\mathfrak{L}'}{2\sqrt{\mathfrak{L}}}+\frac{\mathfrak{Q}'}{2\sqrt{\mathfrak{Q}}},
$$

$$
(68)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{F}'(\theta)}{\mathrm{F}(\theta)} &= \frac{\dfrac{\mathfrak{L}'}{2\sqrt{\mathfrak{L}}}+\dfrac{\mathfrak{Q}'}{2\sqrt{\mathfrak{Q}}}}{\sqrt{\mathfrak{L}}+\sqrt{\mathfrak{Q}}} = \frac{1}{2}\,\frac{\left(\dfrac{\mathfrak{L}'}{\sqrt{\mathfrak{L}}}+\dfrac{\mathfrak{Q}'}{\sqrt{\mathfrak{Q}}}\right)(\sqrt{\mathfrak{L}}-\sqrt{\mathfrak{Q}})}{(\sqrt{\mathfrak{L}}+\sqrt{\mathfrak{Q}})(\sqrt{\mathfrak{L}}-\sqrt{\mathfrak{Q}})}\\
&= \frac{1}{2(\mathfrak{L}-\mathfrak{Q})}\left[\mathfrak{L}'-\mathfrak{Q}'+\frac{\mathfrak{Q}'\sqrt{\mathfrak{L}}}{\sqrt{\mathfrak{Q}}}-\frac{\mathfrak{L}'\sqrt{\mathfrak{Q}}}{\sqrt{\mathfrak{L}}}\right]\\
&= \frac{1}{2(\mathfrak{L}-\mathfrak{Q})}\left[\mathfrak{L}'-\mathfrak{Q}'+\frac{\mathfrak{L}\mathfrak{Q}'-\mathfrak{Q}\mathfrak{L}'}{\sqrt{\mathfrak{L}\mathfrak{Q}}}\right],
\end{aligned}\right.
$$

c'est-à-dire, eu égard aux valeurs précédentes (66), l'expression

$$
(68^{\text{bis}})\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{F}'(\theta)}{\mathrm{F}(\theta)} &= \frac{1}{2m^2\theta}\left[m^2+\frac{-m^2\mathrm{E}}{\sqrt{\mathrm{E}(l^2-\varepsilon+\theta\;(n^2+\varepsilon-\theta)}}\right]\\
&= \frac{1}{2\theta}\left[1-\frac{\sqrt{\mathrm{E}}}{\sqrt{l^2-\varepsilon+\theta}\sqrt{n^2+\varepsilon-\theta}}\right],
\end{aligned}\right.
$$

d'où l'on conclura

$$
(69)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\int\sqrt{\varpi+\theta}\,\frac{\mathrm{F}'(\theta)}{\mathrm{F}(\theta)}\,d\theta = \int\frac{\sqrt{\varpi+\theta}}{2\theta}\left[1-\frac{\sqrt{\mathrm{E}}}{\sqrt{l^2-\varepsilon+\theta}\sqrt{n^2+\varepsilon-\theta}}\right]d\theta\\
&= \frac{1}{2}\int\frac{\sqrt{\varpi+\theta}}{\theta}\,d\theta-\frac{\sqrt{\mathrm{E}}}{2}\int\frac{\sqrt{\varpi+\theta}\,.\,d\theta}{\theta\sqrt{l^2-\varepsilon+\theta}\sqrt{n^2+\varepsilon-\theta}}+\text{const.}
\end{aligned}\right.
$$

Or, de ces deux dernières intégrales, la première s'obtiendra très aisément à l'aide des seuls procédés classiques (*), et quant à la seconde, son expression explicite nous sera fournie immédiatement en général par la formule de quadrature suivante, que nous démontrons dans notre *Théorie Nouvelle du Système Orthogonal triplement Isotherme* (Tome II, Note V, pp. 230-231),

$$(70)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{-a^2}^{\rho} \frac{\rho + a^2}{\rho - r}\frac{d\rho}{\sqrt{f(\rho)}} = -2\frac{a^2+r}{\sqrt{f(r)}}\int_0^{\varphi}\frac{k^2 \operatorname{sn} h \operatorname{cn} h \operatorname{dn} h \,.\, \operatorname{sn}^2\varphi}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 h \operatorname{sn}^2\varphi}\,d\varphi \\ \displaystyle\qquad = -2\sqrt{\frac{a^2+r}{(b^2+r)(c^2+r)}}\,\Pi(\varphi, h, k), \end{cases}$$

en convenant de faire à la fois,

$$(71)\quad \begin{cases} f(\rho) = (a^2+\rho)(b^2+\rho)(c^2+\rho), \qquad k^2 = \dfrac{a^2-b^2}{a^2-c^2}, \\ \operatorname{sn}^2(\varphi, k) = \dfrac{a^2+\rho}{a^2-b^2}, \quad \text{ou} \quad \varphi = \operatorname{Arg\,sn}\left(\sqrt{\dfrac{a^2+\rho}{a^2-b^2}}, \sqrt{\dfrac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}\right), \\ \operatorname{sn}^2(h, k) = \dfrac{a^2-c^2}{a^2+r}, \quad \text{ou} \quad h = \operatorname{Arg\,sn}\left(\sqrt{\dfrac{a^2-c^2}{a^2+r}}, \sqrt{\dfrac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}\right), \end{cases}$$

laquelle se réduit, en y faisant $r = 0$, et écrivant α, β, γ à la place de a, b, c, à celle-ci

$$\int_{-\alpha^2}^{\rho} \frac{\sqrt{\alpha^2+\rho}\,.\,d\rho}{\rho\sqrt{\beta^2+\rho}\sqrt{\gamma^2+\rho}} = -\frac{2\alpha}{\beta\gamma}\,\Pi(\varphi, h, k),$$

dans laquelle les symboles φ, h, et k désignent alors les quantités définies par les égalités suivantes

$$\operatorname{sn}^2(\varphi, k) = \frac{\alpha^2+\rho}{\alpha^2-\beta^2}, \qquad \operatorname{sn}^2(h, k) = \frac{\alpha^2-\gamma^2}{\alpha^2}, \qquad k^2 = \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2-\gamma^2};$$

(*) Voir la Note de la page 50 *in fine*, équations (δ).

car il suffira dès lors, évidemment, en prenant

$$\sqrt{n^2+\varepsilon-\theta}=\sqrt{-[-(n^2+\varepsilon)+\theta]}=i\sqrt{-(n^2+\varepsilon)+\theta},$$

de récrire l'intégrale en question ainsi qu'il suit

$$(72)\qquad \int\frac{\sqrt{\varpi+\theta}.d\theta}{\theta\sqrt{l^2-\varepsilon+\theta}\sqrt{n^2+\varepsilon-\theta}}=\frac{1}{i}\int\frac{\sqrt{\varpi+\theta}.d\theta}{\theta\sqrt{l^2-\varepsilon+\theta}\sqrt{-(n^2+\varepsilon)+\theta}},$$

et de supposer ensuite dans les formules précédentes

$$\alpha^2=\varpi,\qquad \beta^2=l^2-\varepsilon,\qquad \gamma^2=-(n^2+\varepsilon),\qquad \rho=\theta,$$

pour qu'elles donnent, en ayant égard à la définition (53) du symbole E,

$$(73)\qquad \left\{\begin{aligned}&\int_{-\varpi}^{\theta}\frac{\sqrt{\varpi+\theta}.d\theta}{\theta\sqrt{l^2-\varepsilon+\theta}\sqrt{n^2+\varepsilon-\theta}}=\frac{1}{i}\,\frac{-2\sqrt{\varpi}}{\sqrt{l^2-\varepsilon}\sqrt{-(n^2+\varepsilon)}}\,\Pi(\varphi,h,k)\\&=\frac{1}{i}\,\frac{-2\sqrt{\varpi}}{\sqrt{l^2-\varepsilon}.i\sqrt{n^2+\varepsilon}}\,\Pi(\varphi,h,k)=\frac{2\sqrt{\varpi}}{\sqrt{E}}\,\Pi(\varphi,h,k),\end{aligned}\right.$$

en faisant cette fois :

$$(74)\qquad \left\{\begin{aligned}&k^2=\frac{\varpi-(l^2-\varepsilon)}{\varpi-[-(n^2+\varepsilon)]},\qquad \text{ou}\qquad k=\sqrt{\frac{\varpi+\varepsilon-l^2}{\varpi+\varepsilon+n^2}},\\&\mathrm{sn}^2(\varphi,k)=\frac{\varpi+\theta}{\varpi+\varepsilon-l^2},\quad \text{ou}\quad \varphi=\mathrm{Arg\,sn}\left(\sqrt{\frac{\varpi+\theta}{\varpi+\varepsilon-l^2}},\sqrt{\frac{\varpi+\varepsilon-l^2}{\varpi+\varepsilon+n^2}}\right),\\&\mathrm{sn}^2(h,k)=\frac{\varpi+\varepsilon+n^2}{\varpi},\quad \text{ou}\quad h=\mathrm{Arg\,sn}\left(\sqrt{1+\frac{\varepsilon+n^2}{\varpi}},\sqrt{\frac{\varpi+\varepsilon-l^2}{\varpi+\varepsilon+n^2}}\right).\end{aligned}\right.$$

Il existe toutefois un Cas d'exception qu'il importe de ne pas omettre, d'autant qu'il se présentera précisément dans l'importante vérification que nous nous proposons d'effectuer relativement aux résultats auxquels nous allons arriver.

C'est celui dans lequel on aura $\varpi = 0$, et pour lequel l'intégrale en question (72) se réduisant dès lors à l'intégrale elliptique de première espèce

$$(75)\qquad \int \frac{\sqrt{\theta}.d\theta}{\theta\sqrt{l^2-\varepsilon+\theta}\sqrt{n^2+\varepsilon-\theta}} = \frac{1}{i}\int \frac{d\theta}{\sqrt{\theta(l^2-\varepsilon+\theta)}\sqrt{-(n^2+\varepsilon)+\theta}},$$

s'exprimera en conséquence, d'après un calcul beaucoup plus simple, développé à plusieurs reprises dans l'Ouvrage précité (Tome Ier, pp. 115-116, et p. 209, *en Note*), par l'autre formule

$$(76)\qquad \left\{\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{\theta}.d\theta}{\theta\sqrt{l^2-\varepsilon+\theta}\sqrt{n^2+\varepsilon-\theta}} &= \frac{1}{i}\,\frac{2}{\sqrt{n^2+\varepsilon}}\int \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \\ &= \frac{-2i}{\sqrt{n^2+\varepsilon}}\,\varphi_0 + \text{const}, \end{aligned}\right.$$

en faisant cette fois, de même que tout à l'heure,

$$(77)\qquad \left\{\begin{aligned} &k^2 = \frac{-(l^2-\varepsilon)}{-[-(n^2+\varepsilon)]}, \qquad \text{ou} \qquad k = \sqrt{\frac{\varepsilon-l^2}{\varepsilon+n^2}}, \\ &t = \text{sn}(\varphi_0, k) = \sqrt{\frac{\theta}{\varepsilon-l^2}}, \qquad \text{ou} \qquad \varphi_0 = \text{Arg sn}\left(\sqrt{\frac{\theta}{\varepsilon-l^2}},\ \sqrt{\frac{\varepsilon-l^2}{\varepsilon+n^2}}\right). \end{aligned}\right.$$

Mais il importe d'observer dès maintenant, que d'après les définitions (7) des variables p, q, r, la première seule pouvant s'annuler dans l'étendue des limites assignées *a priori* à la variation des coordonnées u, v, w, et p_1 étant par définition la plus petite des deux limites de p, c'est donc exclusivement à la signification $\varpi = p_1^2$ que pourra se rapporter l'hypothèse de $\varpi = 0$, que nous venons de considérer.

En reportant donc, en premier lieu, la première de ces expressions (73) dans le dernier membre de l'égalité antérieure (69), nous obtiendrons, pour le Cas général, tout d'abord la

valeur

$$\int \sqrt{\varpi+\theta}\,\frac{F'(\theta)}{F(\theta)}\,d\theta = \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{\varpi+\theta}}{\theta}\,d\theta - \sqrt{\varpi}\,.\,\Pi(\varphi, h, k) + \text{const},$$

laquelle expression, étant remise à son tour dans la formule établie précédemment (64), la transformera définitivement, pour ce Cas, dans la suivante

$$(78)\quad \left\{\begin{aligned}\int \log F(\theta)\,\frac{d\theta}{\sqrt{\varpi+\theta}} &= 2\log F(\theta)\,.\sqrt{\varpi+\theta} - \int\frac{\sqrt{\varpi+\theta}}{\theta}\,d\theta\\ &\quad + 2\sqrt{\varpi}\,.\,\Pi(\varphi, h, k) + \text{const.};\end{aligned}\right.$$

et pour le Cas particulier relatif à l'hypothèse $\varpi = p_1^2 = 0$, la substitution de l'expression plus simple (76) conduira de même successivement aux formules correspondantes, savoir : d'abord, par le moyen de l'expression (69), en ayant égard de nouveau à la définition (53) de E,

$$(79)\quad \left\{\begin{aligned}\int \sqrt{\theta}\,\frac{F'(\theta)}{F(\theta)}\,d\theta &= \frac{1}{2}\int\frac{d\theta}{\sqrt{\theta}} - \frac{\sqrt{E}}{2}\,\frac{-2i}{\sqrt{n^2+\varepsilon}}\,\varphi_0 + \text{const.}\\ &= \sqrt{\theta} + i\sqrt{l^2-\varepsilon}\,.\,\varphi_0 + \text{const.},\\ &= \sqrt{\theta} + i\,.\,i\sqrt{\varepsilon - l^2}\,.\,\varphi_0 + \text{const.}\\ &= \sqrt{\theta} - \sqrt{\varepsilon - l^2}\,.\,\varphi_0 + \text{const.},\end{aligned}\right.$$

puis de là définitivement, par le moyen de la formule (64) :

$$(80)\quad \left\{\begin{aligned}\int \log F(\theta)\,\frac{d\theta}{\sqrt{\theta}} &= 2\log F(\theta)\,.\sqrt{\theta}\\ &\quad - 2\sqrt{\theta} + 2\sqrt{\varepsilon - l^2}\,.\,\varphi_0 + \text{const.}\end{aligned}\right.$$

Ces formules de quadrature indéfinie (78) et (80) étant ainsi acquises, suivant le Cas, pour la moitié du premier terme de l'expression demandée (63), celle-ci deviendra, en y reportant à tour de rôle les dites valeurs, savoir : dans le Cas général,

$$(81)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int\left(\int_{\Theta}^{\varepsilon+\varepsilon\theta}\frac{d\omega}{\sqrt{\Omega}}\right)\frac{d\theta}{\sqrt{\varpi+\theta}} = 4\log F(\theta).\sqrt{\varpi+\theta} - 2\int\frac{\sqrt{\varpi+\theta}}{\theta}d\theta \\ &\quad + 4\sqrt{\varpi}.\Pi(\varphi, h, k) + \text{const.} - \int\mathfrak{F}(\Theta,\theta)\frac{d\theta}{\sqrt{\varpi+\theta}}, \end{aligned}\right.$$

et dans le Cas particulier $\varpi = p_1^2 = 0$,

$$(82)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int\left(\int_{\Theta}^{\varepsilon+\varepsilon\theta}\frac{d\omega}{\sqrt{\Omega}}\right)\frac{d\theta}{\sqrt{\varpi+\theta}} = 4\log F(\theta).\sqrt{\theta} - 4\sqrt{\theta} \\ &\quad + 4\sqrt{\varepsilon - l^2}.\varphi_0 + \text{const.} - \int\mathfrak{F}(\Theta,\theta)\frac{d\theta}{\sqrt{\varpi+\theta}}, \end{aligned}\right.$$

les quantités Θ, φ, h, k, et φ_0 étant définies par les équations (47), (74), et (77) ci-dessus; et il n'y aura plus dès lors qu'à introduire à tour de rôle à la place de θ, tant dans ces deux dernières formules que dans celles précitées (74) ou (77), les deux valeurs $\varepsilon + \eta_2 - f$ et $\varepsilon + \eta_1 - f$, puis à faire la différence des résultats, et enfin à diviser par 4, pour posséder l'expression définitive de chacune des quatre intégrales (ε) définies par l'égalité (54), et dont la somme doit composer l'expression de la quantité demandée $I^{(\varpi)}$.

B. ***Introduction des limites reconnues pour chaque variable dans les résultats qui précèdent, et nature analytique des différents termes qui composeront la solution.*** — Cette opération est déjà accomplie dans ce qui précède, en ce qui concerne la quadrature relative à ω, ainsi qu'il était d'ailleurs nécessaire au préalable avant de procéder à la quadrature en θ. Ce sont donc les limites de la variable θ seulement, savoir $\varepsilon + \eta_1 - f$ et $\varepsilon + \eta_2 - f$, qu'il nous reste à substituer dans les résultats précédents (81) ou (82), selon le Cas, en reconnaissant alors quelle sera la nature analytique des résultats définitifs qui ressortiront de cette opération.

Cette nature, ou catégorie analytique, est déterminée tout entière, ainsi qu'on l'apercevra sans peine dans un instant, par ce seul fait que nous allons tout d'abord mettre en évidence, à savoir que dans chacune desdites formules (81) et (82), l'ensemble des deux premiers et du dernier termes du second membre est une certaine fonction de θ et de ε qui se change en une fonction symétrique de ε et de η, lorsque l'on y remplace θ par $\varepsilon + \eta - f$.

Cette condition étant manifestement remplie *a priori* pour le second et le dernier terme de chacune de ces formules qui ne contiennent pas ε ni η, et de même aussi, pour la même raison, par le second facteur $\sqrt{\varpi + \theta}$ ou $\sqrt{\theta}$ du premier terme desdites formules, il suffira donc, pour établir ce fait, de le faire ressortir à l'égard du premier facteur log F (θ), c'est-à-dire simplement au regard de la fonction F (θ).

Or, ayant à la fois, d'après la définition (53) du symbole E,

$$\begin{cases} E - (l^2 - \varepsilon)\theta = (l^2 - \varepsilon)(n^2 + \varepsilon - \theta), \\ E + (n^2 + \varepsilon)\theta = (n^2 + \varepsilon)(l^2 - \varepsilon + \theta), \end{cases}$$

on en conclura donc, d'abord séparément en remplaçant θ par $\varepsilon + \eta - f$, et tenant compte de la définition (14) de la constante f,

$$\begin{cases} E - (l^2 - \varepsilon)(\varepsilon + \eta - f) = (l^2 - \varepsilon)\left[(n^2 + \varepsilon) - (\varepsilon + \eta - f)\right] = (l^2 - \varepsilon)(n^2 - \eta + f) \\ \qquad = (l^2 - \varepsilon)\left[n^2 - \eta + (l^2 - n^2)\right] = (l^2 - \varepsilon)(l^2 - \eta), \\ E + (n^2 + \varepsilon)(\varepsilon + \eta - f) = (n^2 + \varepsilon)\left[(l^2 - \varepsilon) + (\varepsilon + \eta - f)\right] = (n^2 + \varepsilon)(l^2 + \eta - f) \\ \qquad = (n^2 + \varepsilon)\left[l^2 + \eta - (l^2 - n^2)\right] = (n^2 + \varepsilon)(n^2 + \eta), \end{cases}$$

puis, de là, en ayant égard alors à la définition (62) de la fonction F (θ),

$$\begin{aligned} F(\varepsilon + \eta - f) &= \sqrt{E - (l^2 - \varepsilon)(\varepsilon + \eta - f)} + \sqrt{E + (n^2 + \varepsilon)(\varepsilon + \eta - f)} \\ &= \sqrt{(l^2 - \varepsilon)(l^2 - \eta)} + \sqrt{(n^2 + \varepsilon)(n^2 + \eta)}, \end{aligned}$$

ce qui démontre le fait annoncé tout à l'heure au sujet de la fonction $F(\theta)$. Et par conséquent les deux formules précitées (81) et (82) pourront être écrites, sous forme abrégée, ainsi qu'il suit

$$(83)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int \left(\int_{\theta}^{\varepsilon + \epsilon\theta} \frac{d\omega}{\sqrt{\Omega}} \right) \frac{d\theta}{\sqrt{\varpi + \theta}} = F_1(\theta, \varepsilon) + 4\sqrt{\varpi}\,.\,\Pi(\varphi, h, k) + \text{const.}, \\ &\int \left(\int_{\theta}^{\varepsilon + \epsilon\theta} \frac{d\omega}{\sqrt{\Omega}} \right) \frac{d\theta}{\sqrt{\varpi + \theta}} = F_0(\theta, \varepsilon) + 4\sqrt{\varepsilon - l^2}\,.\,\varphi_0 + \text{const.}, \end{aligned} \right.$$

les deux fonctions F_1 et F_0 remplissant l'une et l'autre la condition de symétrie que nous venons de constater à l'égard de la fonction $F(\theta)$.

Voyons donc à présent quelle conséquence en résultera pour l'expression définitive de l'intégrale double proposée $I^{(\varpi)}$ (56).

Pour cela, la même circonstance devant se présenter un grand nombre de fois dans la suite de ce travail, en raison de ce que, pour chaque Cas que nous aurons successivement à traiter, la quantité $I^{(\varpi)}$ qu'il s'agit de calculer pourra toujours être présentée sous la forme d'une somme analogue telle que $\sum_{\varepsilon} \pm \left[\int_{\varphi(\varepsilon, \eta_1)}^{\varphi(\varepsilon, \eta_2)} \Phi(\theta, \varepsilon)\, d\theta \right]$ (*), nous croyons, en conséquence, devoir établir tout de suite, une fois pour toutes, comme il suit, ce résultat très important, en l'énonçant sous forme d'un théorème général d'Analyse, qui nous sera de la plus grande utilité, en raison de la fréquence des occasions que nous aurons de l'appliquer.

Théorème. — « *Convenant, comme dans les calculs qui pré-* » *cèdent, d'appeler* θ *la variable de la dernière intégration, et* » *d'attribuer aux symboles* ε *et* η, *ainsi qu'au double signe, la* » *même signification que dans la Théorie ci-dessus, désignons :*

(*) Nous faisons ici abstraction de certains termes complémentaires qui s'introduiront dans quelques circonstances exceptionnelles que nous indiquerons.

» *par* $\varphi(\varepsilon, \eta)$ *le type, abstraction faite des indices* 1 *et* 2 *relatifs*
» *à* η, *des limites de la dernière intégration en* θ; *par* $F(\theta, \varepsilon)$
» *certain terme emprunté au résultat de cette dernière intégration,*
» *avant l'introduction des limites en question; enfin par* $f(\varepsilon, \eta)$
» *le résultat de la substitution de* $\varphi(\varepsilon, \eta)$ *à la place de* θ *dans*
» $F(\theta, \varepsilon)$, *ou, en d'autres termes, la fonction* $f(\varepsilon, \eta) = F[\varphi(\varepsilon, \eta), \varepsilon]$.

» *Dans ces conditions, si* $f(\varepsilon, \eta)$ *est une fonction symétrique*
» *de* ε *et de* η, *la somme* $\sum_{\varepsilon} \pm \left[F(\theta, \varepsilon)\right]_{\varphi(\varepsilon, \eta_1)}^{\varphi(\varepsilon, \eta_2)}$ *relative aux quatre*
» *valeurs successives de* ε, *sera alors identiquement nulle, en*
» *sorte que l'on n'aura pas à tenir compte du terme* $F(\theta, \varepsilon)$ *pour*
» *former, par l'introduction des limites précitées de* θ, *le résultat*
» *définitif de la dernière intégration.* »

En effet, il résulte immédiatement des termes mêmes de cet énoncé, ainsi que de la signification admise pour le double signe dans la somme en question, que son expression sera alors, étant écrite sous forme explicite,

$$
\begin{aligned}
\sum_{\varepsilon} \pm \left[F(\theta, \varepsilon)\right]_{\varphi(\varepsilon, \eta_1)}^{\varphi(\varepsilon, \eta_2)} = & \left\{ F[\varphi(s_1, t_2), s_1] - F[\varphi(s_1, t_1), s_1] \right\} \\
& - \left\{ F[\varphi(s_2, t_2), s_2] - F[\varphi(s_2, t_1), s_2] \right\} \\
& - \left\{ F[\varphi(t_1, s_2), t_1] - F[\varphi(t_1, s_1), t_1] \right\} \\
& + \left\{ F[\varphi(t_2, s_2), t_2] - F[\varphi(t_2, s_1), t_2] \right\} \\
= & \left\{ f(s_1, t_2) - f(s_1, t_1) \right\} - \left\{ f(s_2, t_2) - f(s_2, t_1) \right\} \\
& - \left\{ f(t_1, s_2) - f(t_1, s_1) \right\} + \left\{ f(t_2, s_2) - f(t_2, s_1) \right\} = 0,
\end{aligned}
$$

chaque terme de la seconde ligne détruisant celui de la première ligne qui est écrit au-dessus, en vertu de la symétrie admise par hypothèse pour la fonction $f(\varepsilon, \eta)$.

Faisant donc à la question actuelle une première application de ce Théorème, il résultera dès lors du caractère de symétrie que nous avons reconnu tout à l'heure aux deux fonctions F_1 et F_0 qui figurent aux seconds membres des formules (83), que pour former définitivement l'expression (56) de la quantité $I^{(\varpi)}$ à l'aide desdites formules de quadrature indéfinie, l'on pourra négliger les termes F_1 et F_0 de ces formules, ainsi que la

constante, et qu'en conséquence l'expression cherchée se réduira, dans le Cas général, simplement à

$$(84)\qquad I^{(\varpi)} = \sqrt{\varpi} \sum_{\varepsilon} \pm \left[\Pi(\varphi, h, k)\right]_{\varepsilon+\eta_1-f}^{\varepsilon+\eta_2-f},$$

et dans le Cas particulier de $\varpi = p_1^2 = 0$, à l'autre forme plus simple

$$(85)\qquad I^{(0)} = \sum_{\varepsilon} \pm \left[\sqrt{\varepsilon - l^2}.\operatorname{Arg\,sn}\left(\sqrt{\frac{\theta}{\varepsilon - l^2}},\ \sqrt{\frac{\varepsilon - l^2}{\varepsilon + n^2}}\right)\right]_{\varepsilon+\eta_1-f}^{\varepsilon+\eta_2-f},$$

les limites marquées en haut et en bas des crochets se rapportant, dans l'un et l'autre Cas, à la variable θ, et la sommation relative à ε étant toujours entendue comme nous l'avons expliqué (p. 45); ce qui veut dire par conséquent qu'elle sera composée de quatre fonctions elliptiques, soit de troisième, soit de première espèce, dont l'argument, le paramètre, et le module seront à chaque fois des fonctions des quantités θ, ε, et η considérées (c'est-à-dire des six limites données $p_1, p_2, q_1, \ldots, r_2$), de la forme indiquée par les expressions (74), dans lesquelles θ devra être remplacé successivement par les deux limites $\varepsilon + \eta_1 - f$ et $\varepsilon + \eta_2 - f$.

Il semble, à la vérité, que l'on doive signaler, pour le résultat relatif à la seconde hypothèse, un nouveau Cas d'exception, à savoir celui où l'on aurait $\varepsilon = l_2$ ou bien $\varepsilon = -n_2$, car l'intégrale du type considéré (75) se réduisant alors à un seul terme logarithmique, les formules (76) et (77) dont nous avons déduit originairement l'expression précédente (85), seraient évidemment en défaut dans ce Cas, en sorte qu'elles devraient être alors remplacées par d'autres formules. Mais il faut observer que cette nécessité n'existe pas en fait pour le calcul que nous avons en vue, par la raison que, la quantité E (53) étant nulle alors par l'un ou l'autre de ses deux facteurs, l'intégrale (69) se réduit dans cette double hypothèse à une seule partie algébrique (*), et par conséquent en remontant encore de la même

(*) Si la mise en évidence de ce fait, qui ressort de la considération de l'équation (69), paraissait contestable, en raison de ce que les formules précédentes (68) d'où elle provient



façon, l'intégrale (64) ne comprendra qu'un terme logarithmique et un terme algébrique, et il en sera encore de même de celles (63) ou (82); et de là, enfin, de la seconde (83) qui doit servir à composer définitivement la quantité $I^{(\varpi)}$: d'où il résulte immédiatement que ces valeurs de ε ne fourniront alors aucun terme dans l'expression en question, puisque les termes algébriques ou logarithmiques représentés dans ladite formule (83) par la fonction $F_0(\theta, \varepsilon)$, disparaîtront, ainsi que nous l'avons vu plus haut, dans la sommation relative à ε.

La conclusion qu'il y a donc lieu de tirer de cette observation, et de retenir au sujet du Cas exceptionnel précité, c'est, qu'aussi bien pour la valeur particulière $\varepsilon = -n^2$ que pour l'autre valeur analogue $\varepsilon = l^2$ [qu'il ne serait pas nécessaire de mentionner expressément si elle était seule, le fait étant alors mis en évidence par la forme explicite de l'expression (85)], ladite formule pourra encore être conservée, mais à la condition de ne tenir alors aucun compte des termes qui se rapporteront à ces deux valeurs de la constante ε.

En résumé, si l'on se reporte aux formules primordiales (30) et (17), ainsi qu'à la définition (7) des variables auxiliaires p, q, r, l'on voit que la composante cherchée X sera composée d'une somme de termes proportionnels chacun à une intégrale elliptique, de troisième ou de première espèce, dont l'argument et le

---

contiennent en dénominateur le coefficient $(l^2 - \varepsilon)$ ou $(n^2 + \varepsilon)$ que nous supposons nul en ce moment, ce même fait ressortirait également, sans contestation possible alors, de ce que pour les deux valeurs $\varepsilon = l^2$ et $\varepsilon = -n^2$, l'un des deux radicaux qui composent l'expression $F(\theta)$ disparaissant, cette fonction se réduit en conséquence, respectivement dans chacune de ces deux hypothèses, à la valeur

$$\begin{cases} \varepsilon = l^2. & F(\theta) = \sqrt{(n^2 + l^2)\theta} = \sqrt{-m^2\theta} = im\sqrt{\theta}, \\ \varepsilon = -n^2, & F(\theta) = \sqrt{-(l^2 + n^2)\theta} = \sqrt{m^2\theta} = m\sqrt{\theta}, \end{cases}$$

en sorte que, dans l'un et l'autre cas, l'on a simplement la valeur réelle

$$\frac{F'(\theta)}{F(\theta)} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{\theta}}}{\sqrt{\theta}} = \frac{1}{2\theta}, \qquad \text{d'où} \qquad \int \sqrt{\varpi + \theta}\,\frac{F'(\theta)}{F(\theta)} \int d\theta = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{\varpi + \theta}}{\theta}\,d\theta,$$

c'est-à-dire précisément la formule en question (69), dans laquelle on a fait $E = 0$.

module (ainsi que le paramètre, s'il y a lieu) seront à la fois certaines fonctions doublement périodiques des limites des coordonnées u, v, w qui définissent le Solide envisagé, les intégrales de première espèce s'introduisant seulement dans le Cas où la limite u_1 est égale à zéro, c'est-à-dire dans le Cas où l'une des faces du Solide en question est plane et empruntée au plan des yz.

Forme explicite de la solution, et application, a titre d'exemple, a l'octant d'une croûte ou écorce ellipsoïdale — Bien que les indications qui précèdent contiennent en réalité tous les éléments essentiels de la solution, il nous reste encore, pour l'accomplissement intégral de notre programme, à écrire tout au long les expressions explicites des différents termes qui composeront, d'après les formules ci-dessus, celle de la composante cherchée X, et cela de telle façon qu'une simple permutation circulaire suffise ensuite à procurer l'expression analogue des deux autres composantes Y et Z.

A cet effet, rappelant que l'expression (84) ou (85), suivant le Cas, de l'intégrale double $I^{(\varpi)}$ se compose de quatre termes dans lesquels ε doit recevoir successivement les quatre valeurs s_1, s_2, t_1, t_2, le signe à adopter étant à chaque fois celui que nous avons spécifié, il suffira donc pour l'objet que nous venons de dire, de tirer, par un simple jeu d'écritures, des formules précédentes (74) ou (77) qui définissent la signification des différents éléments analytiques qui entrent dans les résultats en question, la valeur explicite de chacun de ces éléments pour chacune des quatre valeurs de ε auxquelles se rapportent les différents termes des deux expressions précitées de la quantité $I^{(\varpi)}$.

Dans cette pensée, et pour accomplir ce programme, nous conviendrons de dénoter par les indices 1, 2, 3, 4 les valeurs respectives des éléments qui se rapporteront successivement aux quatre valeurs de ε, envisagées dans l'ordre où nous les avons rappelées tout à l'heure, tandis que nous affecterons des exposants 1 et 2 entre parenthèses, celles qui se rapporteront respectivement aux limites de θ indiquées haut et bas dans les deux formules en question (84) et (85).

Ce système de notation étant admis, et considérant tout

d'abord l'expression (84) qui se rapporte au Cas général, c'est-à-dire exceptant tout d'abord l'hypothèse $p_1 = 0$, et désignant par i l'un quelconque des quatre indices dont la signification vient d'être définie, la formule (74) à laquelle se rapporte cette expression, fournira en premier lieu, en ayant égard à la définition (14) de f, les quatre types de valeurs

$$\left\{\begin{aligned} k_i^2 &= \frac{\varpi + \varepsilon - l^2}{\varpi + \varepsilon + n^2} = \frac{\varpi + \varepsilon + (m^2 + n^2)}{\varpi + \varepsilon + n^2} = 1 + \frac{m^2}{\varpi + \varepsilon + n^2}, \\ \operatorname{sn}^2(\varphi_i, k_i) &= \frac{\varpi + (\varepsilon + \eta \;\; f)}{\varpi + \varepsilon - l^2} = \frac{\varpi + [\varepsilon + \eta - (l^2 - n^2)]}{\varpi + \varepsilon - l^2} = 1 + \frac{\eta + n^2}{\varpi + \varepsilon - l^2}, \\ \operatorname{sn}^2(h_i, k_i) &= 1 + \frac{\varepsilon + n^2}{\varpi}, \end{aligned}\right.$$

qui donneront à tour de rôle, relativement aux quatre interprétations de ε ci-dessus spécifiées, les définitions des éléments correspondants inscrites dans le Tableau général qui suit

Tableau A.

$$\text{(I)} \left\{\begin{aligned} k_1^2 &= 1 + \frac{m^2}{\varpi + s_1 + n^2}, & \operatorname{sn}^2(h_1, k_1) &= 1 + \frac{s_1 + n^2}{\varpi}, \\ \operatorname{sn}^2(\varphi_1^{(1)}, k_1) &= 1 + \frac{t_1 + n_2}{\varpi + s_1 - l^2}, & \operatorname{sn}^2(\varphi_1^{(2)}, k_1) &= 1 + \frac{t_2 + n^2}{\varpi + s_1 - l^2}, \end{aligned}\right.$$

$$\text{(II)} \left\{\begin{aligned} k_2^2 &= 1 + \frac{m^2}{\varpi + s_2 + n^2}, & \operatorname{sn}^2(h_2, k_2) &= 1 + \frac{s_2 + n^2}{\varpi}, \\ \operatorname{sn}^2(\varphi_2^{(1)}, k_2) &= 1 + \frac{t_1 + n^2}{\varpi + s_2 - l^2}, & \operatorname{sn}^2(\varphi_2^{(2)}, k_2) &= 1 + \frac{t_2 + n^2}{\varpi + s_2 - l^2}, \end{aligned}\right.$$

$$\text{(III)} \left\{\begin{aligned} k_3^2 &= 1 + \frac{m^2}{\varpi + t_1 + n^2}, & \operatorname{sn}^2(h_3, k_3) &= 1 + \frac{t_1 + n^2}{\varpi}, \\ \operatorname{sn}^2(\varphi_3^{(1)}, k_3) &= 1 + \frac{s_1 + n^2}{\varpi + t_1 - l^2}, & \operatorname{sn}^2(\varphi_3^{(2)}, k_3) &= 1 + \frac{s_2 + n^2}{\varpi + t_1 - l^2}, \end{aligned}\right.$$

$$\text{(IV)} \left\{\begin{aligned} k_4^2 &= 1 + \frac{m^2}{\varpi + t_2 + n^2}, & \operatorname{sn}^2(h_4, k_4) &= 1 + \frac{t_2 + n^2}{\varpi}, \\ \operatorname{sn}^2(\varphi_4^{(1)}, k_4) &= 1 + \frac{s_1 + n^2}{\varpi + t_2 - l^2}, & \operatorname{sn}^2(\varphi_4^{(2)}, k_4) &= 1 + \frac{s_2 + n^2}{\varpi + t_2 - l^2}, \end{aligned}\right.$$

quantités au moyen desquelles l'expression demandée (84) s'écrira dès lors sous forme explicite, en ayant égard au signe propre à chaque terme qui est, avons-nous dit, celui du terme correspondant dans l'inégalité de droite (48) :

$$(86)\quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{I}^{(\varpi)} = \sqrt{\varpi}\Big[&\big\{\Pi(\varphi_1^{(2)}, h_1, k_1) - \Pi(\varphi_1^{(1)}, h_1, k_1)\big\} - \big\{\Pi(\varphi_2^{(2)}, h_2, k_2) - \Pi(\varphi_2^{(1)}, h_2, k_2)\big\} \\ &- \big\{\Pi(\varphi_3^{(2)}, h_3, k_3) - \Pi(\varphi_3^{(1)}, h_3, k_3)\big\} + \big\{\Pi(\varphi_4^{(2)}, h_4, k_4) - \Pi(\varphi_4^{(1)}, h_4, k_4)\big\}\Big] \end{aligned} \right.$$

Semblablement, pour le Cas exceptionnel où l'on supposera $p_1 = 0$, auquel se rapporte l'expression (85), si l'on déduit des formules (77) relatives à ce Cas, pour des valeurs de la variable θ de la forme propre aux limites envisagées dans la question, les deux types suivants

$$\left\{ \begin{aligned} k_i^2 &= \frac{\varepsilon - l^2}{\varepsilon + n^2} = \frac{\varepsilon + (m^2 + n^2)}{\varepsilon + n^2} = 1 + \frac{m^2}{\varepsilon + n^2}, \\ \mathrm{sn}^2(\varphi_i, k_i) &= \frac{\varepsilon + \eta - f}{\varepsilon - l^2} = \frac{\varepsilon + \eta - (l^2 - n^2)}{\varepsilon - l^2} = 1 + \frac{\eta + n^2}{\varepsilon - l^2}, \end{aligned} \right.$$

on en pourra tirer ensuite, de la même façon que tout à l'heure, relativement aux quatre valeurs de ε, les nouvelles définitions des éléments correspondants qui conviendront à ce Cas d'exception; mais il est inutile de les consigner ici en un Tableau spécial, attendu que les deux dernières valeurs que nous venons d'écrire ne sont autre chose que celles mêmes des éléments correspondants (74) relatives au Cas général (dont nous avons tiré le Tableau précédent A), dans lesquelles on a introduit l'hypothèse en question $\varpi = p_1^2 = 0$.

Il suffira donc d'emprunter, sous cette condition, audit Tableau A relatif au Cas général, les valeurs des éléments k et h qui subsisteront seuls dans ce Cas particulier, pour les introduire dans la formule (85) relative à ce Cas, et dès lors l'autre formule suivante représentera semblablement, sous la condition précitée, le développement explicite de ladite formule (85), savoir

$$\mathrm{I}^{(0)} = \sqrt{s_1 - l^2}\,(\varphi_1^{(2)} - \varphi_1^{(1)}) - \sqrt{s_2 - l^2}\,(\varphi_2^{(2)} - \varphi_2^{(1)})$$
$$- \sqrt{t_1 - l^2}\,(\varphi_3^{(2)} - \varphi_3^{(1)}) + \sqrt{t_2 - l^2}\,(\varphi_4^{(2)} - \varphi_4^{(1)}),$$

c'est-à-dire, expressément, en raison de la signification exclusive $\varpi = p_1^2$, $s = q^2$, $t = r^2$, seule admissible alors, avons-nous dit (page 56, *au bas*),

$$(87)\quad \begin{cases} \mathrm{I}^{(0)} = \sqrt{q_1^2 - l^2}\,(\varphi_1^{(2)} - \varphi_1^{(1)}) - \sqrt{q_2^2 - l^2}\,(\varphi_2^{(2)} - \varphi_1^{(1)}) \\ \quad - \sqrt{r_1^2 - l^2}\,(\varphi_3^{(2)} - \varphi_3^{(1)}) + \sqrt{r_2^2 - l^2}\,(\varphi_4^{(2)} - \varphi_4^{(1)}), \end{cases}$$

avec l'observation faite plus haut (page 63) qu'il faudra omettre les termes correspondants à la valeur $\pm in$ de q ou de r, aussi bien que ceux relatifs à la valeur $\pm l$, dont l'omission est imposée par la forme même de cette expression.

Or, si l'on tient compte des définitions (7) de ces deux variables q et r, ainsi que de la valeur du module k'_1 complémentaire de k', savoir, eu égard à la relation (5),

$$k'_1 = \sqrt{1 - k'^2} = \sqrt{1 + \frac{m^2}{l^2}} = \sqrt{\frac{l^2 + m^2}{l^2}} = \sqrt{\frac{-n^2}{l^2}} = \pm \frac{in}{l},$$

il est clair que les valeurs de q et de r, ainsi exceptées par la condition que nous venons de spécifier, correspondront respectivement à celles des coordonnées v et w indiquées par les relations

$$(88)\quad \begin{cases} l\,\mathrm{dn}\,(v,\ k') = \pm\, in, & \mathrm{dn}\,(v, k') = \pm \dfrac{in}{l} = k'_1, & v = \pm\, \mathrm{K}', \\ in\,\mathrm{cn}\,(w, k'') = \pm\, in, & \mathrm{cn}\,(w, k'') = \pm\, 1, & w = 0, \end{cases}$$

les autres valeurs des variables v et w qui vérifieraient les mêmes conditions n'étant pas comprises dans les limites assignées par définition à la variation des coordonnées u, v, w (*).

(*) Théorie Nouvelle du Système Orthogonal triplement Isotherme, Tome I, pp. 425-426.

L'expression du type d'intégrale double $I^{(\varpi)}$ étant ainsi, par ce qui précède, complètement acquise dans tous les cas, il suffira, d'après les formules (30) et (17), pour posséder de même celle de la composante demandée X, de récrire trois fois de suite le Tableau général A ci-dessus, en y prenant successivement pour s et t, ainsi que nous l'avons expliqué, en premier lieu q et r, en second lieu r et p, et en troisième lieu enfin p et q, la constante ϖ tenant lieu à chaque fois du carré de la troisième variable restante : opération purement littérale d'où résulteront successivement les trois Tableaux suivants que nous désignerons par les lettres P, Q, R, en raison de ce que la constante y reçoit dans chacun respectivement la signification p^2, q^2, ou r^2, et que nous sommes obligés d'écrire ici tout au long individuellement, bien qu'ils se déduisent les uns des autres par la seule permutation circulaire des trois lettres p, q, r, parce qu'ils ne sont pour nous que des résultats intermédiaires dans la question, et que les trois Tableaux analogues que nous comptons présenter ensuite à titre de formules définitives seront déduits de ceux-là par le moyen de substitutions qui n'obéiront plus à la même loi de permutation circulaire.

Tableau P.

$$(\varpi = p^2, \qquad s = q^2, \qquad t = r^2)$$

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} k_1^2 = 1 + \dfrac{m^2}{p^2 + q_1^2 + n^2}, & \operatorname{sn}^2(h_1, k_1) = 1 + \dfrac{q_1^2 + n^2}{p^2}, \\ \operatorname{sn}^2(\varphi_1^{(1)}, k_1) = 1 + \dfrac{r_1^2 + n^2}{p^2 + q_1^2 - l^2}, & \operatorname{sn}^2(\varphi_1^{(2)}, k_1) = 1 + \dfrac{r_2^2 + n^2}{p^2 + q_1^2 - l^2}. \end{cases}$$

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} k_2^2 = 1 + \dfrac{m^2}{p^2 + q_2^2 + n^2}, & \operatorname{sn}^2(h_2, k_2) = 1 + \dfrac{q_2^2 + n^2}{p^2}, \\ \operatorname{sn}^2(\varphi_2^{(1)}, k_2) = 1 + \dfrac{r_1^2 + n^2}{p^2 + q_2^2 - l^2}, & \operatorname{sn}^2(\varphi_2^{(2)}, k_2) = 1 + \dfrac{r_2^2 + n^2}{p^2 + q_2^2 - l^2}, \end{cases}$$

$$
\text{(III)}\quad
\begin{cases}
k_3^2 = 1 + \dfrac{m^2}{p^2 + r_1^2 + n^2}, & \operatorname{sn}^2(h_3,\ k_3) = 1 + \dfrac{r_1^2 + n^2}{p^2}, \\[2ex]
\operatorname{sn}^2(\varphi_3^{(1)}, k_3) = 1 + \dfrac{q_1^2 + n^2}{p^2 + r_1^2 - l^2}, & \operatorname{sn}^2(\varphi_3^{(2)}, k_3) = 1 + \dfrac{q_2^2 + n^2}{p^2 + r_1^2 - l^2},
\end{cases}
$$

$$
\text{(IV)}\quad
\begin{cases}
k_4^2 = 1 + \dfrac{m^2}{p^2 + r_2^2 + n^2}, & \operatorname{sn}^2(h_4,\ k_4) = 1 + \dfrac{r_2^2 + n^2}{p^2}, \\[2ex]
\operatorname{sn}^2(\varphi_4^{(1)}, k_4) = 1 + \dfrac{q_1^2 + n^2}{p^2 + r_2^2 - l^2}, & \operatorname{sn}^2(\varphi_4^{(2)}, k_4) = 1 + \dfrac{q_2^2 + n^2}{p^2 + r_2^2 - l^2}
\end{cases}
$$

Tableau Q.

$$(\varpi = q^2, \qquad s = r^2, \qquad t = p^2)$$

$$
\text{(I)}\quad
\begin{cases}
k_1^2 = 1 + \dfrac{m^2}{q^2 + r_1^2 + n^2}, & \operatorname{sn}^2(h_1,\ k_1) = 1 + \dfrac{r_1^2 + n^2}{q^2}, \\[2ex]
\operatorname{sn}^2(\varphi_1^{(1)}, k_1) = 1 + \dfrac{p_1^2 + n^2}{q^2 + r_1^2 - l^2}, & \operatorname{sn}^2(\varphi_1^{(2)}, k_1) = 1 + \dfrac{p_2^2 + n^2}{q^2 + r_1^2 - l^2},
\end{cases}
$$

$$
\text{(II)}\quad
\begin{cases}
k_2^2 = 1 + \dfrac{m^2}{q^2 + r_2^2 + n^2}, & \operatorname{sn}^2(h_2,\ k_2) = 1 + \dfrac{r_2^2 + n^2}{q^2}, \\[2ex]
\operatorname{sn}^2(\varphi_2^{(1)}, k_2) = 1 + \dfrac{p_1^2 + n^2}{q^2 + r_2^2 - l^2}, & \operatorname{sn}^2(\varphi_2^{(2)}, k_2) = 1 + \dfrac{p_2^2 + n^2}{q^2 + r_2^2 - l^2},
\end{cases}
$$

$$
\text{(III)}\quad
\begin{cases}
k_3^2 = 1 + \dfrac{m^2}{q^2 + p_1^2 + n^2}, & \operatorname{sn}^2(h_3, k_3) = 1 + \dfrac{p_1^2 + n^2}{q^2}, \\[2ex]
\operatorname{sn}^2(\varphi_3^{(1)}, k_3) = 1 + \dfrac{r_1^2 + n^2}{q^2 + p_1^2 - l^2}, & \operatorname{sn}^2(\varphi_3^{(2)}, k_3) = 1 + \dfrac{r_2^2 + n^2}{q^2 + p_1^2 - l^2},
\end{cases}
$$

$$
\text{(IV)}\quad
\begin{cases}
k_4^2 = 1 + \dfrac{m^2}{q^2 + p_2^2 + n^2}, & \operatorname{sn}^2(h_4,\ k_4) = 1 + \dfrac{p_2^2 + n^2}{q^2}, \\[2ex]
\operatorname{sn}^2(\varphi_4^{(1)}, k_4) = 1 + \dfrac{r_1^2 + n^2}{q^2 + p_2^2 - l^2}, & \operatorname{sn}^2(\varphi_4^{(2)}, k_4) = 1 + \dfrac{r_2^2 + n^2}{q^2 + p_2^2 - l^2}.
\end{cases}
$$

TABLEAU R.

$$(\varpi = r^2, \qquad s = p^2, \qquad t = q^2)$$

$$(\mathrm{I}) \quad \left\{ \begin{aligned} k_1^2 &= 1 + \frac{m^2}{r^2 + p_1^2 + n^2}, & \mathrm{sn}^2(h_1, k_1) &= 1 + \frac{p_1^2 + n^2}{r^2}, \\ \mathrm{sn}^2(\varphi_1^{(1)}, k_1) &= 1 + \frac{q_1^2 + n^2}{r^2 + p_1^2 - l^2}, & \mathrm{sn}^2(\varphi_1^{(2)}, k_1) &= 1 + \frac{q_2^2 + n^2}{r^2 + p_1^2 - l^2}, \end{aligned} \right.$$

$$(\mathrm{II}) \quad \left\{ \begin{aligned} k_2^2 &= 1 + \frac{m^2}{r^2 + p_2^2 + n^2}, & \mathrm{sn}^2(h_2, k_2) &= 1 + \frac{p_2^2 + n^2}{r^2}, \\ \mathrm{sn}^2(\varphi_2^{(1)}, k_2) &= 1 + \frac{q_1^2 + n^2}{r^2 + p_2^2 - l^2}, & \mathrm{sn}^2(\varphi_2^{(2)}, k_2) &= 1 + \frac{q_2^2 + n^2}{r^2 + p_2^2 - l^2}, \end{aligned} \right.$$

$$(\mathrm{III}) \quad \left\{ \begin{aligned} k_3^2 &= 1 + \frac{m^2}{r^2 + q_1^2 + n^2}, & \mathrm{sn}^2(h_3, k_3) &= 1 + \frac{q_1^2 + n^2}{r^2}, \\ \mathrm{sn}^2(\varphi_3^{(1)}, k_3) &= 1 + \frac{p_1^2 + n^2}{r^2 + q_1^2 - l^2}, & \mathrm{sn}^2(\varphi_3^{(2)}, k_3) &= 1 + \frac{p_2^2 + n^2}{r^2 + q_1^2 - l^2}, \end{aligned} \right.$$

$$(\mathrm{IV}) \quad \left\{ \begin{aligned} k_4^2 &= 1 + \frac{m^2}{r^2 + q_2^2 + n^2}, & \mathrm{sn}^2(h_4, k_4) &= 1 + \frac{q_2^2 + n^2}{r^2}, \\ \mathrm{sn}^2(\varphi_4^{(1)}, k_4) &= 1 + \frac{p_1^2 + n^2}{r^2 + q_2^2 - l^2}, & \mathrm{sn}^2(\varphi_4^{(2)}, k_4) &= 1 + \frac{p_2^2 + n^2}{r^2 + q_2^2 - l^2}. \end{aligned} \right.$$

Moyennant les définitions des différents éléments consignées dans les trois tableaux P, Q, R que nous venons de présenter, la même formule précitée (86) fournira successivement, pour le Cas général, l'expression des trois quantités demandées $I^{(p^2)}$, $I^{(q^2)}$, $I^{(r^2)}$, avec lesquelles est composée l'expression (30) de l'inconnue Δ_z, à la seule condition de prendre à chaque fois, pour les quatre éléments k_i, h_i, $\varphi_i^{(1)}$, et $\varphi_i^{(2)}$ qui y figurent, les

valeurs inscrites respectivement dans l'un ou l'autre de ces trois tableaux. Et de même, pour le Cas exceptionnel relatif à la seule hypothèse $p_1 = 0$, l'expression de la quantité $I^{(\varpi)}$ correspondant à la valeur $\varpi = p_1^2 = 0$, qui se réduira par conséquent à $I^{(0)}$ sera fournie par la formule (87) dans laquelle les quantités $\varphi_1^{(1)}$ et $\varphi_1^{(2)}$, ainsi que la valeur connexe du module k_1, recevront alors les valeurs indiquées au tableau P, en tenant compte alors, dans les unes et les autres, de l'hypothèse en question $p_1 = 0$.

Les valeurs des limites $p_1, p_2, q_1, \ldots r_2$, étant déterminées par les égalités (10) en fonction des limites données des coordonnées u, v, w, la question actuelle pourrait donc être considérée comme entièrement résolue par l'ensemble des formules qui précèdent à l'aide des variables auxiliaires p, q, r, si l'on n'avait en vue que la seule composante envisagée jusqu'ici X, et si l'on ne se proposait pas, comme nous en avons annoncé l'intention, de déduire de l'expression ainsi obtenue celle des deux autres composantes Y et Z par le moyen d'une simple permutation circulaire. Mais si l'on tient à bénéficier, pour l'achèvement de la solution, de ce procédé de calcul si commode et si sûr, il sera nécessaire de revenir aux variables primitives, c'est-à-dire aux coordonnées u, v, w elles-mêmes (*), en transformant chacun des trois Tableaux précédents par la substitution des valeurs précitées des $p_1, p_2, \ldots r_2$, en fonction des limites correspondantes de ces coordonnées.

(*) On pourait encore, à la vérité, obtenir ce même résultat en introduisant à la fois les trois systèmes de variables auxiliaires (7), et déterminant en conséquence pour chacun les limites, à l'aide d'équations analogues à celles (10), procédé qui permettrait alors de déduire, des tableaux précédents P, Q, R, deux autres séries de tableaux semblables, P′, Q′, R′, et P″, Q″, R″, par la simple permutation de p, q, r en p', q', r', et p'', q'', r'', lesquels fourniraient alors, respectivement pour les deux autres composantes Y et Z, encore à l'aide de la formule (86) et de celles issues de la formule (87), par le moyen de la même permutation jointe à celle du groupe (l, m, n), les expressions demandées exprimées alors en fonction des limites que nous avons dites tout à l'heure. Mais ce procédé, tout aussi compliqué (sinon plus) que celui que nous indiquons ci-dessus, offrirait certainement à l'esprit une signification moins claire, et paraîtrait sans doute serrer de moins près le but qu'il s'agit d'atteindre.

Si, en même temps que l'on opère cette substitution, on tient compte, en vue de simplifier chaque expression, des diverses formules rassemblées dans le Tableau de la page 478 du Tome I de notre *Théorie Nouvelle du Système Orthogonal triplement Isotherme*, formules déjà rappelées au début du présent travail, les trois Tableaux précédents P, Q, R, donneront ainsi naissance aux trois autres suivants, que nous désignerons de même par les lettres correspondantes $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, et en tête desquels nous inscrivons, pour chacun, celles des formules en question qui y auront été utilisées pour la transformation que nous venons de dire.

Tableau $\mathfrak{P}$.

$$\left(\begin{array}{ll} q^2 - l^2 = m^2 \operatorname{sn}^2 v, & q^2 + n^2 = -\, m^2 \operatorname{cn}^2 v \\ r^2 - l^2 = m^2 \operatorname{dn}^2 w, & r^2 + n^2 = \quad n^2 \operatorname{sn}^2 w \end{array}\right)$$

$$(\mathrm{I}) \left\{\begin{array}{ll} k_1^2 = 1 + \dfrac{m^2}{l^2 \operatorname{sn}^2 u - m^2 \operatorname{cn}^2 v_1}, & \operatorname{sn}^2(h_1, k_1) = 1 - \dfrac{m^2 \operatorname{cn}^2 v_1}{l^2 \operatorname{sn}^2 u}, \\ \operatorname{sn}^2(\varphi_1^{(1)}, k_1) = 1 + \dfrac{n^2 \operatorname{sn}^2 w_1}{l^2 \operatorname{sn}^2 u + m^2 \operatorname{sn}^2 v_1}, & \operatorname{sn}^2(\varphi_1^{(2)}, k_1) = 1 + \dfrac{n^2 \operatorname{sn}^2 w_2}{l^2 \operatorname{sn}^2 u + m^2 \operatorname{sn}^2 v_1}, \end{array}\right.$$

$$(\mathrm{II}) \left\{\begin{array}{ll} k_2^2 = 1 + \dfrac{m^2}{l^2 \operatorname{sn}^2 u - m^2 \operatorname{cn}^2 v_2}, & \operatorname{sn}^2(h_2, k_2) = 1 - \dfrac{m^2 \operatorname{cn}^2 v_2}{l^2 \operatorname{sn}^2 u}, \\ \operatorname{sn}^2(\varphi_2^{(1)}, k_2) = 1 + \dfrac{n^2 \operatorname{sn}^2 w_1}{l^2 \operatorname{sn}^2 u + m^2 \operatorname{sn}^2 v_2}, & \operatorname{sn}^2(\varphi_2^{(2)}, k_2) = 1 + \dfrac{n^2 \operatorname{sn}^2 w_2}{l^2 \operatorname{sn}^2 u + m^2 \operatorname{sn}^2 v_2}, \end{array}\right.$$

$$(\mathrm{III}) \left\{\begin{array}{ll} k_3^2 = 1 + \dfrac{m^2}{l^2 \operatorname{sn}^2 u + n^2 \operatorname{sn}^2 w_1}, & \operatorname{sn}^2(h_3, k_3) = 1 + \dfrac{n^2 \operatorname{sn}^2 w_1}{l^2 \operatorname{sn}^2 u}, \\ \operatorname{sn}^2(\varphi_3^{(1)}, k_3) = 1 - \dfrac{m^2 \operatorname{cn}^2 v_1}{l^2 \operatorname{sn}^2 u + m^2 \operatorname{dn}^2 w_1}, & \operatorname{sn}^2(\varphi_3^{(2)}, k_3) = 1 - \dfrac{m^2 \operatorname{cn}^2 v_2}{l^2 \operatorname{sn}^2 u + m^2 \operatorname{dn}^2 w_1}, \end{array}\right.$$

$$(\mathrm{IV}) \left\{\begin{array}{ll} k_4^2 = 1 + \dfrac{m^2}{l^2 \operatorname{sn}^2 u + n^2 \operatorname{sn}^2 w_2}, & \operatorname{sn}^2(h_4, k_4) = 1 + \dfrac{n^2 \operatorname{sn}^2 w_2}{l^2 \operatorname{sn}^2 u}, \\ \operatorname{sn}^2(\varphi_4^{(1)}, k_4) = 1 - \dfrac{m^2 \operatorname{cn}^2 v_1}{l^2 \operatorname{sn}^2 u + m^2 \operatorname{dn}^2 w_2}, & \operatorname{sn}^2(\varphi_4^{(2)}, k_4) = 1 - \dfrac{m^2 \operatorname{cn}^2 v_2}{l^2 \operatorname{sn}^2 u + m^2 \operatorname{dn}^2 w_2}. \end{array}\right.$$

Tableau $\mathcal{Q}$.

$$\left(\begin{array}{ll} r^2 - l^2 = m^2 \,\mathrm{dn}^2 w, & r^2 + n^2 = n^2 \,\mathrm{sn}^2 w \\ p^2 - l^2 = - l^2 \,\mathrm{cn}^2 u, & p^2 + n^2 = n^2 \,\mathrm{dn}^2 u \end{array}\right)$$

$$(\mathrm{I}) \left\{ \begin{array}{ll} k_1^2 = 1 + \dfrac{m^2}{l^2 \mathrm{dn}^2 v + n^2 \mathrm{sn}^2 w_1}, & \mathrm{sn}^2(h_1,\ k_1) = 1 + \dfrac{n^2 \,\mathrm{sn}^2 w_1}{l^2 \,\mathrm{dn}\, v}, \\ \mathrm{sn}^2(\varphi_1^{(1)}, k_1) = 1 + \dfrac{n^2 \,\mathrm{dn}^2 u_1}{l^2 \mathrm{dn}^2 v + m^2 \mathrm{dn}^2 w_1}, & \mathrm{sn}^2(\varphi_1^{(2)}, k_1) = 1 + \dfrac{n^2 \,\mathrm{dn}^2 u_2}{l^2 \mathrm{dn}^2 v + m^2 \mathrm{dn}^2 w_1}, \end{array} \right.$$

$$(\mathrm{II}) \left\{ \begin{array}{ll} k_2^2 = 1 + \dfrac{m^2}{l^2 \mathrm{dn}^2 v + n^2 \mathrm{sn}^2 w_2}, & \mathrm{sn}^2(h_2,\ k_2) = 1 + \dfrac{n^2 \,\mathrm{sn}^2 w_2}{l^2 \,\mathrm{dn}^2 v}, \\ \mathrm{sn}^2(\varphi_2^{(1)}, k_2) = 1 + \dfrac{n^2 \,\mathrm{dn}^2 u_1}{l^2 \mathrm{dn}^2 v + m^2 \mathrm{dn}^2 w_2}, & \mathrm{sn}^2(\varphi_2^{(2)}, k_2) = 1 + \dfrac{n^2 \,\mathrm{dn}^2 u_2}{l^2 \mathrm{dn}^2 v + m^2 \mathrm{dn}^2 w_2}, \end{array} \right.$$

$$(\mathrm{III}) \left\{ \begin{array}{ll} k_3^2 = 1 + \dfrac{m^2}{l^2 \mathrm{dn}^2 v + n^2 \mathrm{dn}^2 u_1}, & \mathrm{sn}^2(h_3,\ k_3) = 1 + \dfrac{n^2 \,\mathrm{dn}^2 u_1}{l^2 \,\mathrm{dn}^2 v}, \\ \mathrm{sn}^2(\varphi_3^{(1)}, k_3) = 1 + \dfrac{n^2 \,\mathrm{sn}^2 w_1}{l^2 \mathrm{dn}^2 v - l^2 \,\mathrm{cn}^2 u_1}, & \mathrm{sn}^2(\varphi_3^{(2)}, k_3) = 1 + \dfrac{n^2 \,\mathrm{sn}^2 w_2}{l^2 \mathrm{dn}^2 v - l^2 \,\mathrm{cn}^2 u_1}, \end{array} \right.$$

$$(\mathrm{IV}) \left\{ \begin{array}{ll} k_4^2 = 1 + \dfrac{m^2}{l^2 \mathrm{dn}^2 v + n^2 \mathrm{dn}^2 u_2}, & \mathrm{sn}^2(h_4,\ k_4) = 1 + \dfrac{n^2 \,\mathrm{dn}^2 u_2}{l^2 \,\mathrm{dn}^2 v}, \\ \mathrm{sn}^2(\varphi_4^{(1)}, k_4) = 1 + \dfrac{n^2 \,\mathrm{sn}^2 w_1}{l^2 \mathrm{dn}^2 v - l^2 \,\mathrm{cn}^2 u_2}, & \mathrm{sn}^2(\varphi_4^{(2)}, k_4) = 1 + \dfrac{n^2 \,\mathrm{sn}^2 w_2}{l^2 \mathrm{dn}^2 v - l^2 \,\mathrm{cn}^2 u_2}. \end{array} \right.$$

TABLEAU ℛ.

$$\left(\begin{array}{ll} p^2 - l^2 = -\, l^2\,\mathrm{cn}^2 u, & p^2 + n^2 = \quad n^2\,\mathrm{dn}^2 u \\ q^2 - l^2 = \quad m^2\,\mathrm{sn}^2 v, & q^2 + n^2 = -\, m^2\,\mathrm{cn}^2 v \end{array}\right)$$

$$\text{(I)}\ \left\{\begin{array}{ll} k_1^2 = 1 + \dfrac{m^2}{-n^2\mathrm{cn}^2 w + n^2\mathrm{dn}^2 u_1}, & \mathrm{sn}^2(h_1,\, k_1) = 1 - \dfrac{\mathrm{dn}^2 u_1}{\mathrm{cn}^2 w}, \\ \mathrm{sn}^2(\varphi_1^{(1)}, k_1) = 1 + \dfrac{m^2\,\mathrm{cn}^2 v_1}{n^2\,\mathrm{cn}^2 w + l^2\,\mathrm{cn}^2 u_1}, & \mathrm{sn}^2(\varphi_1^{(2)}, k_1) = 1 + \dfrac{m^2\,\mathrm{cn}^2 v_2}{n^2\,\mathrm{cn}^2 w + l^2\,\mathrm{cn}^2 u_1}, \end{array}\right.$$

$$\text{(II)}\ \left\{\begin{array}{ll} k_2^2 = 1 + \dfrac{m^2}{-n^2\mathrm{cn}^2 w + n^2\mathrm{dn}^2 u_2}, & \mathrm{sn}^2(h_2,\, k_2) = 1 - \dfrac{\mathrm{dn}^2 u_2}{\mathrm{cn}^2 w}, \\ \mathrm{sn}^2(\varphi_2^{(1)}, k_2) = 1 + \dfrac{m^2\,\mathrm{cn}^2 v_1}{n^2\mathrm{cn}^2 w + l^2\mathrm{cn}^2 u_2}, & \mathrm{sn}^2(\varphi_2^{(2)}, k_2) = 1 + \dfrac{m^2\,\mathrm{cn}^2 v_2}{n^2\,\mathrm{cn}^2 w + l^2\,\mathrm{cn}^2 u_2}, \end{array}\right.$$

$$\text{(III)}\ \left\{\begin{array}{ll} k_3^2 = 1 - \dfrac{m^2}{n^2\,\mathrm{cn}^2 w + m^2\,\mathrm{cn}\, v_1}, & \mathrm{sn}^2(h_3,\, k_3) = 1 + \dfrac{m^2\,\mathrm{cn}^2 v_1}{n^2\mathrm{cn}^2 w}, \\ \mathrm{sn}^2(\varphi_3^{(2)}, k_3) = 1 + \dfrac{n^2\,\mathrm{dn}^2 u_1}{-n^2\mathrm{cn}^2 w + m^2\mathrm{sn}^2 v_1}, & \mathrm{sn}^2(\varphi_3^{(2)}, k_3) = 1 + \dfrac{n^2\,\mathrm{dn}^2 u_2}{-n^2\mathrm{cn}^2 w + m^2\mathrm{sn}^2 v_1}, \end{array}\right.$$

$$\text{(IV)}\ \left\{\begin{array}{ll} k_4^2 = 1 - \dfrac{m^2}{n^2\,\mathrm{cn}^2 w + m^2\mathrm{cn}^2 v_2}, & \mathrm{sn}^2(h_4,\, k_4) = 1 + \dfrac{m^2\,\mathrm{cn}^2 v_2}{n^2\,\mathrm{cn}^2 w}, \\ \mathrm{sn}^2(\varphi_4^{(1)}, k_4) = 1 + \dfrac{n^2\,\mathrm{dn}^2 u_1}{-n^2\mathrm{cn}^2 w + m^2\mathrm{sn}^2 v_2}, & \mathrm{sn}^2(\varphi_4^{(2)}, k_2) = 1 + \dfrac{n^2\,\mathrm{dn}^2 u_2}{-\,n^2\mathrm{cn}^2 w + m^2\mathrm{sn}^2 v_2}. \end{array}\right.$$

Semblablement, la formule ci-dessus (87) relative au Cas d'exception $p_1 = 0$, si l'on y tient compte des deux formules, déjà utilisées pour la formation des tableaux qui précèdent, savoir

$$q^2 - l^2 = m^2\,\mathrm{sn}^2 v, \qquad r^2 - l^2 = m^2\,\mathrm{dn}^2 w,$$

s'écrira donc, en revenant aux variables primitives u, v, w,

$$
(89)\quad \left\{ \begin{aligned} I^{(\theta)} = m\Big[&\operatorname{sn} v_1(\varphi_1^{(2)} - \varphi_1^{(1)}) - \operatorname{sn} v_2(\varphi_2^{(2)} - \varphi_2^{(1)}) - \operatorname{dn} w_1(\varphi_3^{(2)} - \varphi_3^{(1)}) \\ &+ \operatorname{dn} w_2(\varphi_4^{(2)} - \varphi_4^{(1)})\Big], \end{aligned} \right.
$$

dans laquelle on devra omettre, avons-nous dit (p. 67), les termes correspondants aux limites extrêmes des coordonnées $v = \pm K'$ et $w = 0$.

Ces trois derniers Tableaux $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, étant joints aux deux formules précédentes (86) et (89), résolvent complètement la question dans les termes mêmes où nous l'avions posée, car ils fournissent ensemble dans tous les cas, de la manière que nous avons déjà dite tout à l'heure, l'expression explicite des trois quantités $I^{(p^\theta)}$, $I^{(q^\theta)}$, $I^{(r^\theta)}$, desquelles l'on conclura de suite, par le moyen des formules (30) ou (34), la valeur demandée de la première des trois expressions (17), savoir

$$
X = \frac{-fD}{l.in}\Delta_x, \qquad Y = \frac{-fD}{m.il}\Delta_y, \qquad Z = \frac{-fD}{n.im}\Delta_z,
$$

celle des deux autres quantités Δ_y et Δ_z analogues à Δ_x devant être fournies comme elle par les mêmes formules après une simple permutation circulaire des deux groupes (u, v, w) et (l, m, n) [qui, d'après la définition (6) de nos coordonnées u, v, w, correspond à la permutation des coordonnées rectilignes x, y, z], opérée tant sur les Tableaux précédents, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ que sur la seule formule (89) elle-même, l'autre formule (86), dans laquelle ne figure explicitement aucune desdites quantités n'étant pas atteinte par cette permutation.

Chaque intégrale double $I^{(\varpi)}$ ou $I^{(\theta)}$ étant composée de *huit* termes et devant être prise successivement pour l'une et l'autre des limites de la variable ϖ (d'où un ensemble de *seize* termes correspondant à chacune), on voit donc que la solution totale comprendra *quarante-huit* termes différents si l'on se borne à la seule composante X, et *cent quarante-quatre* si l'on envisage les trois composantes à la fois, dont la forme explicite est complètement fournie par les divers résultats et indications que nous

venons de donner, chacun d'eux étant constitué intégralement avec des fonctions elliptiques de troisième ou de première espèce (directes ou inverses), dont la valeur numérique pourra être calculée avec telle approximation que l'on voudra par le moyen des séries connues ou des tables, en ayant recours aux formules établies dans notre Ouvrage relatif à la théorie de ces Coordonnées déjà tant de fois cité dans le présent travail (*), en même temps que cette théorie mettra en évidence de la façon la plus claire, ainsi qu'on va le voir à l'instant par une application intéressante, les diverses propriétés analytiques appartenant à chacune des solutions obtenues de la façon que nous venons de dire.

Voyons maintenant, à titre d'exemple, le résultat que donnera la solution à laquelle nous sommes arrivés tout à l'heure pour un Cas particulier simple, à savoir celui dans lequel le Solide envisagé serait l'Octant d'une Croûte ou Écorce Ellipsoïdale comprise entre deux Ellipsoïdes Homofocaux.

Il ressort des explications très détaillées que nous avons données dans l'Ouvrage déjà tant de fois cité (**), notamment à propos d'un problème de Géométrie relatif également à l'Octant d'Ellipsoïde (***) que les limites des coordonnées u, v, w, pour ce Cas particulier, seront respectivement 0 et K pour u, 0 et K′ pour v, et enfin, quant à w, les deux limites données w_1 et w_2 elles-mêmes.

Ces valeurs des limites, donnant en particulier

$$p_1 = l \operatorname{sn} u_1 = 0, \qquad \operatorname{cn} u_1 \operatorname{dn} u_1 = 1, \qquad \operatorname{sn} v_1 \operatorname{cn} v_1 = 0,$$
$$\operatorname{cn} u_2 \operatorname{dn} u_2 = 0, \qquad \operatorname{sn} v_2 \operatorname{cn} v_2 = 0,$$

(*) Pour le calcul des valeurs numériques des divers éléments k_i, h_i, φ_i consignés dans les trois derniers tableaux $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, à l'aide des tables ou des séries connues, on devra préalablement recourir aux formules (21) et (23) du Chap. VI de l'Ouvrage en question (Tome I, pp. 416 et 418), lesquelles fournissent la réduction à un module canonique des fonctions elliptiques relatives aux deux coordonnées v et w.

(**) Voir Théorie Nouvelle du Système Orthogonal triplement Isotherme, Tome I, Chap. VI, pp. 426-432.

(***) Ibid., pp. 533-534.

réduiront donc, pour ce cas, l'expression (34) de Δ_x simplement aux trois termes

$$\Delta_x = ln\, \mathrm{I}^{(0)} \pm m\,(-\,in)\,(\mathrm{sn}\, w\, \mathrm{dn}\, w\, \mathrm{I}^{(r^2)})_2^1,$$

dans laquelle ce sera, d'après nos conventions relatives à l'interprétation du double signe (page 24), le signe — qu'il faudra prendre, attendu que pour tous les points du trièdre des coordonnées planes positives la coordonnée w est négative (*), en sorte qu'elle sera effectivement

$$(90)\qquad \left\{ \begin{aligned} \Delta_x &= ln\, \mathrm{I}^{(0)} - m\,(-\,in)\,(\mathrm{sn}\, w\, \mathrm{dn}\, w\, \mathrm{I}^{(r^2)})_2^1 \\ &= ln\, \mathrm{I}^{(0)} + m\,(-\,in)\,(\mathrm{sn}\, w\, \mathrm{dn}\, w\, \mathrm{I}^{(r^2)})_1^2, \end{aligned} \right.$$

la valeur du premier de ces termes étant fournie par la formule exceptionnelle (89) qui se réduira elle-même, dans le cas actuel, aux deux derniers termes seuls, savoir

$$(91)\qquad \mathrm{I}^{(0)} = m\left[-\,\mathrm{dn}\, w_1\,(\varphi_3^{(2)} - \varphi_3^{(1)}) + \mathrm{dn}\, w_2\,(\varphi_4^{(2)} - \varphi_4^{(1)})\right],$$

en raison, d'une part, de la valeur $v_1 = 0$, et d'autre part, quant à l'autre limite v_2, de la réserve de la valeur K′ que nous avons spécifiée à l'occasion de cette formule (page 89, *en haut*).

Quant à cette dernière expression tout d'abord, les divers éléments φ et k qui y interviennent (explicitement ou implicitement) seront procurés par le Tableau $\mathfrak{T}$, équivalant au tableau P, ainsi que nous l'avons dit (page 71, *en haut*), en y faisant

$$u = u_1 = 0, \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{sn}\, u = \mathrm{sn}\, u_1 = 0,$$

et

$$v_1 = 0, \quad v_2 = \mathrm{K}', \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{cn}\, v_1 = 1, \quad \mathrm{cn}\, v_2 = 0,$$

c'est-à-dire qu'ils seront ceux définis, quant aux arguments $\varphi_3^{(1)}$ et $\varphi_3^{(2)}$, par les égalités suivantes, dans lesquelles nous avons égard à la valeur (6) du module k'' relatif à la coordonnée w,

(*) Ibid., p. 432, *in medio*.

$$
\text{(III)} \quad \begin{cases} k_3^2 = 1 + \dfrac{m^2}{n^2 \operatorname{sn}^2 w_1} = \dfrac{n^2 \operatorname{sn}^2 w_1 + m^2}{n^2 \operatorname{sn}^2 w_1} = \dfrac{m^2\left(1 + \dfrac{n^2}{m^2}\operatorname{sn}^2 w_1\right)}{n^2 \operatorname{sn}^2 w_1} = \dfrac{m^2 \operatorname{dn}^2 w_1}{n^2 \operatorname{sn}^2 w_1}, \\ \operatorname{sn}^2(\varphi_3^{(1)}, k_3) = 1 - \dfrac{1}{\operatorname{dn}^2 w_1} = \dfrac{\operatorname{dn}^2 w_1 - 1}{\operatorname{dn}^2 w_1} = \dfrac{-k''^2 \operatorname{sn}^2 w_1}{\operatorname{dn}^2 w_1} = \dfrac{n^2 \operatorname{sn}^2 w_1}{m^2 \operatorname{dn}^2 w_1} = \dfrac{1}{k_3^2}, \\ \operatorname{sn}^2(\varphi_3^{(2)}, k_3) = 1; \end{cases}
$$

et comme le groupe (IV) du même Tableau ne diffère du précédent (III), dont nous venons de faire emploi, que par l'indice de la coordonnée w, celui-là donnera donc de même, relativement aux deux autres arguments $\varphi_4^{(1)}$ et $\varphi_4^{(2)}$, les valeurs analogues :

$$
\text{(IV)} \quad \begin{cases} k_4^2 = \dfrac{m^2 \operatorname{dn}^2 w_2}{n^2 \operatorname{sn}^2 w_2}, \qquad \operatorname{sn}^2(\varphi_4^{(1)}, k_4) = \dfrac{n^2 \operatorname{sn}^2 w_2}{m^2 \operatorname{dn}^2 w_2} = \dfrac{1}{k_4^2}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \operatorname{sn}^2(\varphi_4^{(2)}, k_4) = 1. \end{cases}
$$

Il résulte immédiatement de ces expressions, que si l'on convient de désigner respectivement, pour l'analogie des notations, par K_3 et K_3', et par K_4 et K_4', les deux fonctions complètes de première espèce relatives à chacun des deux modules envisagés k_3 et k_4, on pourra prendre à la fois

$$
\varphi_3^{(1)} = K_3 + iK_3', \qquad \varphi_3^{(2)} = K_3, \qquad \varphi_4^{(1)} = K_4 + iK_4', \qquad \varphi_4^{(2)} = K_4,
$$

et l'expression en question (91) se réduira par là simplement à

$$
\text{(92)} \quad \begin{cases} I^{(0)} = m\left[-\operatorname{dn} w_1 (-iK_3') + \operatorname{dn} w_2 (-iK_4')\right] \\ \quad = -im\left[\operatorname{dn} w_2 . K_4' - \operatorname{dn} w_1 . K_3'\right]. \end{cases}
$$

Toutefois, nous simplifierons encore l'écriture de cette expression, et par suite celle du résultat final à intervenir, en même temps que nous préviendrons une disparité choquante, au point de vue de l'analogie des notations, avec les symboles qu'il nous reste encore à introduire, en remarquant que les deux valeurs qui précèdent des modules k_3 et k_4 ne diffèrant, comme nous

l'avons observé déjà, que par l'indice de w, si l'on pose à la fois

$$(93)\qquad k_0^2 = 1 + \frac{m^2}{n^2\,\mathrm{sn}^2 w}, \qquad k_0'^2 = 1 - k_0^2 = -\frac{m^2}{n^2\,\mathrm{sn}^2 w},$$

$$(94)\qquad K_0 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k_0^2x^2)}}, \quad K_0' = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k_0'^2x^2)}},$$

les quantités k_3, K_3, K_3' d'une part, et k_4, K_4, K_4' de l'autre, ne seront alors autre chose que ces nouvelles quantités k_0, K_0, et K_0' prises respectivement pour les valeurs $w = w_1$ et $w = w_2$, en sorte que l'expression précédente (92) pourra s'écrire sous forme abrégée :

$$(95)\qquad I^{(0)} = -im\left[(\mathrm{dn}\,w.K_0')_2 - (\mathrm{dn}\,w.K_0')_1\right] = -im\,(\mathrm{dn}\,w.K_0')_1^2.$$

Quant aux deux intégrales doubles $I^{(r'')}$, qui constituent chacune à un facteur près les deux derniers termes de l'expression demandée (90) de Δ_x, les divers éléments φ, h, k qui y interviennent seront de même fournis par le dernier Tableau $\mathfrak{R}$, en y introduisant encore les limites précitées des coordonnées u et v, savoir, $u_1 = 0$, $u_2 = K$, $v_1 = 0$, $v_2 = K'$, c'est-à-dire en y faisant dès lors, eu égard aux définitions (6) des modules k et k' et à la relation (5) :

$$\left\{\begin{array}{llll} \mathrm{cn}^2 u_1 = 1, & \mathrm{cn}^2 u_2 = 0, & \mathrm{dn}^2 u_1 = 1, & \mathrm{dn}^2 u_2 = 1 - k^2 = 1 + \dfrac{l^2}{n^2} = \dfrac{n^2+l^2}{l^2} = -\dfrac{m^2}{n^2}, \\ \mathrm{cn}^2 v_1 = 1, & \mathrm{cn}^2 v_2 = 0, & \mathrm{dn}^2 v_1 = 1, & \mathrm{dn}^2 v_2 = 1 - k'^2 = 1 + \dfrac{m^2}{l^2} = \dfrac{l^2+m^2}{n^2} = -\dfrac{n^2}{l^2}. \end{array}\right.$$

Cela posé, il résulte de ces valeurs qu'il ne sera pas nécessaire de calculer intégralement de cette façon tous les éléments du dit Tableau. En effet, si l'on considère d'abord la valeur de ceux d'entre eux qui représentent des modules ou des paramètres, les trois derniers groupes de ce Tableau $\mathfrak{R}$ fourniront dans ces conditions respectivement les valeurs

$$(\text{II})\quad \begin{cases} k_2^2 = 1 + \dfrac{m^2}{-n^2\operatorname{cn}^2 w + n^2\dfrac{-m^2}{n^2}} = 1 + \dfrac{m^2}{-n^2\operatorname{cn}^2 w - m^2} \\[2ex] \qquad = 1 - \dfrac{m^2}{n^2\operatorname{cn}^2 w + m^2} = \dfrac{n^2\operatorname{cn}^2 w}{n^2\operatorname{cn}^2 w + m^2}, \\[2ex] \operatorname{sn}^2(h_2, k_2) = 1 - \dfrac{\operatorname{dn}^2 u_2}{\operatorname{cn}^2 w} = 1 - \dfrac{-\dfrac{m^2}{n^2}}{\operatorname{cn}^2 w} = 1 + \dfrac{m^2}{n^2\operatorname{cn}^2 w} \\[2ex] \qquad = \dfrac{n^2\operatorname{cn}^2 w + m^2}{n^2\operatorname{cn}^2 w} = \dfrac{1}{k_2^2}, \end{cases}$$

$$(\text{III})\quad \begin{cases} k_3^2 = 1 - \dfrac{m^2}{n^2\operatorname{cn}^2 w + m^2} = \dfrac{n^2\operatorname{cn}^2 w}{n^2\operatorname{cn}^2 w + m^2}, \\[2ex] \operatorname{sn}^2(h_3, k_3) = 1 + \dfrac{m^2}{n^2\operatorname{cn}^2 w} = \dfrac{n^2\operatorname{cn}^2 w + m^2}{n^2\operatorname{cn}^2 w} = \dfrac{1}{k_3^2}, \end{cases}$$

$$(\text{IV})\qquad \operatorname{sn}^2(h_4, k_4) = 1,$$

d'où résulteront immédiatement celles-ci

$$\operatorname{dn}(h_2, k_2) = 0, \qquad \operatorname{dn}(h_3, k_3) = 0, \qquad \operatorname{cn}(h_4, k_4) = 0,$$

et par suite, eu égard à la définition du symbole $\Pi(\omega, h, k)$, savoir

$$(96)\qquad \Pi(\omega, h, k) = \int_0^{\omega} \frac{k^2 \operatorname{sn} h \operatorname{cn} h \operatorname{dn} h \operatorname{sn}^2 \omega}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 h \operatorname{sn}^2 \omega}\, d\omega,$$

les trois conditions, indépendantes de la valeur de l'argument φ :

$$\Pi(\varphi, h_2, k_2) = 0, \qquad \Pi(\varphi, h_3, k_3) = 0, \qquad \Pi(\varphi, h_4, k_4) = 0.$$

L'expression à déterminer, fournie par la formule (86), se réduira donc actuellement à ses seuls deux premiers termes, pour lesquels le premier groupe du même Tableau $\mathfrak{R}$, qu'il sera ainsi seul nécessaire de calculer intégralement, donnera de la même façon les valeurs

$$
(I)\quad \left\{
\begin{aligned}
k_1^2 &= 1 + \frac{m^2}{-n^2\,\mathrm{cn}^2 w + n^2} = 1 + \frac{m^2}{n^2(1-\mathrm{cn}^2 w)} \\
&= 1 + \frac{m^2}{n^2\,\mathrm{sn}^2 w} = \frac{n^2\,\mathrm{sn}^2 w + m^2}{n^2\,\mathrm{sn}^2 w}, \\
\mathrm{sn}^2(h_1, k_1) &= 1 - \frac{1}{\mathrm{cn}^2 w} = -\frac{1-\mathrm{cn}^2 w}{\mathrm{cn}^2 w} = -\frac{\mathrm{sn}^2 w}{\mathrm{cn}^2 w}, \\
\mathrm{sn}^2(\varphi_1^{(1)}, k_1) &= 1 + \frac{m^2}{n^2\,\mathrm{cn}^2 w + l^2} = 1 + \frac{m^2}{n^2(1-\mathrm{sn}^2 w) + l^2} \\
&= 1 + \frac{m^2}{-n^2\,\mathrm{sn}^2 w - m^2} = 1 - \frac{m^2}{n^2\,\mathrm{sn}^2 w + m^2} \\
&= \frac{n^2\,\mathrm{sn}^2 w}{n^2\,\mathrm{sn}^2 w + m^2} = \frac{1}{k_1^2}, \\
\mathrm{sn}^2(\varphi_1^{(2)}, k_1) &= 1,
\end{aligned}
\right.
$$

desquelles il résultera successivement : quant à la première, que le module k_1 actuellement envisagé n'est autre que le module k_0 (93) déjà rencontré tout à l'heure; puis, partant de là, quant à la seconde, que le paramètre correspondant h_1 sera défini par les équations

$$
(97)\qquad k_0^2 = 1 + \frac{m^2}{n^2\,\mathrm{sn}^2 w}, \qquad\qquad \mathrm{sn}^2(h_1, k_0) = -\frac{\mathrm{sn}^2 w}{\mathrm{cn}^2 w};
$$

et enfin, quant aux deux suivantes qui deviennent alors

$$
\mathrm{sn}^2(\varphi_1^{(1)}, k_0) = \frac{1}{k_0^2}, \qquad\qquad \mathrm{sn}^2(\varphi_1^{(2)}, k_0) = 1,
$$

que l'on aura, pour valeurs des arguments φ_1, celles-ci :

$$
\varphi_1^{(1)} = \mathrm{K}_0 + i\mathrm{K}_0', \qquad\qquad \varphi_1^{(2)} = \mathrm{K}_0.
$$

Si donc, nous convenons à présent de représenter par les deux symboles $\Pi[h, k]$ et $\Pi'[h, k]$ les deux fonctions complètes de troisième espèce correspondant à la fonction (96), c'est-à-dire celles définies par les égalités

(98) $$\Pi\,[h,k] = \Pi(\mathrm{K}, h, k), \qquad i\Pi'[h,k] = \Pi(\mathrm{K} + i\mathrm{K}', h, k) - \Pi(\mathrm{K}, h, k),$$

l'expression fournie par la formule (86) se réduira, pour $\varpi = r^2$, simplement à ses deux premiers termes, c'est-à-dire à la suivante

$$\begin{aligned}\mathrm{I}^{(r^2)} &= r\,[\Pi\,(\varphi_1^{(2)}, h_1, k_0) - \Pi\,(\varphi_1^{(1)}, h_1, k_0)] \\ &= r\,[\Pi\,(\mathrm{K}_0, h_1, k_0) - \Pi\,(\mathrm{K}_0 + i\mathrm{K}_0', h_1, k_0)] = -\,r.i\Pi'[h_1, k_0],\end{aligned}$$

dans laquelle il faudra prendre pour r, d'après la définition (32) et la convention alors entendue quant au double signe, la valeur $r = -\,in\,\mathrm{cn}\,w$, du moment que la coordonnée w est négative, avons-nous dit (page 77), pour tous les points du corps actuellement considéré, de telle sorte que la dite expression sera plus clairement

(99) $$\mathrm{I}^{(r^2)} = in\,\mathrm{cn}\,w.i\Pi'[h_1, k_0],$$

et dès lors, en remettant cette dernière valeur dans la formule (90) en même temps que celle (95) obtenue tout à l'heure pour $\mathrm{I}^{(0)}$, l'on aura définitivement pour le résultat cherché

$$\begin{aligned}\Delta_x &= -\,ln.im\,(\mathrm{dn}\,w.\mathrm{K}_0')_1^2 + m(-in)\Big(\mathrm{sn}\,w\,\mathrm{dn}\,w.in\,\mathrm{cn}\,w.i\Pi'[h_1, k_0]\Big)_1^2, \\ &= -\,l.in\left(m\,\mathrm{dn}\,w.\mathrm{K}_0' + \frac{min}{l}\,\mathrm{sn}\,w\,\mathrm{cn}\,w\,\mathrm{dn}\,w.i\Pi'\,[h_1, k_0]\right)_1^2,\end{aligned}$$

et dès lors, la formule primordiale (17) donnera, pour la composante demandée X, l'expression également définitive

(100) $$\mathrm{X} = \frac{-\mathrm{fD}}{l.in}\,\Delta_x = \mathrm{fD}\left(m\,\mathrm{dn}\,w.\mathrm{K}_0' + \frac{min}{l}\,\mathrm{sn}\,w\,\mathrm{cn}\,w\,\mathrm{dn}\,w.i\Pi'[h_1, k_0]\right)_1^2,$$

les indices 1 et 2 se rapportant aux limites de la variable w, et les symboles h_1, k_0, et K_0' tenant lieu des quantités définies par les équations (97) et (94).

Vérification du résultat qui précède par un calcul direct au moyen des Coordonnées Rectilignes. — L'exemple que nous venons de traiter est intéressant, non pas seulement à titre d'application de nos résultats, mais principalement en ce qu'il

se prête à une vérification directe à l'aide de l'instrument habituel des Coordonnées Rectilignes. Ce dernier calcul, en effet, assez laborieux il est vrai, mais en réalité plus long que difficile, nous fournira une vérification qui, outre son intérêt analytique propre, ne saurait être considérée comme indifférente ou inopportune, quant à l'objet même de ce premier Chapitre, et mérite encore, à ce seul titre, croyons-nous, la peine d'être poursuivie, au moment surtout où nous nous apprêtons à étendre la même méthode et les mêmes calculs au Cas général, beaucoup plus difficile et plus compliqué, d'un point attiré de situation quelconque par rapport au Solide envisagé.

Pour effectuer cette même intégration triple en Coordonnées Rectilignes, la première, et peut-être la principale difficulté qui se présentera, étant d'apercevoir d'une façon claire et certaine les limites que l'on devra assigner successivement à chaque variable, nous pensons devoir atténuer autant que possible cette difficulté, en nous arrangeant de manière que les intégrations relatives aux différentes variables se succèdent dans le même ordre où l'on a l'habitude de les envisager dans l'Enseignement Classique pour la Théorie des Cubatures en général, et de telle sorte, par conséquent, que les figures représentatives des opérations analytiques soient disposées de la même façon. Il sera nécessaire pour cela que nous nous proposions de calculer la composante Z au lieu de celle X envisagée dans la Théorie qui précède, nous réservant alors, une fois le résultat obtenu pour la première, d'en déduire immédiatement l'expression de la seconde par la simple permutation circulaire, dans ce résultat, des trois paramètres a, b, c, laquelle correspond géométriquement à une permutation analogue des trois axes de coordonnées.

Dans la même pensée, nous proposant donc de calculer la troisième des composantes (16), savoir

$$(101)\quad \left\{ \begin{aligned} Z &= f\, \mathbf{S} \frac{z}{\rho^3} d\mathfrak{M} = f \iiint \frac{z\,.\,D dx dy dz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= fD \iiint \mathfrak{O}_z dx dy dz = fD\,.\,I_z, \end{aligned} \right.$$

en faisant successivement, pour abréger les écritures ultérieures,

$$(102) \qquad \mathcal{D}_z = \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad I_z = \iiint \mathcal{D}_z dxdydz,$$

nous faciliterons encore notablement l'intelligence des raisonnements et des calculs, en interprétant la détermination de l'intégrale triple en question I_z comme l'évaluation de la masse d'un certain Corps de densité variable, à savoir celui qui, affectant le même volume que le Solide envisagé, aurait en chaque point sa densité exprimée par la fonction $\mathcal{D}_z$, de même que l'on peut interpréter, et le plus souvent avec avantage, toute intégrale double comme la recherche d'un certain volume, ou toute quadrature comme le calcul d'une certaine aire.

Partant en conséquence de cette donnée, et considérant l'Octant, renfermé dans l'angle trièdre des coordonnées positives, de la Croûte ou Écorce Ellipsoïdale comprise entre les deux Ellipsoïdes

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad \frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}+\frac{z^2}{c'^2}=1,$$

supposés homofocaux, c'est-à-dire tels que l'on a

$$(103) \qquad \begin{cases} a^2-b^2=a'^2-b'^2=l^2, & b^2-c^2=b'^2-c'^2=m^2, \\ & c^2-a^2=c'^2-a'^2=n^2, \end{cases}$$

nous découperons, suivant l'usage, ce Corps en tranches infiniment minces par des plans perpendiculaires à l'axe des x, et la première question qui s'imposera consistera dès lors à calculer la masse de l'une quelconque de ces tranches d'épaisseur dx.

A cet effet, nous les répartirons d'abord en deux catégories, en partageant de la même façon le Solide proposé en deux portions par un plan normal à l'axe des x mené par le sommet A, relatif à cet axe, de l'Ellipsoïde intérieur, et alors, pour le Segment ainsi détaché EAFA′ (fig. 4), lequel est emprunté en entier à l'autre Ellipsoïde, le mode de décomposition en éléments de l'intégrale triple relative à cette portion, et par conséquent aussi les limites relatives à chaque variable dans l'intégration

triple, seront évidemment les mêmes que pour la recherche classique du volume de ce Segment, c'est-à-dire que la partie correspondante de l'intégrale I_z sera représentée par le symbole

$$(104) \qquad G_z = \int_a^{a'} \left[\int_0^{b'\sqrt{1-\frac{x^2}{a'^2}}} \left(\int_0^{c'\sqrt{1-\frac{x^2}{a'^2}-\frac{y^2}{b'^2}}} \Theta_z dz \right) dy \right] dx.$$

Quant à l'autre portion du Solide comprise entre les abscisses $x = 0$ et $x = a$, et dans laquelle les diverses tranches précitées

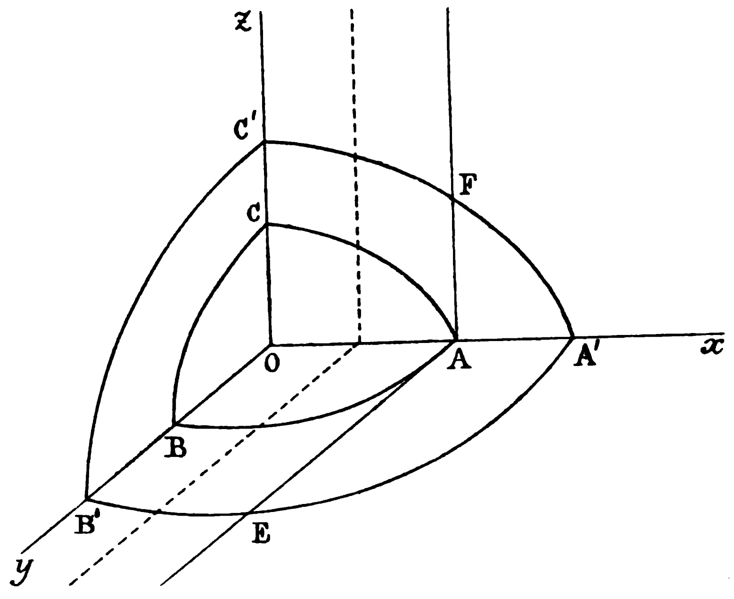


Fig. 4.

affectent la forme d'un Quadrant de Couronne Elliptique, pour évaluer la masse de celle de ces tranches qui correspond à l'abscisse x, marquée en pointillé sur la figure ci-dessus, et dont l'aire est par conséquent comprise entre les deux Ellipses

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}, \qquad \frac{y^2}{b'^2} + \frac{z^2}{c'^2} = 1 - \frac{x_1^2}{a'^2},$$

nous la partagerons semblablement en deux fractions par un

plan IG normal à l'extrémité du grand axe de l'Ellipse intérieure, c'est-à-dire par le plan $y = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$; pour la première fraction de cette tranche, située au delà de ce plan dans la direction

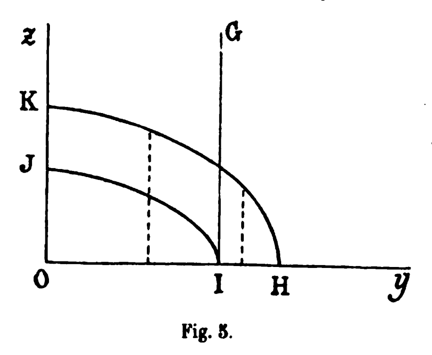


Fig. 5.

des y positifs (Fig. 5), et dont la section sera empruntée ainsi tout entière à l'aire de la seconde Ellipse, sa masse sera évidemment représentée par l'expression

$$\left[\int_{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b'\sqrt{1-\frac{x^2}{a'^2}}}\left(\int_0^{c'\sqrt{1-\frac{x^2}{a'^2}-\frac{y^2}{b'^2}}}(\rho)_z dz\right)dy\right]dx;$$

et quant à la seconde fraction, sise en deçà du même plan IG, sa masse aura semblablement pour expression

$$\left[\int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\left(\int_{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{c'\sqrt{1-\frac{x^2}{a'^2}-\frac{y^2}{b'^2}}}(\rho)_z dz\right)dy\right]dx,$$

la somme de ces deux expressions différentielles représentant dès lors la masse d'une quelconque des tranches empruntées à la seconde portion du Solide.

Si donc l'on intègre ensuite par rapport à x, entre les limites 0 et a, successivement chacune de ces deux dernières expressions, on obtiendra ainsi les deux nouvelles intégrales triples

$$(105)\qquad H_z = \int_0^a \left[\int_{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b'\sqrt{1-\frac{x^2}{a'^2}}} \left(\int_0^{c'\sqrt{1-\frac{x^2}{a'^2}-\frac{y^2}{b'^2}}} \Phi_z dz \right) dy \right] dx,$$

et

$$(106)\qquad K_z = \int_0^a \left[\int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \left(\int_{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{c'\sqrt{1-\frac{x^2}{a'^2}-\frac{y^2}{b'^2}}} \Phi_z dz \right) dy \right] dx,$$

dont l'ensemble représentera la masse de la seconde portion ci-dessus spécifiée du Solide; et l'intégrale triple cherchée I_z, relative à la totalité de ce Solide, sera dès lors exprimée par la somme des trois termes

$$(107)\qquad I_z = G_z + H_z + K_z,$$

dont chacun se calculera sans peine à présent, de la façon suivante.

Effectuant d'abord, pour les trois intégrales triples en question, les deux premières intégrations seulement, parce qu'elles procéderont pour ces trois intégrales de formules de quadrature communes, quant à la première G_z tout d'abord, la formule évidente où k est une constante

$$\int (k^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} z dz = -(k^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} + \text{const.},$$

donnera successivement, en ayant égard d'abord à la définition (102) du symbole Φ_z, puis tenant compte ensuite des hypothèses (103),

$$\int \Phi_z dz = \int (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} z dz = -(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} + \text{const.},$$

$$(108)\quad \left\{ \begin{aligned} \int_0^{c'\sqrt{1-\frac{x^2}{a'^2}-\frac{y^2}{b'^2}}} \Phi_z dz &= -\left[(x^2+y^2) + c'^2\left(1 - \frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2}\right)\right]^{-\frac{1}{2}} + (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} \\ &= -\left[c'^2 + x^2\left(1 - \frac{c'^2}{a'^2}\right) + y^2\left(1 - \frac{c'^2}{b'^2}\right)\right]^{-\frac{1}{2}} + (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{c'^2 - \frac{n^2x^2}{a'^2} + \frac{m^2y^2}{b'^2}}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}; \end{aligned} \right.$$

puis, cela fait, quant à la seconde intégration, l'autre formule connue

$$(109)\qquad \int \frac{dz}{\sqrt{k^2+z^2}} = \log\left(z+\sqrt{k^2+z^2}\right) + \text{const.},$$

donnera semblablement, à tour de rôle, au moyen des mêmes procédés

$$(110)\left\{\begin{aligned}&\int\left(\int_0^{c'\sqrt{1-\frac{x^2}{a'^2}-\frac{y^2}{b'^2}}}\mathfrak{D}_z dz\right)dy = -\int\frac{dy}{\sqrt{c'^2-\frac{n^2x^2}{a'^2}+\frac{m^2y^2}{b'^2}}}+\int\frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ &= -\frac{b'}{m}\log\left(\frac{my}{b'}+\sqrt{c'^2-\frac{n^2x^2}{a'^2}+\frac{m^2y^2}{b'^2}}\right)+\log\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)+\text{const.},\end{aligned}\right.$$

$$(111)\left\{\begin{aligned}&\int_0^{b'\sqrt{1-\frac{x^2}{a'^2}}}\left(\int_0^{c'\sqrt{1-\frac{x^2}{a'^2}-\frac{y^2}{b'^2}}}\mathfrak{D}_z dz\right)dy\\ &= -\frac{b'}{m}\left[\log\left(\frac{m}{b'}b'\sqrt{1-\frac{x^2}{a'^2}}+\sqrt{c'^2-\frac{n^2x^2}{a'^2}+\frac{m^2}{b'^2}b'^2\left(1-\frac{x^2}{a'^2}\right)}\right)\right.\\ &\qquad\qquad\left.-\log\sqrt{c'^2-\frac{n^2x^2}{a'^2}}\right]\\ &\quad+\left[\log\left(b'\sqrt{1-\frac{x^2}{a'^2}}+\sqrt{x^2+b'^2\left(1-\frac{x^2}{a'^2}\right)}\right)-\log x\right]\\ &= -\frac{b'}{m}\left[\log\frac{1}{a'}\left(m\sqrt{a'^2-x^2}+\sqrt{a'^2(c'^2+m^2)-(n^2+m^2)x^2}\right)\right.\\ &\qquad\qquad\left.-\log\frac{1}{a'}\sqrt{c'^2a'^2-n^2x^2}\right]\\ &\quad+\left[\log\frac{1}{a'}\left(b'\sqrt{a'^2-x^2}+\sqrt{a'^2b'^2+(a'^2-b'^2)x^2}\right)-\log x\right]\\ &= -\frac{b'}{m}\left[\log\frac{1}{a'}\left(m\sqrt{a'^2-x^2}+\sqrt{a'^2b'^2+l^2x^2}\right)\right.\\ &\qquad\qquad\left.-\left\{\frac{1}{2}\log(c'^2a'^2-n^2x^2)-\log a'\right\}\right]\\ &\quad+\left[\log\frac{1}{a'}\left(b'\sqrt{a'^2-x^2}+\sqrt{a'^2b'^2+l^2x^2}\right)-\log x\right],\end{aligned}\right.$$

et le premier terme de la somme à calculer G_s (104) sera réduit dès lors aux quadratures simples :

(112)
$$\begin{aligned}
G_s &= \int_a^{a'}\left[\int_0^{b'\sqrt{1-\frac{x^2}{a'^2}}}\left(\int_0^{c'\sqrt{1-\frac{x^2}{a'^2}-\frac{y^2}{b'^2}}}\Phi_s dz\right)dy\right]dx \\
&= -\frac{b'}{m}\int_a^{a'}\log\frac{1}{a'}\left(m\sqrt{a'^2-x^2}+\sqrt{a'^2b'^2+l^2x^2}\right)dx \\
&\qquad + \frac{b'}{2m}\int_a^{a'}\log\left(c'^2a'^2-n^2x^2\right)dx \\
&\quad + \int_a^{a'}\log\frac{1}{a'}\left(b'\sqrt{a'^2-x^2}+\sqrt{a'^2b'^2+l^2x^2}\right) \\
&\qquad - \frac{b'}{m}\log a'\int_a^{a'}dx - \int_a^{a'}\log x\,dx.
\end{aligned}$$

Exactement de la même façon, quant à la seconde intégrale H_s, la formule de quadrature (110) donnera sans peine, en profitant, pour le calcul des termes relatifs à la limite supérieure de l'intégration en y, des réductions déjà reconnues et opérées quant à cette même limite dans le calcul du troisième membre des égalités suivantes (111),

(113)
$$\begin{aligned}
&\int_{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b'\sqrt{1-\frac{x^2}{a'^2}}}\left(\int_0^{c'\sqrt{1-\frac{x^2}{a'^2}-\frac{y^2}{b'^2}}}\Phi_s dz\right)dy \\
&= -\frac{b'}{m}\left[\log\frac{1}{a'}\left(m\sqrt{a'^2-x^2}+\sqrt{a'^2b'^2+l^2x^2}\right)\right. \\
&\left. - \log\frac{1}{a}\left(\frac{mb}{b'}\sqrt{a^2-x^2}+\sqrt{a^2c'^2+\frac{m^2a^2b^2}{b'^2}-\left(\frac{n^2a^2}{a'^2}+\frac{m^2b^2}{b'^2}\right)x^2}\right)\right] \\
&+ \left[\log\frac{1}{a'}\left(b'\sqrt{a'^2-x^2}+\sqrt{a'^2b'^2+l^2x^2}\right)\right. \\
&\qquad \left. - \log\frac{1}{a}\left(b\sqrt{a^2-x^2}+\sqrt{a^2b^2+l^2x^2}\right)\right],
\end{aligned}$$

et par conséquent le second terme à calculer H_z (105) sera réduit de même aux intégrales simples :

(114)
$$
\begin{aligned}
H_z &= \int_0^a \left[\int_{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b'\sqrt{1-\frac{x^2}{a'^2}}} \left(\int_0^{c'\sqrt{1-\frac{x^2}{a'^2}-\frac{y^2}{b'^2}}} \Phi_z dz \right) dy \right] dx \\
&= -\frac{b'}{m}\int_0^a \log\frac{1}{a'}\left(m\sqrt{a'^2-x^2}+\sqrt{a'^2b'^2+l^2x^2}\right)dx \\
&\quad + \frac{b'}{m}\int_0^a \log\frac{1}{a}\left(\frac{mb}{b'}\sqrt{a^2-x^2}\right. \\
&\qquad\qquad \left. + \sqrt{a^2c'^2+\frac{m^2a^2b^4}{b'^2}-\left(\frac{n^2a^2}{a'^2}+\frac{m^2b^2}{b'^2}\right)x^2}\right)dx \\
&\quad + \int_0^a \log\frac{1}{a'}\left(b'\sqrt{a'^2-x^2}+\sqrt{a'^2b'^2+l^2x^2}\right)dx \\
&\quad - \int_0^a \log\frac{1}{a}\left(b\sqrt{a^2-x^2}+\sqrt{a^2b^2+l^2x^2}\right)dx.
\end{aligned}
$$

Enfin, relativement à la troisième intégrale en question K_z, ayant

(115)
$$
\int_{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{c'\sqrt{1-\frac{x^2}{a'^2}-\frac{y^2}{b'^2}}} \Phi_z dz = \int_0^{c'\sqrt{1-\frac{x^2}{a'^2}-\frac{y^2}{b'^2}}} \Phi_z dz - \int_0^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} \Phi_z dz,
$$

la formule ci-dessus (108), que nous allons récrire ici d'abord pour plus de commodité, nous donnera ensuite, en y effaçant simplement les accents,

$$
\left\{
\begin{aligned}
\int_0^{c'\sqrt{1-\frac{x^2}{a'^2}-\frac{y^2}{b'^2}}} \Phi_z dz &= -\left(c'^2-\frac{n^2x^2}{a'^2}+\frac{m^2y^2}{b'^2}\right)^{-\frac{1}{2}}+(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}, \\
\int_0^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} \Phi_z dz &= -\left(c^2-\frac{n^2x^2}{a^2}+\frac{m^2y^2}{b^2}\right)^{-\frac{1}{2}}+(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}},
\end{aligned}
\right.
$$

et nous en conclurons d'abord, en faisant la différence de ces deux résultats, puis appliquant la remarque précédente (115),

$$\int_{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{c'\sqrt{1-\frac{x^2}{a'^2}-\frac{y^2}{b'^2}}} \mathfrak{D}_z dz = -\frac{1}{\sqrt{c'^2-\frac{n^2x^2}{a'^2}+\frac{m^2y^2}{b'^2}}}+\frac{1}{\sqrt{c^2-\frac{n^2x^2}{a^2}+\frac{m^2y^2}{b^2}}},$$

puis de là, en employant de nouveau la formule de quadrature (109),

$$\int\left(\int_{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{c'\sqrt{1-\frac{x^2}{a'^2}-\frac{y^2}{b'^2}}} \mathfrak{D}_z dz\right)dy = -\frac{b'}{m}\log\left(\frac{my}{b'}+\sqrt{c'^2-\frac{n^2x^2}{a'^2}+\frac{m^2y^2}{b'^2}}\right)$$
$$+\frac{b}{m}\log\left(\frac{my}{b}+\sqrt{c^2-\frac{n^2x^2}{a^2}+\frac{m^2y^2}{b^2}}\right)+\text{const.},$$

et enfin, en passant aux limites de l'intégration en y, et effectuant les mêmes transformations que lors des égalités ci-dessus (111) et (113),

$$\int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\left(\int_{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{c'\sqrt{1-\frac{x^2}{a'^2}-\frac{y^2}{b'^2}}} \mathfrak{D}_z dz\right)dy$$

$$=-\frac{b'}{m}\left[\log\left(\frac{mb}{b'}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}+\sqrt{c'^2-\frac{n^2x^2}{a'^2}+\frac{m^2b^2}{b'^2}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\log\left(c'^2-\frac{n^2x^2}{a'^2}\right)\right]$$
$$+\frac{b}{m}\left[\log\left(\frac{mb}{b}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}+\sqrt{c^2-\frac{n^2x^2}{a^2}+\frac{m^2b^2}{b^2}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\log\left(c^2-\frac{n^2x^2}{a^2}\right)\right]$$

$$= -\frac{b'}{m}\left[\log\frac{1}{a}\left(\frac{mb}{b'}\sqrt{a^2-x^2}+\sqrt{a^2c'^2+\frac{m^2a^2b^2}{b'^2}-\left(\frac{n^2a^2}{a'^2}+\frac{m^2b^2}{b'^2}\right)x^2}\right)\right.$$
$$\left.-\left\{\frac{1}{2}\log(c'^2a'^2-n^2x^2)-\log a'\right\}\right]$$
$$+\frac{b}{m}\left[\log\frac{1}{a}\left(m\sqrt{a^2-x^2}+\sqrt{a^2b^2+l^2x^2}\right)-\left\{\frac{1}{2}\log(c^2a^2-n^2x^2)-\log a\right\}\right],$$

expression qui, étant intégrée de nouveau par rapport à x, donnera en fin de compte pour le troisième terme à calculer K_z (106), la réduction aux quadratures simples représentée par la formule :

$$(116)\left\{\begin{aligned}
K_z = &\int_0^a\left[\int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\left(\int_{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{c'\sqrt{1-\frac{x^2}{a'^2}-\frac{y^2}{b'^2}}}\mathcal{Q}_z dz\right)dy\right]dx\\
= &\left[-\frac{b'}{m}\int_0^a\log\frac{1}{a}\left(\frac{mb}{b'}\sqrt{a^2-x^2}+\sqrt{a^2c'^2+\frac{m^2a^2b^2}{b'^2}-\left(\frac{n^2a^2}{a'^2}+\frac{m^2b^2}{b'^2}\right)x^2}\right)dx\right.\\
&\left.+\frac{b'}{2m}\int_0^a\log(c'^2a'^2-n^2x^2)\,dx-\frac{b'}{m}\log a'\int_0^a dx\right]\\
+ &\left[\frac{b}{m}\int_0^a\log\frac{1}{a}\left(m\sqrt{a^2-x^2}+\sqrt{a^2b^2+l^2x^2}\right)dx\right.\\
&\left.-\frac{b}{2m}\int_0^a\log(c^2a^2-n^2x^2)\,dx+\frac{b}{m}\log a\int_0^a dx\right].
\end{aligned}\right.$$

En ajoutant dès lors les trois expressions ainsi obtenues (112), (114), et (116), et réunissant les intégrales qui ne différeront alors que par les limites, on trouvera donc ainsi, pour la somme cherchée I_z (107), d'abord la valeur



$$I_2=\Bigg[-\frac{b'}{m}\int_a^{a'}\log\frac{1}{a'}\left(m\sqrt{a'^2-x^2}+\sqrt{a'^2b'^2+l^2x^2}\right)dx$$

$$+\frac{b'}{2m}\int_a^{a'}\log(c'^2a'^2-n^2x^2)dx+\int_a^{a'}\log\frac{1}{a'}\left(b'\sqrt{a'^2-x^2}+\sqrt{a'^2b'^2+l^2x^2}\right)dx$$

$$-\frac{b'}{m}\log a'\int_a^{a'}dx-\int_a^{a'}\log x\,dx\Bigg]$$

$$+\Bigg[-\frac{b'}{m}\int_0^{a}\log\frac{1}{a'}\left(m\sqrt{a'^2-x^2}+\sqrt{a'^2b'^2+l^2x^2}\right)dx$$

$$+\frac{b'}{m}\int_0^{a}\log\frac{1}{a}\left(\frac{mb}{b'}\sqrt{a^2-x^2}+\sqrt{a^2c'^2+\frac{m^2a^2b^2}{b'^2}-\left(\frac{n^2a^2}{a'^2}+\frac{m^2b^2}{b'^2}\right)x^2}\right)dx$$

$$+\int^{a}\log\frac{1}{a'}\left(b'\sqrt{a'^2-x^2}+\sqrt{a'^2b'^2+l^2x^2}\right)dx$$

$$-\int_0^{a}\log\frac{1}{a}\left(b\sqrt{a^2-x^2}+\sqrt{a^2b^2+l^2x^2}\right)dx\Bigg]$$

$$+\Bigg[-\frac{b'}{m}\int_0^{a}\log\frac{1}{a}\left(\frac{mb}{b'}\sqrt{a^2-x^2}+\sqrt{a^2c'^2+\frac{m^2a^2b^2}{b'^2}-\left(\frac{n^2a^2}{a'^2}+\frac{m^2b^2}{b'^2}\right)x^2}\right)dx$$

$$+\frac{b'}{2m}\int_0^{a}\log(c'^2a'^2-n^2x^2)\,dx-\frac{b'}{m}\log a'\int_0^{a}dx$$

$$+\frac{b}{m}\int_0^{a}\log\frac{1}{a}\left(m\sqrt{a^2-x^2}+\sqrt{a^2b^2+l^2x^2}\right)dx$$

$$-\frac{b}{2m}\int_0^{a}\log(c^2a^2-n^2x^2)\,dx+\frac{b}{m}\log a\int_0^{a}dx\Bigg],$$

c'est-à-dire, après réduction, simplement la suivante :

$$
(117)\quad \left\{
\begin{aligned}
\mathrm{I}_z = & -\frac{b'}{m}\int_0^{a'} \log\frac{1}{a'}\left(m\sqrt{a'^2-x^2}+\sqrt{a'^2b'^2+l^2x^2}\right)dx \\
& + \frac{b'}{2m}\int_0^{a'} \log\left(c'^2a'^2-n^2x^2\right)dx \\
& + \int_0^{a'} \log\frac{1}{a'}\left(b'\sqrt{a'^2-x^2}+\sqrt{a'^2b'^2+l^2x^2}\right)dx - \frac{b'}{m}\log a'\int_0^{a'} dx \\
& - \int_a^{a'} \log x\,dx - \int_0^{a} \log\frac{1}{a}\left(b\sqrt{a^2-x^2}+\sqrt{a^2b^2+l^2x^2}\right)dx \\
& + \frac{b}{m}\int_0^{a} \log\frac{1}{a}\left(m\sqrt{a^2-x^2}+\sqrt{a^2b^2+l^2x^2}\right)dx \\
& - \frac{b}{2m}\int_0^{a} \log\left(c^2a^2-n^2x^2\right)dx + \frac{b}{m}\log a\int_0^{a} dx.
\end{aligned}
\right.
$$

Or, si l'on excepte l'intégrale $\int_a^{a'} \log x\,dx$ qui sera fournie par les formules classiques

$$\int \log x\,dx = x\log x - \int x\frac{dx}{x} = x\log x - x + \text{const},$$

$$(118)\qquad \int_a^{a'} \log x\,dx = a'\log a' - a\log a - (a'-a),$$

toutes les autres quadratures qui figurent dans la dernière expression que nous venons d'obtenir pour I_z sont empruntées à l'un ou à l'autre des deux types

$$\int \log\left(c^2a^2-n^2x^2\right)dx,\qquad \int \log\frac{1}{a}\left(k\sqrt{a^2-x^2}+\sqrt{a^2b^2+l^2x^2}\right)dx,$$

l^2, m^2, n^2 étant toujours les premières valeurs (103), et k une constante quelconque, quadratures dont on trouve aisément les expressions, également à l'aide de l'intégration par parties combinée avec les transformations suivantes.

Pour le premier type, en effet, on trouve ainsi successivement

$$\int \log(c^2a^2 - n^2x^2)dx = x\log(c^2a^2 - n^2x^2) - 2\int \frac{-n^2x^2}{c^2a^2 - n^2x^2}\,dx$$

$$= x\log(c^2a^2 - n^2x^2) - 2\int\left(1 - \frac{c^2a^2}{c^2a^2 - n^2x^2}\right)dx$$

$$= x\log(c^2a^2 - n^2x^2) - 2x + 2\int \frac{c^2a^2 . \,dx}{c^2a^2 - n^2x^2},$$

et en observant que, pour la valeur $x = a$, on aura

$$(c^2a^2 - n^2x^2)_{x=a} = c^2a^2 - (c^2 - a^2)\,a^2 = a^4,$$

on obtiendra définitivement l'expression :

$$(119)\qquad \int_0^a \log(c^2a^2 - n^2x^2)\,dx = 4a\log a - 2a + 2\int_0^a \frac{c^2a^2 . \,dx}{c^2a^2 - n^2x^2}.$$

De même, pour le second type, on trouvera successivement

$$(120)\quad\left\{\begin{aligned}
&\int \log\frac{1}{a}\left(k\sqrt{a^2-x^2}+\sqrt{a^2b^2+l^2x^2}\right)dx\\
&= x\log\frac{1}{a}\left(k\sqrt{a^2-x^2}+\sqrt{a^2b^2+l^2x^2}\right) - \int x\,\frac{\dfrac{-kx}{\sqrt{a^2-x^2}} + \dfrac{l^2x}{\sqrt{a^2b^2+l^2x^2}}}{k\sqrt{a^2-x^2}+\sqrt{a^2b^2+l^2x^2}}\,dx\\
&= x\log\frac{1}{a}\left(k\sqrt{a^2-x^2}+\sqrt{a^2b^2+l^2x^2}\right)\\
&+\int x^2\,\frac{\left(\dfrac{k}{\sqrt{a^2-x^2}} - \dfrac{l^2}{\sqrt{a^2b^2+l^2x^2}}\right)\left(k\sqrt{a^2-x^2}-\sqrt{a^2b^2+l^2x^2}\right)}{\left(k\sqrt{a^2-x^2}+\sqrt{a^2b^2+l^2x^2}\right)\left(k\sqrt{a^2-x^2}-\sqrt{a^2b^2+l^2x^2}\right)}\,dx\\
&= x\log\frac{1}{a}\left(k\sqrt{a^2-x^2}+\sqrt{a^2b^2+l^2x^2}\right)\\
&+\int \frac{k^2+l^2-k\left(l^2\sqrt{\dfrac{a^2-x^2}{a^2b^2+l^2x^2}}+\sqrt{\dfrac{a^2b^2+l^2x^2}{a^2-x^2}}\right)}{k^2(a^2-x^2)-(a^2b^2+l^2x^2)}\,x^2dx.
\end{aligned}\right.$$

Or si l'on fait à présent, dans la dernière intégrale que nous venons d'écrire, en premier lieu $k = b$, elle deviendra, en tenant compte encore des définitions (103),

$$\int \frac{b^2 + (a^2 - b^2) - b\left(l^2\sqrt{\dfrac{a^2 - x^2}{a^2b^2 + l^2x^2}} + \sqrt{\dfrac{a^2b^2 + l^2x^2}{a^2 - x^2}}\right)}{b^2(a^2 - x^2) - (a^2b^2 + l^2x^2)}\, x^2 dx$$

$$= \int \frac{a^2 - b\,\dfrac{l^2(a^2 - x^2) + (a^2b^2 + l^2x^2)}{\sqrt{a^2b^2 + l^2x^2}\sqrt{a^2 - x^2}}}{(-b^2 - l^2)\,x^2}\, x^2 dx$$

$$= - \int \frac{a^2 - b\,\dfrac{(a^2 - b^2)\,a^2 + a^2b^2}{\sqrt{(a^2b^2 + l^2x^2)(a^2 - x^2)}}}{b^2 + (a^2 - b^2)}\, dx$$

$$= - \int \left[1 - \frac{b}{a^2}\,\frac{a^4}{\sqrt{(a^2 - x^2)(a^2b^2 + l^2x^2)}}\right] dx$$

$$= - x + ba^2 \int \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)(a^2b^2 + l^2x^2)}};$$

et si l'on y fait en second lieu $k = m = \sqrt{b^2 - c^2}$, elle deviendra semblablement :

$$\int \frac{m^2 + l^2 - m\left(l^2\sqrt{\dfrac{a^2 - x^2}{a^2b^2 + l^2x^2}} + \sqrt{\dfrac{a^2b^2 + l^2x^2}{a^2 - x^2}}\right)}{(b^2 - c^2)(a^2 - x^2) - (a^2b^2 + l^2x^2)}\, x^2 dx$$

$$= \int \frac{-n^2 - m\,\dfrac{l^2(a^2 - x^2) + (a^2b^2 + l^2x^2)}{\sqrt{a^2b^2 + l^2x^2}\sqrt{a^2 - x^2}}}{(a^2b^2 - a^2c^2 - m^2x^2) - (l^2x^2 + a^2b^2)}\, x^2 dx$$

$$= \int \frac{-n^2x^2 - mx^2\,\dfrac{(a^2 - b^2)\,a^2 + a^2b^2}{\sqrt{(a^2b^2 + l^2x^2)(a^2 - x^2)}}}{-a^2c^2 - (m^2 + l^2)\,x^2}\, dx$$

$$= -\int \frac{(a^2c^2 - n^2x^2) - a^2c^2 - mx^2 \dfrac{a^4}{\sqrt{(a^2b^2 + l^2x^2)(a^2 - x^2)}}}{a^2c^2 - n^2x^2} dx$$

$$= -\int \left[1 - \frac{a^2c^2}{a^2c^2 - n^2x^2} - \frac{ma^4 . x^2}{(a^2c^2 - n^2x^2)\sqrt{(a^2b^2 + l^2x^2)(a^2 - x^2)}}\right] dx$$

$$= -x + \int \frac{a^2c^2 . dx}{a^2c^2 - n^2x^2} + ma^4 \int \frac{x^2dx}{(c^2a^2 - n^2x^2)\sqrt{(a^2 - x^2)(a^2b^2 + l^2x^2)}}.$$

Par conséquent, la suite d'égalités (120), en n'envisageant plus que les membres extrêmes seulement, fournira dans le premier cas, nous voulons dire pour $k = b$, la formule de quadrature indéfinie

$$\int \log \frac{1}{a}\left(b\sqrt{a^2 - x^2} + \sqrt{a^2b^2 + l^2x^2}\right) dx = x \log \frac{1}{a}\left(b\sqrt{a^2 - x^2} + \sqrt{a^2b^2 + l^2x^2}\right)$$
$$- x + ba^2 \int \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)(a^2b^2 + l^2x^2)}},$$

et dans le second cas, c'est-à-dire pour $k = m$, l'autre formule analogue

$$\int \log \frac{1}{a}\left(m\sqrt{a^2 - x^2} + \sqrt{a^2b^2 + l^2x^2}\right) dx$$
$$= x \log \frac{1}{a}\left(m\sqrt{a^2 - x^2} + \sqrt{a^2b^2 + l^2x^2}\right) - x + \int \frac{c^2a^2 . dx}{c^2a^2 - n^2x^2}$$
$$+ ma^4 \int \frac{x^2dx}{(c^2a^2 - n^2x^2)\sqrt{(a^2 - x^2)(a^2b^2 + l^2x^2)}};$$

et si l'on remarque encore que l'on a pour $x = a$

$$\left(\frac{1}{a}\sqrt{a^2b^2 + l^2x^2}\right)_{x=a} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2b^2 + (a^2 - b^2)\,a^2} = \frac{1}{a}\sqrt{a^4} = a,$$

l'on tirera donc successivement de ces deux formules les expressions

$$
(121)\begin{cases}
\displaystyle\int_0^a \log\frac{1}{a}\left(b\sqrt{a^2-x^2}+\sqrt{a^2b^2+l^2x^2}\right)dx \\
\displaystyle\quad = a\log a - a + ba^2\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)(a^2b^2+l^2x^2)}}, \\
\displaystyle\int_0^a \log\frac{1}{a}\left(m\sqrt{a^2-x^2}+\sqrt{a^2b^2+l^2x^2}\right)dx = a\log a - a \\
\displaystyle\quad + \int_0^a \frac{c^2a^2.dx}{c^2a^2-n^2x^2} + ma^4\int_0^a \frac{x^2dx}{(c^2a^2-n^2x^2)\sqrt{(a^2-x^2)(a^2b^2+l^2x^2)}}.
\end{cases}
$$

Dans la dernière de ces formules, de même que dans celle antérieure (119), nous ne prenons pas la peine d'évaluer explicitement la première intégrale du second membre, parce que celle-ci s'exprimant évidemment par un terme logarithmique, nous devons nous attendre à ce qu'elle disparaisse du résultat final, ce qui se produira bien effectivement, ainsi que nous le constaterons dans un instant.

Une fois muni de ces expressions (118), (119), et (121), le développement de la quantité demandée I_2, exprimé par l'égalité précédente (117), s'obtiendra dès lors sans autre difficulté, ainsi qu'il suit,

$$
\begin{aligned}
I_2 = &-\frac{b'}{m}\Bigg[a'\log a' - a' + \int_0^{a'} \frac{c'^2a'^2.dx}{c'^2a'^2-n^2x^2} \\
&\qquad + ma'^4\int_0^{a'} \frac{x^2dx}{(c'^2a'^2-n^2x^2)\sqrt{(a'^2-x^2)(a'^2b'^2+l^2x^2)}}\Bigg] \\
&+\frac{b'}{2m}\left[4a'\log a' - 2a' + 2\int_0^{a'} \frac{c'^2a'^2.dx}{c'^2a'^2-n^2x^2}\right] \\
&+\left[a'\log a' - a' + b'a'^2\int_0^{a'} \frac{dx}{\sqrt{(a'^2-x^2)(a'^2b'^2+l^2x^2)}}\right] \\
&-\frac{b'}{m}\log a'.a' - \left[a'\log a' - a\log a - (a'-a)\right] \\
&-\left[a\log a - a + ba^2\int^a \frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)(a^2b^2+l^2x^2)}}\right]
\end{aligned}
$$

$$+\frac{b}{m}\left[a\log a - a + \int_0^a \frac{c^2a^2 . dx}{c^2a^2 - n^2x^2}\right.$$

$$\left. + ma^4\int_0^a \frac{x^2dx}{(c^2a^2-n^2x^2)\sqrt{(a^2-x^2)(a^2b^2+l^2x^2)}}\right]$$

$$-\frac{b}{2m}\left[4a\log a - 2a + 2\int_0^a \frac{c^2a^2.dx}{c^2a^2-n^2x^2}\right] + \frac{b}{m}\log a.a,$$

c'est-à-dire simplement, toutes réductions faites :

$$(122)\quad \left\{ \begin{aligned} I_2 = b'a'^2 &\left[\int_0^{a'} \frac{dx}{\sqrt{(a'^2-x^2)(a'^2b'^2+l^2x^2)}}\right. \\ &\left. - a'^2\int_0^{a} \frac{x^2dx}{(c'^2a'^2-n^2x^2)\sqrt{(a'^2-x^2)(a'^2b'^2+l^2x^2)}}\right] \\ - ba^2 &\left[\int_0^{a} \frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)(a^2b^2+l^2x^2)}}\right. \\ &\left. - a^2\int_0^{a} \frac{x^2dx}{(c^2a^2-n^2x^2)\sqrt{(a^2-x^2)(a^2b^2+l^2x^2)}}\right]. \end{aligned} \right.$$

Tous les termes algébriques et logarithmiques ont donc bien disparu, et l'expression de la composante cherchée $Z = \int DI_2$ sera donc bien constituée, ainsi que nous l'avions trouvé, de deux intégrales elliptiques, l'une de première, et l'autre de troisième espèce, envisagées chacune successivement pour les deux Surfaces Ellipsoïdales qui limitent, sur deux de ses faces, le Solide proposé.

Toutefois, bien que la concordance des deux résultats soit ainsi établie quant à leurs caractères généraux, leur identité n'est pas encore démontrée par cette seule analyse, attendu que, dans celui que nous venons d'obtenir, le module des deux intégrales elliptiques de première et de troisième espèce est le même, pour chaque surface externe séparément, tandis que dans notre premier résultat, ces deux modules sont complémentaires.

Or ce fait n'introduirait évidemment aucune difficulté pour la comparaison des deux résultats, étant donné les changements de variables très connus qui servent à transformer une intégrale elliptique de première espèce en une autre intégrale semblable de module complémentaire, si les intégrales de troisième espèce avaient la même quantité pour module dans les deux solutions; mais il réclame impérieusement ici de nouveaux développements, en raison de ce que ce sont au contraire, comme on va le voir, les intégrales de première espèce qui ont le même module, tandis que celles de troisième espèce ont des modules complémentaires de part et d'autre, en même temps que des paramètres différents, ce qui constitue dès lors entre les deux résultats une discordance apparente qui sera fort loin d'être aussi facile à réduire.

Pour mettre en lumière d'abord, et aplanir complètement ensuite la difficulté que nous venons de signaler, il faut d'abord commencer, ainsi que nous l'avons annoncé à l'avance, par déduire de l'expression qui précède de I_z, au moyen d'une simple permutation des trois paramètres du Système a, b, c, celle de la quantité analogue I_x, qui représentera, au coefficient constant fD près, la composante X, et en même temps, aussi bien pour procurer une analogie plus complète des diverses notations entre les deux résultats que pour abréger l'écriture du second, nous conviendrons actuellement de désigner respectivement par a_1, b_1, c_1 et a_2, b_2, c_2, au lieu de a, b, c et a', b', c', les demi-axes de chacune des deux Surfaces externes, intérieure et extérieure, du Solide considéré.

Par le moyen de ces deux opérations combinées, il résultera de l'expression obtenue tout à l'heure (122), pour la composante $X = fDI_x$, une nouvelle expression que l'on pourra écrire sous forme plus concise, ainsi qu'il suit

$$X = fD\left[cb^2\left(\int_0^b \frac{dx}{\sqrt{(b^2-x^2)(b^2c^2+m^2x^2)}}\right.\right.$$
$$\left.\left. - b^2\int_0^b \frac{x^2dx}{(a^2b^2-l^2x^2)\sqrt{(b^2-x^2)(b^2c^2+m^2x^2)}}\right)\right]_1^2,$$

les indices 1 ou 2, qui se rapportent aux deux Surfaces externes, devant être appliqués successivement chacun aux trois paramètres a, b, c simultanément : expression que nous pourrons rendre encore plus claire comme signification analytique, en y faisant actuellement $x = bt$, et divisant les deux facteurs du radical commun aux deux intégrales respectivement par b^2 et b^2c^2, en même temps que nous multiplierons dès lors ce radical par b^2c, opérations qui la transformeront dans la suivante :

$$(123)\quad \left\{ \begin{aligned} X = \mathrm{f}D\Bigg[& b\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)\left(1+\frac{m^2}{c^2}t^2\right)}} \\ & - \frac{b^3}{a^2}\int_0^1 \frac{t^2dt}{\left(1-\frac{l^2}{a^2}t^2\right)\sqrt{(1-t^2)\left(1+\frac{m^2}{c^2}t^2\right)}} \Bigg]_1^2. \end{aligned} \right.$$

Or, comparons à présent cette valeur à celle (100) obtenue plus haut comme résultat de notre théorie, laquelle étant développée pourra s'écrire :

$$(124)\quad \left\{ \begin{aligned} X = \mathrm{f}D\Bigg[& \left\{ m \,\mathrm{dn}\, w_2 . K_0'^{(2)} - m \,\mathrm{dn}\, w_1 . K_0'^{(1)} \right\} \\ & + \left(\frac{m . in}{l} \mathrm{sn}\, w_2 \,\mathrm{cn}\, w_2 \,\mathrm{dn}\, w_2 . i\Pi'(h_1^{(2)}, k_0^{(2)}) \right. \\ & \left. - \frac{m . in}{l} \mathrm{sn}\, w_1 \,\mathrm{cn}\, w_1 \,\mathrm{dn}\, w_1 . i\Pi'(h_1^{(1)}, k_0^{(1)}) \right) \Bigg]. \end{aligned} \right.$$

Nous n'aurons pour cela qu'à rappeler l'équation de la famille des Ellipsoïdes dans le système de nos Coordonnées u, v, w, équation qui est

$$\frac{x^2}{(in)^2\,\mathrm{cn}^2\, w} + \frac{y^2}{m^2\,\mathrm{dn}^2\, w} + \frac{z^2}{n^2\,\mathrm{sn}^2\, w} = 1,$$

ainsi que nous le montrons à la page 427 du Tome I de notre *Théorie Nouvelle du Système Orthogonal triplement Isotherme :*

d'où il suit que l'on aura, avec les notations convenues tout à l'heure pour les deux Surfaces Ellipsoïdales qui limitent sur deux faces le Solide

(*)

$$(125)\quad \begin{cases} a_1 = -in.\operatorname{cn} w_1, & b_1 = m \operatorname{dn} w_1, & c_1 = n \operatorname{sn} w_1, \\ a_2 = -in.\operatorname{cn} w_2, & b_2 = m \operatorname{dn} w_2, & c_2 = n \operatorname{sn} w_2, \end{cases}$$

et par conséquent, en se reportant aux définitions (97) du module k_0 et du paramètre h_1, les valeurs de ces quantités, ainsi que celles de k'_0, relatives aux deux Surfaces en question, seront définies respectivement par les égalités :

$$(126)\quad (k_0^{(1)})^2 = 1 + \frac{m^2}{n^2 \operatorname{sn}^2 w_1} = 1 + \frac{m^2}{c_1^2} = \frac{c_1^2 + (b_1^2 - c_1^2)}{c_1^2} = \frac{b_1^2}{c_1^2}, \qquad (k_0^{(2)})^2 = \frac{b_2^2}{c_2^2},$$

$$(127)\quad (k_0'^{(1)})^2 = 1 - (k_0^{(1)})^2 = -\frac{m^2}{c_1^2}, \qquad (k_0'^{(2)}) = -\frac{m^2}{c_2^2},$$

$$(128)\quad \operatorname{sn}^2(h_1^{(1)}, k_0^{(1)}) = -\frac{\operatorname{sn}^2 w_1}{\operatorname{cn}^2 w_1} = \frac{n^2 \operatorname{sn}^2 w_1}{(in)^2 \operatorname{cn}^2 w_1} = \frac{c_1^2}{a_1^2}, \qquad \operatorname{sn}^2(h_1^{(2)}, k_0^{(2)}) = \frac{c_2^2}{a_2^2}.$$

Les deux modules k'_0 ainsi définis étant exactement ceux des intégrales elliptiques qui figurent dans la formule précédente (123), on voit donc ainsi que les intégrales elliptiques de première espèce seront les mêmes dans les deux résultats, et de

(*) Le choix des signes que nous adoptons pour chacune de ces expressions n'est pas arbitraire, mais il est fixé par la nécessité de n'avoir ainsi, pour les six grandeurs géométriques a, b, c, que des valeurs positives. Cela résulte, pour les deux premières de chaque ligne, d'une part, de ce que les cosinus et deltas d'amplitude des trois coordonnées u, v, w demeurent constamment positives, étant donné les limites assignées par définition à leur variation (THÉORIE NOUVELLE DU SYSTÈME TRIPLEMENT ISOTHERME, Tome I, chapitre VI, p. 441, *en haut*), et d'autre part des définitions expresses, quant au signe, des constantes m et n, savoir :

$$m = +\sqrt{b^2 - c^2}, \qquad n = +i\sqrt{a^2 - c^2}.$$

Enfin, quant à la dernière expression de chaque ligne, d'une part, encore de ladite définition de n, et d'autre part, de ce que le sinus d'amplitude étant une fonction paire, ce sont les valeurs *négatives* de w qui correspondent aux valeurs *positives* de z, et par suite qui, caractérisent en particulier tous les points du trièdre des coordonnées planes positives auquel se rapporte la question actuellement traitée. (IBID. *loc. cit*, p. 432, *in medio*.)



plus y entreront multipliées respectivement par les mêmes facteurs, d'après les valeurs ci-dessus (125) de b_1 et b_2, tandis que celles de troisième espèce y différeront à la fois, par les valeurs des modules qui seront complémentaires de part et d'autre, par celle des paramètres et par celle des coefficients.

Cela étant, si après avoir fait sn $(\omega, k_0) = t$ dans l'expression de la fonction complète de troisième espèce $\Pi'(h_1, k_0)$ qui résulte des définitions (96) et (98), ce qui la transformera de la façon suivante

$$(129)\quad \begin{cases} i\Pi'[h_1, k_0] = \displaystyle\int_{K_0}^{K_0+iK'_0} \frac{k_0^2 \operatorname{sn}(h_1, k_0)\operatorname{cn}(h_1, k_0)\operatorname{dn}(h_1, k_0)\,.\operatorname{sn}^2(\omega, k_0)}{1 - k_0^2 \operatorname{sn}^2(h_1, k_0)\operatorname{sn}^2(\omega, k_0)}\,d\omega \\ \qquad = \displaystyle\int_1^{\frac{1}{k_0}} \frac{k_0^2 \operatorname{sn}(h_1 . k_0)\operatorname{cn}(h_1, k_0)\operatorname{dn}(h_1, k_0)\,.\,t^2}{[1 - k_0^2 \operatorname{sn}^2(h_1, k_0)\,.\,t^2]} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k_0^2t^2)}}, \end{cases}$$

l'on emploie ensuite l'une ou l'autre des substitutions classiques

$$(130)\qquad t = \frac{1}{\sqrt{1 - k_0'^2 z^2}}, \qquad \text{ou} \qquad t = \frac{1}{k_0}\sqrt{1 - k_0'^2 z^2},$$

dont l'effet est de transformer, comme on sait, l'expression différentielle

$$\frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - k_0^2 t^2)}} \qquad \text{en} \qquad \frac{\pm\, i.dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k_0'^2 z^2)}},$$

on introduira bien ainsi, à la vérité, pour chaque Surface externe, à la place de cette fonction complète $i\Pi'(h_1, k_0)$, une autre intégrale elliptique de troisième espèce dont les limites seront alors 0 et 1, et le module $k'_0 = \frac{im}{c}$, comme dans la formule (123) que nous nous proposons de retrouver, mais l'identification des deux résultats ne sera pas encore obtenue par ce seul calcul, attendu qu'il s'introduira ainsi du même coup encore une fonction complète de première espèce du même module k'_0, laquelle ne doit pas apparaître dans notre résultat, puisque les termes correspondants aux intégrales de

première espèce sont déjà identiques dans les deux solutions, ainsi que nous l'avons reconnu tout à l'heure.

Il faudra donc encore, pour arriver à l'identité désirée, une opération ultérieure, consistant dans un changement du paramètre h_1 qui figure dans la fonction Π' envisagée, pour pouvoir ensuite fondre à nouveau en une seule fonction de troisième espèce (*) ces deux intégrales, l'une de première et l'autre de

---

(*) La formule connue d'addition des paramètres

$$\Pi(\omega, p+q) = \Pi(\omega, p) + \Pi(\omega, q) - k^2 \operatorname{sn} p \operatorname{sn} q \operatorname{sn}(p+q) \cdot \omega + \frac{1}{4}\log\frac{MN}{PQ},$$

où M, N, P, Q sont, pour abréger, les quantités

$$\begin{cases} M = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2(p-\omega)\operatorname{sn}^2 q, & N = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2 p \operatorname{sn}^2(q-\omega), \\ P = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2(p+\omega)\operatorname{sn}^2 q, & Q = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2 p \operatorname{sn}^2(q+\omega), \end{cases}$$

lesquelles, pour $\omega = K$, donnent manifestement à la fois

$$\frac{M}{P} = \frac{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(p-K)\operatorname{sn}^2 q}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(p+K)\operatorname{sn}^2 q} = 1, \qquad \frac{N}{Q} = \frac{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 p \operatorname{sn}^2(q-K)}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 p \operatorname{sn}^2(q+K)} = 1,$$

fait donc voir immédiatement que la fonction complète $\Pi(K, p+q)$ se réduit ainsi aux trois termes

$$(\alpha) \qquad \Pi(K, p+q) = \Pi(K, p) + \Pi(K, q) - k^2 \operatorname{sn} p \operatorname{sn} q \operatorname{sn}(p+q) \cdot K\,;$$

et dès lors il suffira de prendre pour q l'une des deux valeurs

$$q = K \quad \text{d'où} \quad \operatorname{cn} q = 0, \quad \text{ou} \quad q = K + iK', \quad \text{d'où} \quad \operatorname{dn} q = 0,$$

pour que le second terme $\Pi(K, q)$ disparaisse également, et que l'expression de $\Pi(K, p+q)$ soit ramenée à la somme de la fonction complète de troisième espèce $\Pi(K, p)$, et d'un terme proportionnel à celle de première espèce K, ainsi qu'il serait demandé par le calcul indiqué dans le texte.

Si l'on voulait donc en poursuivre jusqu'au bout le développement en profitant de cette remarque, comme, après avoir transformé d'abord, ainsi que nous l'indiquons ci-dessus, par le moyen de l'une des deux substitutions (130), l'intégrale complète $\Pi'[h_1, k_0]$, dont l'expression multipliée par i est représentée par la seconde forme d'intégrale (129), dans la somme des deux termes

$$(6) \qquad \Pi'[h_1, k_0] = A_1 \int_0^1 \frac{z^2 dz}{(1 - C_1 z^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k_0'^2 z^2)}} + B_1 \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k_0'^2 z^2)}},$$

A_1, B_1, C_1 étant trois fonctions déterminées du paramètre h_1, dont on calculera aisément les expressions relatives à l'un et à l'autre cas, puis ramené, la première des deux inté-

duisons, pour la commodité du Lecteur, la démonstration complète dans la Note I de l'*Appendice* qui termine cet Ouvrage [équation (14), *in fine*], savoir

$$(151) \qquad \Pi[h + K' + iK, k'] = i\Pi'[ih, k],$$

laquelle, en convenant à présent de poser, en vue de faciliter l'écriture des transformations relatives à la quantité (129),

$$(132) \qquad h_0 = ih_1, \quad \text{ou} \quad h_1 = -ih_0, \quad \text{et} \quad H_0 = h_0 + K'_0 + iK_0,$$

donnera, en y faisant d'abord $k = k_0$ et $h = h_1$, la fonction Π étant impaire relativement au paramètre,

$$\Pi[h_0 + K'_0 + iK_0, k'_0] = i\Pi'[ih_0, k_0] = i\Pi'[-h_1, k_0] = -i\Pi'[h_1, k_0],$$

puis, en considérant alors seulement les membres extrêmes de cette suite d'égalités :

$$(133) \qquad i\Pi'[h_1, k_0] = -\Pi[H_0, k'_0].$$

En effet, si nous partons dans ce but par exemple de la formule (124), les égalités (125) donnant

$$(134) \qquad a_1b_1c_1 = -imn^2 \operatorname{sn} w_1 \operatorname{cn} w_1 \operatorname{dn} w_1, \qquad a_2b_2c_2 = -imn^2 \operatorname{sn} w_2 \operatorname{cn} w_2 \operatorname{dn} w_2,$$

et par conséquent

$$(135) \qquad \frac{m.in}{l} \operatorname{sn} w_1 \operatorname{cn} w_1 \operatorname{dn} w_1 = -\frac{a_1b_1c_1}{ln}, \qquad \frac{m.in}{l} \operatorname{sn} w_2 \operatorname{cn} w_2 \operatorname{dn} w_2 = -\frac{a_2b_2c_2}{ln},$$

---

fois dans A_1, C_0, et C'_0, toutes les substitutions successives que nous avons indiquées tout à l'heure, à propos de la seconde condition ($\varkappa$).

Dès lors, on comprend sans peine, combien sera longue et pénible la vérification de l'existence de ces trois conditions successives (η), (θ), ($\varkappa$), étant donné surtout qu'il faudra, éventuellement, essayer à tour de rôle chacune des deux valeurs K'_0 et $K'_0 + iK_0$ que nous avons admises pour q comme point de départ de nos raisonnements, et dont l'une seulement procurera en réalité le résultat demandé.

Il est donc bien clair que l'on arrivera au même but beaucoup plus rapidement et plus aisément, en faisant usage pour le même objet de la formule de transformation par modules complémentaires relative aux fonctions complètes (131), que nous allons employer à cet effet dans le texte, laquelle nous donnera au contraire, d'un seul coup, sans tâtonnements ni discussion d'aucune sorte, le résultat final des opérations successives qui constituent le laborieux calcul dont nous venons d'indiquer la marche et les grandes lignes dans la présente Note.

Cette complication d'opérations successives, ainsi que les tâtonnements auxquels on se trouvera forcément condamné par ce procédé, seront évités, et le calcul s'effectuera, au contraire, entièrement par voie de déductions *a posteriori*, et par conséquent sans aucune incertitude et de la façon la plus naturelle, en ayant recours pour cet objet à la formule suivante que nous avons donnée dans les *Comptes Rendus* (4 Juin 1895), sauf le changement de h en $h + K' + iK$, formule dont nous repro-

---

auquel cas, l'expression précédente se réduira simplement, eu égard à la définition (ε) de la quantité C'_0, à celle-ci :

$$(\zeta)\quad \begin{cases} \Pi'[h_1, k_0] = \dfrac{A_1}{C_0}\Pi[h_0+q, k'_0] \\ \quad = \dfrac{A_1}{C_0}\cdot C'_0 \displaystyle\int_0^1 \frac{t^2 dt}{[1-k'^2_0 \operatorname{sn}^2(h_0+q, k'_0).t^2]\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2_0 t^2)}}, \end{cases}$$

Partant de là maintenant, il faudra donc, en second lieu, que le paramètre de cette intégrale de troisième espèce soit le même que pour celle qui figure dans l'autre solution (123), c'est-à-dire par conséquent que l'autre condition

$$(\theta)\qquad k'^2_0 \operatorname{sn}^2(h_0+q, k'_0) = \frac{l^2}{a^2},$$

soit elle aussi vérifiée identiquement lorsque, en tenant compte encore de la valeur admise pour q, on y aura successivement remplacé, en premier lieu h_0 (c'est-à-dire en fait ses trois fonctions *sn, cn, dn*) par sa valeur, tirée de l'équation (γ), en fonction de C_1, puis ensuite C_1 par sa valeur en fonction de h_1, et enfin h_1 lui-même, ainsi que k'_0, par leurs valeurs en a, b, c résultant des définitions (128) et (127).

Enfin, en supposant ces deux premières conditions remplies, il faudra encore que les facteurs qui multiplient lesdites intégrales de troisième espèce soient également les mêmes dans les deux solutions, c'est-à-dire, en prenant l'expression de celui relatif à la première solution, à savoir $\frac{m.in}{l}\operatorname{sn} w \operatorname{cn} w \operatorname{dn} w$, sous la forme équivalente des expressions (135) ci-après

$$\frac{m.in}{l}\operatorname{sn} w \operatorname{cn} w \operatorname{dn} w = -\frac{abc}{ln},$$

laquelle résulte immédiatement des valeurs (125), puis remplaçant en même temps $\Pi[h_1, k_0]$, par sa valeur (ζ) résultant des conditions précédentes supposées remplies, il faudra, disons-nous, que la troisième condition qui s'imposera alors pour cette identification, savoir

$$(\varkappa)\qquad -\frac{abc}{ln} i.A_1 \frac{C'_0}{C_0} = -\frac{b^3}{a^2},$$

soit, elle aussi, vérifiée identiquement, après que l'on aura opéré de nouveau, à la

duisons, pour la commodité du Lecteur, la démonstration complète dans la Note I de l'*Appendice* qui termine cet Ouvrage [équation (14), *in fine*], savoir

$$(151)\qquad \Pi[h + K' + iK, k'] = i\Pi'[ih, k],$$

laquelle, en convenant à présent de poser, en vue de faciliter l'écriture des transformations relatives à la quantité (129),

$$(132)\qquad h_0 = ih_1, \quad \text{ou} \quad h_1 = -ih_0, \quad \text{et} \quad H_0 = h_0 + K'_0 + iK_0,$$

donnera, en y faisant d'abord $k = k_0$ et $h = h_1$, la fonction Π étant impaire relativement au paramètre,

$$\Pi[h_0 + K'_0 + iK_0, k'_0] = i\Pi'[ih_0, k_0] = i\Pi'[-h_1, k_0] = -i\Pi'[h_1, k_0],$$

puis, en considérant alors seulement les membres extrêmes de cette suite d'égalités :

$$(133)\qquad i\Pi'[h_1, k_0] = -\Pi[H_0, k'_0].$$

En effet, si nous partons dans ce but par exemple de la formule (124), les égalités (125) donnant

$$(134)\qquad a_1b_1c_1 = -imn^2 \operatorname{sn} w_1 \operatorname{cn} w_1 \operatorname{dn} w_1, \qquad a_2b_2c_2 = -imn^2 \operatorname{sn} w_2 \operatorname{cn} w_2 \operatorname{dn} w_2,$$

et par conséquent

$$(135)\qquad \frac{m.in}{l} \operatorname{sn} w_1 \operatorname{cn} w_1 \operatorname{dn} w_1 = -\frac{a_1b_1c_1}{ln}, \qquad \frac{m.in}{l} \operatorname{sn} w_2 \operatorname{cn} w_2 \operatorname{dn} w_2 = -\frac{a_2b_2c_2}{ln},$$

---

fois dans A_1, C_0, et C'_0, toutes les substitutions successives que nous avons indiquées tout à l'heure, à propos de la seconde condition ($\varkappa$).

Dès lors, on comprend sans peine, combien sera longue et pénible la vérification de l'existence de ces trois conditions successives (η), (θ), ($\varkappa$), étant donné surtout qu'il faudra, éventuellement, essayer à tour de rôle chacune des deux valeurs K'_0 et $K'_0 + iK_0$ que nous avons admises pour q comme point de départ de nos raisonnements, et dont l'une seulement procurera en réalité le résultat demandé.

Il est donc bien clair que l'on arrivera au même but beaucoup plus rapidement et plus aisément, en faisant usage pour le même objet de la formule de transformation par modules complémentaires relative aux fonctions complètes (131), que nous allons employer à cet effet dans le texte, laquelle nous donnera au contraire, d'un seul coup, sans tâtonnements ni discussion d'aucune sorte, le résultat final des opérations successives qui constituent le laborieux calcul dont nous venons d'indiquer la marche et les grandes lignes dans la présente Note.

cette formule deviendra donc tout d'abord, en tenant compte de ces dernières valeurs, en même temps que de celles (125) de b_1 et b_2, elles-mêmes,

$$X = fD\left[\left\{b_2 K_0'^{(2)} - b_1 K_0'^{(1)}\right\} - \left(\frac{a_2 b_2 c_2}{ln} i\Pi'[h_1^{(2)}, k_0^{(2)}] - \frac{a_1 b_1 c_1}{ln} i\Pi'[h_1^{(1)}, k_0^{(1)}]\right)\right]$$

et les deux premiers termes dans les crochets étant dès lors identiques à ceux représentés par le premier terme analogue de la formule (123), en raison des valeurs (127) des modules k_0', ainsi que nous l'avons déjà remarqué, il ne restera donc plus par conséquent, pour mettre en pleine lumière l'identité des deux solutions, qu'à montrer que le type analytique $\frac{abc}{ln} i\Pi'[h_1, k_0]$, duquel sont déduits les deux termes suivants en y affectant les trois constantes a, b, c successivement des indices 2 et 1, reproduira bien également, par l'effet de la transformation exprimée par la formule (131) ou (133), le terme correspondant de l'autre solution (123), en tenant compte du signe de part et d'autre.

Pour établir ce fait, observant que des deux définitions (132) celle de gauche donnant en premier lieu

$$\operatorname{sn}(h_1, k_0) = \operatorname{sn}(-ih_0, k_0) = -\frac{i \operatorname{sn}(h_0, k_0')}{\operatorname{cn}(h_0, k_0')},$$

on aura donc, en élevant au carré, puis tenant compte du type des deux équations (128) qui définissent les deux paramètres h_1,

$$-\frac{\operatorname{sn}^2(h_0, k_0')}{\operatorname{cn}^2(h_0, k_0')} = \operatorname{sn}^2(h_1, k_0) = \frac{c^2}{a^2},$$

d'où l'on tirera successivement, en faisant abstraction du membre intermédiaire,

$$-a^2 \operatorname{sn}^2(h_0, k_0') = c^2[1 - \operatorname{sn}^2(h_0, k_0')],$$

ou bien

$$(c^2 - a^2)\operatorname{sn}^2(h_0, k_0') = c^2, \qquad \operatorname{sn}^2(h_0, k_0') = \frac{c^2}{c^2 - a^2} = \frac{c^2}{n^2};$$

puis de là, en tenant compte du type des valeurs (127) des $k_0'^2$,

$$\mathrm{cn}^2(h_0,k'_0) = 1 - \mathrm{sn}^2(h_0,k'_0) = 1 - \frac{c^2}{c^2-a^2} = \frac{(c^2-a^2)-c^2}{c^2-a^2} = \frac{-a^2}{n^2},$$

$$\mathrm{dn}^2(h_0,k'_0) = 1 - k_0'^2\mathrm{sn}^2(h_0,k'_0) = 1 + \frac{m^2}{c^2}\frac{c^2}{n^2} = 1 + \frac{m^2}{n^2} = \frac{n^2+m^2}{n^2} = \frac{-l^2}{n^2},$$

c'est-à-dire, en fin de compte, les trois expressions

$$\mathrm{sn}(h_0,k'_0) = \frac{c}{n}, \qquad \mathrm{cn}(h_0,k'_0) = \frac{ia}{n}, \qquad \mathrm{dn}(h_0,k'_0) = \frac{il}{n},$$

lesquelles étant ainsi obtenues, la seconde définition (132) donnera à son tour, par le moyen de ces valeurs et des types de celles (126) et (127) des k_0^2 et $k_0'^2$:

$$\begin{cases} \mathrm{sn}(\mathrm{H}_0,k'_0) = \mathrm{sn}(h_0+\mathrm{K}'_0+i\mathrm{K}_0,k'_0) = \dfrac{\mathrm{dn}(h_0,k'_0)}{k'_0\,\mathrm{cn}(h_0,k'_0)} = \dfrac{\frac{il}{n}}{\frac{im}{c}\frac{ia}{n}} = \dfrac{-ilc}{ma}, \\[2ex] \mathrm{cn}(\mathrm{H}_0,k'_0) = \mathrm{cn}(h_0+\mathrm{K}'_0+i\mathrm{K}_0,k'_0) = \dfrac{-ik_0}{k'_0}\dfrac{1}{\mathrm{cn}(h_0,k'_0)} = \dfrac{-\frac{ib}{c}}{\frac{im}{c}\frac{ia}{n}} = \dfrac{inb}{ma}, \\[2ex] \mathrm{dn}(\mathrm{H}_0,k'_0) = \mathrm{dn}(h_0+\mathrm{K}'_0+i\mathrm{K}_0,k'_0) = ik_0\dfrac{\mathrm{sn}(h_0,k'_0)}{\mathrm{cn}(h,k'_0)} = \dfrac{ib}{c}\dfrac{\frac{c}{n}}{\frac{ia}{n}} = \dfrac{b}{a}. \end{cases}$$

Par conséquent, l'expression de la fonction complète

$$\Pi[\mathrm{H}_0,k'_0] = \int_0^{\mathrm{K}'_0} \frac{k_0'^2\,\mathrm{sn}(\mathrm{H}_0,k'_0)\,\mathrm{cn}(\mathrm{H}_0,k'_0)\,\mathrm{dn}(\mathrm{H}_0,k'_0).\mathrm{sn}^2(\omega,k'_0)}{1 - k'_0\,\mathrm{sn}^2(\mathrm{H}_0,k'_0)\,\mathrm{sn}^2(\omega,k'_0)}\,d\omega$$

deviendra, en y substituant d'abord ces dernières valeurs, puis faisant ensuite $\mathrm{sn}(\omega,k'_0) = t$,

$$\Pi[\mathrm{H}_0,k'_0] = \int_0^{\mathrm{K}'_0} \frac{-\frac{m^2}{c^2}\frac{-ilc}{ma}\frac{inb}{ma}\frac{b}{a}\,\mathrm{sn}^2(\omega,k'_0)}{1 + \frac{m^2}{c^2}\frac{-l^2c^2}{m^2a^2}\,\mathrm{sn}^2(\omega,k'_0)}\,d\omega$$

$$= -\frac{lnb^2}{ca^3}\int_0^1 \frac{t^2dt}{\left(1-\frac{l^2}{a^2}\right)\sqrt{(1-t^2)(1-k_0'^2t^2)}},$$

et si l'on tient compte encore une fois dans cette expression du type des valeurs (127) des K_0^2, on en conclura, en vertu de la formule (133) invoquée plus haut, cette suite d'égalités qu'il fallait établir, savoir :

$$\frac{abc}{ln} i\Pi' [h_1, k_0] = -\frac{abc}{ln} \Pi [H_0, K_0]$$

$$= -\frac{abc}{ln} \frac{-lnb^2}{ca^3} \int_0^1 \frac{t^2 dt}{\left(1 - \frac{l^2}{a^2} t^2\right) \sqrt{(1 - t^2)\left(1 + \frac{m^2}{c^2} t^2\right)}}$$

$$= \frac{b^3}{a^2} \int_0^1 \frac{t^2 dt}{\left(1 - \frac{l^2}{a^2} t^2\right) \sqrt{(1 - t^2)\left(1 + \frac{m^2}{c^2} t^2\right)}},$$

dans laquelle le simple rapprochement des membres extrêmes, en justifiant le fait annoncé, démontre par conséquent l'identité complète des deux solutions successivement obtenues.

La méthode et les procédés de calcul qui ont assuré le succès, ainsi confirmé par cette vérification, de notre recherche relative à ce premier Cas très restreint, étant désormais bien compris et facilement assimilés par le Lecteur, en raison de la simplicité relative des éléments analytiques auxquels ils se rapportaient dans cette première question, nous pouvons maintenant les appliquer, sans aucun changement quant au fond, aux deux Cas de généralité successivement croissante que nous avons spécifiés dans l'Introduction de ce Mémoire, sans avoir à redouter dorénavant que les difficultés analytiques plus grandes du Problème, et la complication de plus en plus accusée des calculs relatifs à ces deux nouveaux Cas, ne fassent obstacle à la clarté de notre exposition, et ne rebutent le Lecteur, en exigeant de lui un trop grand effort d'attention.

APPENDICE

NOTE

SUR DEUX FORMULES REMARQUABLES CONCERNANT LES FONCTIONS COMPLÈTES DE TROISIÈME ESPÈCE RELATIVES A DES MODULES COMPLÉMENTAIRES.

Parmi les transformations du premier ordre relatives aux fonctions elliptiques de première espèce, celle dans laquelle l'ancien et le nouveau modules sont réciproquement complémentaires l'un de l'autre, semble offrir une importance particulière, en premier lieu parce qu'elle fournit l'expression des fonctions d'argument iz à l'aide des fonctions d'argument z et réciproquement, et en second lieu en raison de la réversibilité très connue qui existe alors entre les deux fonctions complètes relatives à l'un ou à l'autre de ces deux modules.

Nous voudrions montrer dans cette courte Note que, contrairement à ce qui a lieu pour la fonction de deuxième espèce, cette même transformation relative à des modules complémentaires de part et d'autre présente encore les mêmes propriétés en ce qui concerne la fonction elliptique de troisième espèce, sous la réserve d'un changement linéaire du paramètre que nous allons indiquer.

En effet, considérant l'expression

$$\Pi(z, ih + \mathrm{K} + i\mathrm{K}', k)$$

$$= \int_0^z \frac{k^2 \operatorname{sn}(ih + \mathrm{K} + i\mathrm{K}') \operatorname{cn}(ih + \mathrm{K} + i\mathrm{K}') \operatorname{dn}(ih + \mathrm{K} + i\mathrm{K}') \operatorname{sn}^2 z}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 (ih + \mathrm{K} + i\mathrm{K}') \operatorname{sn}^2 z} dz$$

$$= \int_0^z \frac{k^2 \dfrac{\operatorname{dn} ih}{k \operatorname{cn} ih} \dfrac{-ik'}{k \operatorname{cn} ih} \dfrac{ik' \operatorname{sn} ih}{\operatorname{cn} ih} \operatorname{sn}^2 z}{1 - k^2 \dfrac{\operatorname{dn}^2 ih}{k^2 \operatorname{cn}^2 ih} \operatorname{sn}^2 z} dz$$

$$= \int_0^z \frac{k'^2 \dfrac{\operatorname{dn} ih}{\operatorname{cn} ih} \dfrac{-i}{\operatorname{cn} ih} \dfrac{i \operatorname{sn} ih}{\operatorname{cn} ih} \operatorname{sn}^2 z}{1 - \dfrac{\operatorname{dn}^2 ih}{\operatorname{cn}^2 ih} \operatorname{sn}^2 z} dz$$

$$= \int_0^z \frac{k'^2 \operatorname{dn}(h, k') [-i \operatorname{cn}(h, k')] [-\operatorname{sn}(h, k')] . \operatorname{sn}^2 z}{1 - \operatorname{dn}^2 (h, k') \operatorname{sn}^2 z} dz,$$

comme en y faisant alors

$$z = ix, \qquad \text{d'où} \qquad dz = idx, \qquad \operatorname{sn}^2 z = \frac{-\operatorname{sn}^2 (x, k')}{\operatorname{cn}^2 (x, k')},$$

elle deviendra par ce changement de variables

$$\Pi(ix, ih + \mathrm{K} + i\mathrm{K}', k)$$

$$= \int_0^x \frac{k'^2 \operatorname{dn}(h, k') . i \operatorname{cn}(h, k') . \operatorname{sn}(h, k') \dfrac{-\operatorname{sn}^2 (x, k')}{\operatorname{cn}^2 (x, k')}}{1 - \operatorname{dn}^2 (h, k') \dfrac{-\operatorname{sn}^2 (x, k')}{\operatorname{cn}^2 (x, k')}} i dx$$

$$= \int_0^x \frac{k'^2 \operatorname{dn}(h, k') \operatorname{cn}(h, k') \operatorname{sn}(h, k') \operatorname{sn}^2 (x, k')}{\operatorname{cn}^2 (x, k') + \operatorname{dn}^2 (h, k') \operatorname{sn}^2 (x, k')} dx$$

$$= \int_0^x \frac{k'^2 \operatorname{sn}(h, k') \operatorname{cn}(h, k') \operatorname{dn}(h, k') . \operatorname{sn}^2 (x, k')}{[1 - \operatorname{sn}^2 (x, k')] + [1 - k'^2 \operatorname{sn}^2 (h, k')] \operatorname{sn}^2 (x, k')} dx = \Pi(x, h, k'),$$

nous aurons donc, en ne conservant de cette suite d'égalités que les membres extrêmes, et intervertissant leur ordre, la formule

$$(1) \qquad \Pi(x, h, k') = \Pi(ix, ih + K + iK', k),$$

laquelle établit le premier des deux faits que nous avons annoncés relatif aux arguments, et dont il est aisé de déduire à présent celles qui mettront de même en lumière le second fait relatif aux fonctions complètes.

Pour cela nous remarquerons tout d'abord, d'une part, que la fonction $\Pi(x, h)$ étant impaire séparément par rapport à l'argument x et au paramètre h, et d'autre part que des trois fonctions elliptiques de première espèce *sn*, *cn*, *dn*, deux changeant seulement de signe lorsque l'argument y varie, soit de $2K$, soit de $2iK'$, et par conséquent que leur produit ne changeant pas dans ces deux cas, il suit immédiatement de la définition de la fonction $\Pi(x, h)$ que l'on aura les trois égalités :

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \Pi(-x, -h) = \Pi(x, h), & \Pi(x, h \pm 2K) = \Pi(x, h), \\ & \Pi(x, h \pm 2iK') = \Pi(x, h). \end{array} \right.$$

Cette observation faite, nous partirons de la formule connue d'addition des arguments,

$$(3) \qquad \Pi(\varphi + \psi, h) = \Pi(\varphi, h) + \Pi(\psi, h) + \frac{1}{4}\log\frac{MN}{PQ},$$

dans laquelle M, N, P, Q sont pour abréger les quantités :

$$\left\{ \begin{array}{ll} M = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2(\varphi - h)\operatorname{sn}^2\psi, & N = 1 - k^2\operatorname{sn}^2\varphi\operatorname{sn}^2(\psi - h), \\ P = 1 - k^2\operatorname{sn}^2(\varphi + h)\operatorname{sn}^2\psi, & Q = 1 - k^2\operatorname{sn}^2\varphi\operatorname{sn}^2(\psi + h). \end{array} \right.$$

Or si l'on convient de désigner par M′, N′, P′, Q′ d'une part, et M″, N″, P″, Q″ de l'autre, ce que deviennent ces quantités, respectivement pour chacune des deux hypothèses $\psi = \pm K$ et $\psi = \pm(K + iK')$, comme on aura alors manifestement



$$\left\{\begin{aligned} M' &= 1 - k^2 \operatorname{sn}^2(\varphi - h) \operatorname{sn}^2 K = \operatorname{dn}^2(\varphi - h), \\ P' &= 1 - k^2 \operatorname{sn}^2(\varphi + h) \operatorname{sn}^2 K = \operatorname{dn}^2(\varphi + h), \\ N' = Q' &= 1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \varphi \operatorname{sn}^2(h \pm K) = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \varphi \frac{\operatorname{cn}^2 h}{\operatorname{dn}^2 h}, \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} M'' &= 1 - k^2 \operatorname{sn}^2(\varphi - h) \operatorname{sn}^2(K + iK') = \operatorname{cn}^2(\varphi - h), \\ P'' &= 1 - k^2 \operatorname{sn}^2(\varphi + h) \operatorname{sn}^2(K + iK') = \operatorname{cn}^2(\varphi + h), \\ N'' = Q'' &= 1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \varphi \operatorname{sn}^2[h \pm (K + iK')] = 1 - \operatorname{sn}^2 \varphi \frac{\operatorname{dn}^2 h}{\operatorname{cn}^2 h}, \end{aligned}\right.$$

il s'ensuit que la formule générale ci-dessus (3) fournira pour ces deux hypothèses, la fonction $\Pi(\varphi, h)$ étant une fonction impaire, les deux formules subsidiaires, où $\Pi(h)$ et $\Pi'(h)$ désignent les deux fonctions complètes du module k, définies par les équations (98) du Chapitre I,

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\Pi(\varphi \pm K, h) = \Pi(\varphi, h) \pm \Pi(h) + \frac{1}{4} \log \frac{\operatorname{dn}^2(\varphi - h)}{\operatorname{dn}^2(\varphi + h)}, \\ &\Pi[\varphi \pm (K + iK'), h] = \Pi(\varphi, h) \pm [\Pi(h) + i\Pi'(h)] + \frac{1}{4} \log \frac{\operatorname{cn}^2(\varphi - h)}{\operatorname{cn}^2(\varphi + h)}, \end{aligned}\right.$$

formules dans lesquelles les signes supérieurs devront être pris ensemble (de même que les signes inférieurs) pour chacune d'elles séparément, et dont on déduira sans peine ensuite, si l'on en a besoin, les deux autres formules dites *fondamentales* relatives à la fonction elliptique de troisième espèce.

En effet, en écrivant dans la première $\varphi \pm K$ à la place de φ, puis ayant égard à cette formule elle-même, en y prenant encore, bien entendu, le même signe pour K, elle donnera très facilement ainsi la suivante, dans laquelle les signes supérieurs devront encore être pris ensemble (de même que les signes inférieurs),

$$\begin{aligned} \Pi(\varphi \pm 2K, h) &= \Pi(\varphi \pm K, h) \pm \Pi(h) + \frac{1}{4} \log \frac{\operatorname{dn}^2(\varphi - h \pm K)}{\operatorname{dn}^2(\varphi + h \pm K)} \\ &= \left[\Pi(\varphi, h) \pm \Pi(h) + \frac{1}{4} \log \frac{\operatorname{dn}^2(\varphi - h)}{\operatorname{dn}^2(\varphi + h)}\right] \pm \Pi(h) + \frac{1}{4} \log \frac{\operatorname{dn}^2(\varphi + h)}{\operatorname{dn}^2(\varphi - h)} \\ &= \Pi(\varphi, h) \pm 2\Pi(h) + \frac{1}{4} \log \frac{\operatorname{dn}^2(\varphi - h)\operatorname{dn}^2(\varphi + h)}{\operatorname{dn}^2(\varphi + h)\operatorname{dn}^2(\varphi - h)}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire simplement la première formule fondamentale :

(5) $$\Pi(\varphi \pm 2K, h) = \Pi(\varphi, h) \pm 2\Pi(h).$$

Et de même, toujours sous les mêmes conditions, en écrivant $\varphi \pm (K + iK')$ à la place de φ dans la seconde formule (4), puis ayant égard encore à cette formule elle-même, elle donnera semblablement

$$\Pi[\varphi \pm 2(K + iK'), h] = \Pi[\varphi \pm (K + iK'), h]$$
$$\pm [\Pi(h) + i\Pi'(h)] + \frac{1}{4}\log\frac{cn^2[\varphi - h \pm (K + iK')]}{cn^2[\varphi + h \pm (K + iK')]}$$
$$= \left[\Pi(\varphi, h) \pm \{\Pi(h) + i\Pi'(h)\} + \frac{1}{4}\log\frac{cn^2(\varphi - h)}{cn^2(\varphi + h)}\right]$$
$$\pm [\Pi(h) + i\Pi'(h)] + \frac{1}{4}\log\frac{cn^2(\varphi + h)}{cn^2(\varphi - h)}$$
$$= \Pi(\varphi, h) \pm 2[\Pi(h) + i\Pi'(h)] + \frac{1}{4}\log\frac{cn^2(\varphi - h)\, cn^2(\varphi + h)}{cn^2(\varphi + h)\, cn^2(\varphi - h)},$$

c'est-à-dire simplement, en ayant égard à la formule précédente (5),

$$\Pi[\varphi \pm (2K + 2iK'), h] = \Pi(\varphi \pm 2K, h) \pm 2i\Pi'(h),$$

d'où, en changeant seulement φ en $\varphi \mp 2K$, la seconde formule fondamentale :

(6) $$\Pi(\varphi \pm 2iK', h) = \Pi(\varphi, h) \pm 2i\Pi'(h).$$

Observons enfin, qu'en y prenant le signe —, et faisant en même temps $\varphi = K + iK'$, la première formule (4) donnera

$$\Pi(K + iK' - K, h) = \Pi(K + iK', h) - \Pi(h) + \frac{1}{4}\log\frac{dn^2(K + iK' - h)}{dn^2(K + iK' + h)}$$
$$= [\Pi(K + iK', h) - \Pi(K, h)] + \frac{1}{4}\log\frac{dn^2[h - (K + iK')]}{dn^2[h + (K + iK')]}$$

c'est-à-dire simplement, d'après la définition de la fonction complète $\Pi'(h)$, ci-dessus rappelée (page 114) :

$$(7) \qquad \Pi(iK', h) = i\Pi'(h).$$

Ces préliminaires étant acquis, et recourant de nouveau, pour la désignation des deux fonctions complètes de troisième espèce, à la notation plus explicite employée dans ledit Chapitre I, c'est-à-dire aux symboles définis par les deux équations

$$(8) \qquad \Pi[h, k] = \Pi(K, h, k), \qquad i\Pi'[h, k] = \Pi(K + iK', h, k) - \Pi(K, h, k),$$

la formule de transformation (1), établie tout d'abord, si l'on y pose, pour faciliter les écritures,

$$(9) \qquad ih + K + iK' = h',$$

s'écrivant alors, sous forme plus concise,

$$\Pi(x, h, k') = \Pi(ix, h', k),$$

donnera : en premier lieu, pour $x = K'$, en tenant compte de celle établie en dernier lieu (7), supposée appliquée au paramètre h',

$$(10) \qquad \Pi(K', h, k') = \Pi(iK', h', k) = i\Pi'(h'),$$

c'est-à-dire, en faisant abstraction du membre intermédiaire, et introduisant, pour plus de clarté, l'algorithme plus explicite défini par les égalités (8), la première formule

$$(11) \qquad \Pi[h, k'] = i\Pi'[h', k];$$

puis, en second lieu, pour $x = K' + iK$, en remarquant que l'on a

$$i(K' + iK) = iK' - K = (K + iK') - 2K,$$

et tenant compte ensuite successivement, d'abord de la formule (5) considérée pour le signe —, puis de la définition de la

fonction complète Π',

$$\Pi(K' + iK, h, k') = \Pi[i(K' + iK), h', k] = \Pi[(K + iK') - 2K, h', k]$$
$$= \Pi(K + iK', h', k) - 2\Pi(h')$$
$$= [\Pi(h') + i\Pi'(h')] - 2\Pi(h') = i\Pi'(h') - \Pi(h'),$$

c'est-à-dire, en ne conservant encore que les membres extrêmes seulement, et remplaçant au dernier $i\Pi'(h')$ par sa valeur représentée par le premier membre des égalités (10)

$$\Pi(K' + iK, h, k') = \Pi(K', h, k') - \Pi(h'),$$

ou bien

$$\Pi(K' + iK, h, k') - \Pi(K', h, k') = -\Pi(h'),$$

ou encore, en employant de nouveau l'algorithme (8) :

$$i\Pi'[h, k'] = -\Pi[h', k].$$

En divisant enfin cette dernière égalité par i, et récrivant ici, pour les rapprocher l'une de l'autre, la précédente (11), nous aurons donc obtenu définitivement les deux formules connexes

$$(12) \qquad \Pi[h, k'] = i\Pi'[h', k], \qquad \Pi'[h, k'] = i\Pi[h', k],$$

ou, sous forme plus explicite, en y remplaçant h' par sa valeur de définition (9),

$$(13) \qquad \begin{cases} \Pi[h, k'] = i\Pi'[ih + K + iK', k], \\ \Pi'[h, k'] = i\Pi[ih + K + iK', k], \end{cases}$$

qui sont celles sur lesquelles nous proposions d'appeler l'attention.

Ces formules nous semblent dignes de remarque aux deux points de vue suivants, qui mettent en lumière, sous deux formes différentes, le second des deux faits caractéristiques que nous avions annoncés au début de cette Note.

En premier lieu, les deux fonctions complètes de troisième espèce pouvant être supposées définies par les équations

$$\left\{\begin{aligned} \Pi[h,k] &= \int_0^1 \frac{k^2 \operatorname{sn} h \operatorname{cn} h \operatorname{dn} h . z^2 dz}{(1-k^2 \operatorname{sn}^2 h . z^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}, \\ i\Pi'[h,k] &= \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{k^2 \operatorname{sn} h \operatorname{cn} h \operatorname{dn} h . z^2 dz}{(1-k^2 \operatorname{sn}^2 h . z^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}, \end{aligned}\right.$$

ces deux formules (12) ou (13) font donc ressortir à l'égard de ces deux fonctions complètes, envisagées successivement pour deux modules complémentaires, une réciprocité ou réversibilité exactement semblable (sauf en ce qui concerne la valeur du paramètre, et l'interposition du coefficient $\sqrt{-1}$) à celle qui a lieu quant aux fonctions complètes de première espèce, et consistant en ce qu'étant de même représentées par les symboles $F[k]$ et $F'[k]$, et définies par les équations

$$F[k] = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}, \qquad iF'[k] = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

elles vérifieront alors, comme on sait, les conditions

$$F[k'] = F'[k], \qquad F'[k'] = F[k];$$

réciprocité qui n'a plus lieu, au contraire, pour la fonction de seconde espèce, car les quantités analogues J et J' deviennent respectivement $K' - J'$ et $K - J$, et non pas J' et J, lorsqu'on change k en k' (*).

En second lieu, ces deux formules, étant réversibles l'une dans l'autre, n'en constituent dès lors en réalité qu'une seule, qui fournira à volonté l'une ou l'autre par un simple changement de notation.

(*) Voir Hermite, *Note sur la Théorie des Fonctions Elliptiques*, ajoutée au *Cours de Calcul Différentiel et Intégral* de J.-A. Serret, 4e édition (1894), p. 829, *in medio*.

En effet, quant à la première, prise sous la forme (12) par exemple, si, après l'avoir multipliée par $-i$, et en avoir interverti les deux membres, ce qui la transformera dans la suivante

$$\Pi'[h', k] = -i\Pi[h, k'],$$

on y remplace alors h par sa valeur en fonction de h', tirée de l'équation (9), savoir

$$h = -ih' + iK - K' = -(ih' + K' + iK) + 2iK,$$

cette première formule donnera par ce changement, en ayant d'abord égard à la troisième des remarques (2), puis se rappelant que la fonction Π est impaire relativement au paramètre,

$$\Pi'[h', k] = -i\Pi[-(ih' + K' + iK) + 2iK, k']$$
$$= -i\Pi[-(ih' + K' + iK), k'] = i\Pi[ih' + K' + iK, k'],$$

c'est-à-dire, en ne conservant de nouveau que les membres extrêmes, et effaçant alors l'accent de h',

$$\Pi'[h, k] = i\Pi[ih + K' + iK, k'],$$

formule qui, eu égard à la réciprocité des quantités K et K' rappelée tout à l'heure, n'est autre chose que la seconde des formules (13) en question considérée pour le module k' au lieu du module k, et par conséquent ne diffère de celle-là que par un simple changement littéral.

Notons enfin, en terminant, que cette même première formule (13) considérée tout à l'heure, donnera successivement, si l'on y écrit $h + K' + iK$ à la place de h, et que l'on ait égard de nouveau à la dernière remarque (2),

$$\Pi[h + K' + iK, k'] = i\Pi'[i(h + K' + iK) + K + iK', k]$$
$$= i\Pi'[ih + 2iK', k] = i\Pi'[ih, k],$$

c'est-à-dire, en négligeant encore les membres intermédiaires, qu'elle pourra tout aussi bien être présentée sous l'autre forme

$$\text{(14)} \qquad \Pi[h + K' + iK, k'] = i\Pi'[ih, k],$$

qui est celle sous laquelle nous l'utilisons à la fin de notre premier Chapitre, et pour la démonstration de laquelle nous avons cru bon d'ajouter la présente Note en Appendice, à la suite de cet Ouvrage.

RECHERCHES ANALYTIQUES

SUR

LA THÉORIE DES NOMBRES PREMIERS

PAR

M. CH.-J. DE LA VALLÉE POUSSIN

Professeur à l'Université de Louvain.

QUATRIÈME PARTIE

LES NOMBRES PREMIERS REPRÉSENTABLES PAR UNE FORME QUADRATIQUE DE DÉTERMINANT POSITIF

PRÉLIMINAIRE

Le résumé de cette quatrième partie, que nous avons publié dans la première partie des *Annales*, servira utilement d'introduction. On y verra que toute cette longue analyse converge vers un seul but, la démonstration du théorème du n° 99, dont la simplicité contraste avec les difficultés que rencontre sa démonstration. Nous ajouterons encore les remarques suivantes :

Le chapitre premier n'est qu'une introduction analytique. On y trouvera une série d'intégrales définies simples ou multiples. Elles définissent des fonctions entières vérifiant la condition Θ et ce sont des types simples, auxquels se ramènent les fonctions plus complexes des chapitres suivants.

Le chapitre II présente une étude complète de la fonction $Z_h(s, u, v)$. Cette fonction, qui renferme, comme cas particulier,

la fonction $\zeta(s)$, ne paraît pas avoir été étudiée jusqu'ici. Elle exige nécessairement une analyse compliquée. Celle que nous proposons doit être la plus simple, car elle conduit à énoncer les propriétés de la fonction sous une forme absolument irréductible (n° 33).

Les fonctions A (s, u, v) et B (s, u, v) du chapitre III rentrent dans celles qui ont été étudiées par M. Lipschitz (*). Il y a quelques points de contact entre l'analyse de M. Lipschitz et la nôtre dans les §§ 1 et 2, mais les résultats du § 3 nous sont entièrement personnels.

L'analyse de la fonction G (s, u, v) aux chapitres IV et V était aussi entièrement à faire. Nous nous sommes contenté d'établir les théorèmes qui doivent nous servir au chapitre VI.

La fonction Q (s, c) a été définie par Dirichlet pour s réel. Elle a été étudiée ensuite au même point de vue par MM. Weber et Mayer (**), mais ces géomètres n'ont donné aucune formule qui pût servir de base à notre analyse.

CHAPITRE PREMIER

Définition de la condition Θ. Théorèmes généraux sur les fonctions qui la vérifient

§ 1. *Définitions et théorèmes généraux*

1. *Définition de la condition* Θ. Nous aurons souvent à considérer, dans cette partie du Mémoire, des fonctions entières et plus particulièrement leur développement en série potentielle sous la forme

$$(1). \quad F(s) = A_0 + \frac{A_1}{1}s + \frac{A_2}{1.2}s^2 + \cdots + \frac{A_n}{1.2\ldots n}s^n + \cdots.$$

(*) *Untersuchungen der Eigenschaften einer Gattung von unendlichen Reihen.* (JOURNAL DE CRELLE, CV, 1887.)

(**) Voir la troisième partie, nos 1 et 2.

Il s'agira généralement de prouver que les coefficients A_n de ce développement vérifient une certaine condition que nous allons définir une fois pour toutes et que nous appellerons désormais la condition Θ. Cette condition est la suivante :

On dira que la fonction F (s), *définie par la formule* (1), *vérifie la condition* Θ, *si, tous les coefficients* A *ayant des valeurs déterminées, on peut poser, pour toutes les valeurs de* n *supérieures à un nombre donné* N,

$$(\Theta) \quad \ldots\ldots\ldots \text{mod } A_n < (\Delta ln)^n,$$

où Δ *est une constante par rapport à* n (*).

Il est à remarquer que si F (s) vérifie la condition Θ, on pourra, en modifiant au besoin la valeur de Δ, faire en sorte que l'inégalité précédente soit satisfaite pour $n \overline{>} 2$.

2. *Vérification uniforme de la condition* Θ. La fonction considérée F (s) peut aussi dépendre d'un paramètre α, qui varie dans un certain intervalle, ou même dans une certaine région si α est imaginaire. Cette fonction peut alors se désigner par F (s, α).

Si F (s, α) vérifie la condition Θ pour toutes les valeurs de α, on peut poser, pour chacune de ces valeurs de α :

$$F(s) = A_0(\alpha) + \frac{A_1(\alpha)}{1} s + \cdots + \frac{A_n(\alpha)}{1.2\ldots n} s^n + \cdots,$$

et, pour toutes les valeurs de n supérieures à un nombre donné N,

$$\text{mod } A_n < (\Delta ln)^n.$$

(*) Si la fonction F (s) vérifie la condition Θ, il résulte de la formule de Stirling que l'on peut définir un nombre d indépendant de n et tel qu'on ait, pour $n > 2$,

$$\frac{\text{mod } A_n}{1.2\ldots n} < \left(d\frac{ln}{n}\right)^n.$$

C'est sous cette forme, équivalente à la précédente, que j'ai défini la condition Θ, dans le résumé de la quatrième partie du Mémoire publié dans la première partie des *Annales*.

En général, dans cette inégalité, il faudra supposer Δ et N fonctions de α. Mais si l'on peut supposer ces deux quantités indépendantes de α et, en outre, assigner à tous les coefficients A des limites supérieures indépendantes de α, nous disons que $F(s, \alpha)$ vérifie *uniformément* la condition Θ. Nous ajouterons, s'il y a lieu de le préciser, que cette uniformité a lieu, α étant considéré comme variable dans telles conditions déterminées.

3. *Remarques sur les notations.* Nous rencontrerons souvent, dans notre analyse, des fonctions qui nous intéresseront uniquement par la propriété de vérifier la condition Θ. Comme il importe de définir une notation rappelant cette propriété, nous ferons les conventions suivantes, qui seront observées jusqu'à la fin du Mémoire :

Une fonction vérifiant la condition Θ sera représentée d'une manière générale par $\theta(s)$. — Des fonctions différentes vérifiant la condition Θ le seront par $\theta_1(s)$, $\theta_2(s)$, ..., s'il y a lieu de distinguer ces fonctions entre elles; sinon, elles seront toutes également représentées par $\theta(s)$.

Une fonction qui vérifie *uniformément* la condition Θ, pour un système déterminé de valeurs d'un paramètre α, sera représentée par $\theta(s, \alpha)$.

4. *Extension des définitions précédentes.* Les définitions et les notations ci-dessus se généralisent d'elles-mêmes et s'étendent au cas où la fonction considérée de s dépend de plusieurs paramètres $\alpha, \beta, \ldots$

Si la fonction

$$F(s, \alpha, \beta, \ldots) = A_0(\alpha, \beta, \ldots) + \frac{A_1(\alpha, \beta, \ldots)}{1} s + \cdots \frac{A_n(\alpha, \beta, \ldots)}{1.2 \ldots n} s^n + \cdots$$

vérifie la condition

$$\bmod A_n < (\Delta l n)^n,$$

pour $n > N$ et pour des valeurs de N et de Δ indépendantes de $\alpha, \beta, \ldots$; si, en outre, on peut assigner à tous les coefficients A

des limites indépendantes de $\alpha, \beta, \ldots$, nous dirons que la fonction $F(s, \alpha, \beta, \ldots)$ vérifie *uniformément* la condition Θ. Dans ce cas, nous la représenterons par la notation $\theta(s, \alpha, \beta, \ldots)$.

Il importe de remarquer que, quand il s'agira de la condition Θ, le développement en série potentielle sera toujours supposé se faire par rapport à la variable s. Il n'y aura donc jamais d'ambiguïté possible dans ces notations. Nous nous servirons cependant de la notation $\theta(\alpha, \beta, \ldots)$ pour désigner une fonction *continue* et *limitée* de $\alpha, \beta, \ldots$ qui ne contient pas s, mais ce n'est en réalité que l'application des conventions précédentes au cas particulier où le développement de Taylor se réduit à son premier terme.

5. *Importance de la condition* Θ. Une fonction qui vérifie la condition Θ ne peut être d'un genre supérieur au premier, et si elle a une infinité de racines ρ, la série $\Sigma\rho^m$, étendue à toutes ces racines, sera absolument convergente pour $m < -1$. Ce sont ces conséquences, dont on a déjà vu le rôle essentiel dans les parties précédentes du Mémoire, qui rendent importante pour nous l'étude de la condition Θ. Ces deux conséquences dérivent immédiatement des principes établis par M. Hadamard. Nous les avons appliqués déjà aux n°s 16 et 17 de la deuxième partie du Mémoire et il est inutile de les reproduire encore une fois.

6. Théorème I. *Si une fonction* $\theta(s)$ *vérifie (uniformément) la condition* Θ, *la fonction* $\theta(as + b)$, *obtenue en y remplaçant* s *par une fonction linéaire de* s, *vérifie aussi (uniformément) la condition* Θ.

Théorème II. *Si plusieurs fonctions vérifient (uniformément) la condition* Θ, *il en est aussi de même pour leur somme et pour leur produit.*

Nous allons démontrer ces deux théorèmes, en considérant, dans les démonstrations, toutes les lettres comme des quantités réelles et positives. Le raisonnement fait dans cette hypothèse sera concluant *a fortiori* pour tous les autres cas.

Démonstration du théorème I. Considérons la fonction

$$(1). \quad . \ \theta(s) = A_0 + A_1 s + \frac{A_2}{1.2} s^2 + \cdots + \frac{A_n}{1.2 \ldots n} s^n + \cdots,$$

avec la condition

$$(2). \quad . \ . \ . \ . \ A_n < (\Delta . ln)^n, \qquad \text{pour } n > N.$$

Il est d'abord évident que $\theta(as)$ vérifie la condition Θ, car cette substitution revient à multiplier A_n par a^n et l'on a, par (2),

$$a^n A_n < (a\Delta . ln)^n.$$

En définitive, il suffit de montrer que $\theta(s+b)$ vérifie la condition Θ. Pour faire cette démonstration, on peut supposer que les coefficients de la série (1).

$$A_0, \ \frac{A_1}{1}, \ldots \frac{A_n}{1.2 \ldots n}, \ldots$$

vont constamment en décroissant à partir de $n = N$. En effet, si cette condition n'avait pas lieu, on pourrait remplacer la série (1) par une autre dont les coefficients seraient plus grands que ceux de la série (1), vérifieraient la condition (2) et, en outre, celle que nous venons de dire (*). Le raisonnement fait sur cette nouvelle série sera *a fortiori* concluant pour la série (1). On peut enfin supposer $b < 1$, car le raisonnement fait pour $b < 1$ s'étend de proche en proche à toutes les valeurs de b. Posons, dans cette hypothèse,

$$\theta(s+b) = B_0 + B_1 s + \cdots + \frac{B_n}{1.2 \ldots n} s^n + \cdots.$$

(*) Il suffira, par exemple, de faire

$$\frac{A_n}{1.2 \ldots n} = \left(d \frac{ln}{n}\right)^n,$$

et de donner à d une valeur fixe suffisamment grande (voir la note page 3). Les coefficients iront en décroissant pour $n > d.ln$.

On aura

$$B_n = \theta^{(n)}(b) = A_n + A_{n+1}\frac{b}{1} + A_{n+2}\frac{b^2}{1.2} + \cdots$$

$$= A_n + \frac{A_{n+1}}{n+1}(n+1)b + \frac{A_{n+2}}{(n+1)(n+2)}\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}b^2 + \cdots.$$

Mais, par hypothèse, les coefficients

$$A_n, \quad \frac{A_{n+1}}{n+1} \quad \frac{A_{n+2}}{(n+1)(n+2)}, \ldots$$

sont décroissants; on a donc, b étant < 1,

$$B_n < A_n\left[1 + (n+1)b + \frac{(n+1)(n+2)}{1.2}b^2 + \cdots\right]$$

$$< \frac{A_n}{(1-b)^{n+1}} < \frac{1}{1-b}\left[\frac{\Delta}{1-b}ln\right]^n,$$

ce qui prouve le théorème.

Démonstration du théorème II. La première partie du théorème est évidente. Il suffira d'établir que le produit de deux fonctions qui vérifient la condition Θ vérifie aussi la condition Θ. Pour cela, nous allons nous servir d'une représentation symbolique du développement taylorien. Considérons la fonction $\theta(s)$ de la démonstration précédente; en admettant que le premier coefficient $A_0 = 1$ (ce qui n'importe pas à la généralité des raisonnements) et en posant symboliquement $A^n = A_n$, on pourra poser symboliquement aussi

$$\theta(s) = e^{As} = 1 + A_1 s + \cdots + \frac{A_n}{1.2\ldots n}s^n + \cdots,$$

$$A^n = A_n < (\Delta ln)^n, \qquad \text{pour } n > 1.$$

Pour une autre fonction $\theta_1(s)$, les mêmes conventions donneront

$$\theta_1(s) = e^{Bs} = 1 + B_1 s + \cdots + \frac{B_n}{1.2\ldots n} s^n + \cdots,$$

$$B^n = B_n < (\Delta_1 ln)^n, \qquad \text{pour } n > 1.$$

Il résulte de ces inégalités qu'on aura une limite supérieure d'une expression symbolique entière, à termes positifs, de degré p en A et de degré q en B, en y remplaçant A par Δlp et B par $\Delta_1 lq$, pourvu seulement qu'on ait aussi

$$A_1 < \Delta lp, \qquad B_1 < \Delta_1 lq.$$

Or on a aussi symboliquement

$$\theta(s)\,\theta_1(s) = e^{(A+B)s} = 1 + (A+B)s + \cdots + \frac{(A+B)^n}{1.2\ldots n} s^n + \cdots.$$

et, par la remarque précédente, à partir d'une valeur suffisamment grande de n,

$$(A+B)^n < [(\Delta + \Delta_1)\,ln]^n.$$

Le théorème est donc démontré.

7. Théorème III. *Soit* $\theta(s, \alpha)$ *une fonction qui vérifie uniformément la condition* Θ *dans l'intervalle* (a, b) *du paramètre* α, *l'intégrale à limites finies*

$$\int_a^b \theta(s, \alpha)\, d\alpha$$

vérifie aussi la condition Θ.

Ce théorème est évident. En employant les notations du n° 3, on peut l'exprimer par l'équation

$$\int_a^b \theta(s, \alpha)\, d\alpha = \theta(s).$$

Sous cette forme, le théorème se généralise aisément. Si α est une variable complexe et C un contour fini d'intégration, on a

$$\int_C \theta(s, \alpha)\, d\alpha = \theta(s).$$

Plus généralement encore, en employant les notations du n° 4,

$$\int_a^b \theta(s, \alpha, \beta, \gamma \ldots)\, d\alpha = \theta(s, \beta, \gamma \ldots), \text{ etc.}$$

8. *Exemples.* Une exponentielle quelconque

$$e^{as} = 1 + \frac{a}{1} s + \frac{a^2}{1.2} s^2 + \cdots$$

vérifie évidemment la condition Θ. De plus, si a est variable, cette exponentielle vérifiera uniformément la condition Θ, pourvu que a reste compris entre deux limites finies.

Les fonctions $\sin as$ et $\cos as$ n'étant que des sommes ou des différences d'exponentielles, vérifient aussi la condition Θ et dans les mêmes conditions que l'exponentielle.

9. Théorème IV. *Une intégrale de la forme*

$$\int_1^\infty \theta(x, \alpha, \beta, \ldots)\, e^{-ax} x^s dx,$$

où a *est un nombre positif et où* θ (x, α, β, ...) *désigne une fonction continue et limitée de la variable d'intégration* x *et des paramètres* α, β, ... *est une fonction entière de* s *qui vérifie uniformément la condition* Θ, *les paramètres étant considérés comme variables.*

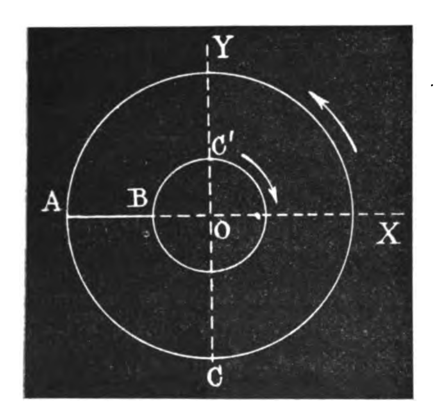
La démonstration de ce théorème est comprise dans celle du n° 16 de la seconde partie du Mémoire.

§ 2. *Transformation générale d'une intégrale définie simple. Application à* $\Gamma(s)$.

10. Soit $f(z)$ une fonction synectique de la variable imaginaire z dans un cercle de rayon b autour de l'origine. L'intégrale

$$\int_0^b f(z)\, z^s dz$$

représente une fonction synectique de la variable s pour $\mathfrak{R}(s) > -1$. Mais la fonction ne cesse pas d'exister pour les autres valeurs de s et son expression valable dans tout le plan peut s'obtenir par les considérations suivantes :



Remarquons que la fonction de z

$$f(z)\, z^s$$

est synectique et uniforme dans la région à *contour simple* limitée par la portion AB de l'axe des x et deux cercles décrits de l'origine O comme centre, l'un C avec le rayon b, l'autre C′ avec un rayon infiniment petit. Par conséquent, si nous intégrons la différentielle

$$f(z)\, z^s dz$$

le long du contour ACABC′BA de cette région (C étant supposé parcouru dans le sens direct et C′ dans le sens rétrograde), l'intégrale sera nulle. Nous écrirons ce résultat sous la forme

$$(1). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (C) + (AB) - (C') + (BA) = 0.$$

Pour évaluer chacune de ces intégrales partielles, donnons à z, au point A, la valeur initiale $be^{-\pi i}$. En parcourant la circonférence C, z reviendra en A avec la valeur $be^{\pi i}$; l'intégrale (AB), dans (1), a donc pour valeur

$$(AB) = e^{\pi si}\int_b^0 f(x)\, x^s dx = -\, e^{\pi si}\int_0^b f(x)\, x^s dx.$$

Après le parcours de C′, z reviendra en B avec l'argument $-\pi$; donc l'intégrale (BA) sera

$$(BA) = e^{-\pi si}\int_0^b f(x)\, x^s dx.$$

L'intégrale (C′) le long du cercle infiniment petit est nulle, pour $\mathfrak{R}(s) > -1$, et nous poserons d'abord

$$(C) = \int_0 f(z)\, z^s dz.$$

L'équation (1) prend ainsi la forme

$$\int_C f(z)\, z^s dz - (e^{\pi si} - e^{-\pi si})\int_0^b f(x)\, x^s dx = 0,$$

d'où l'on tire

$$(2). \quad . \quad . \quad . \quad \int^b f(x)\, x^s dx = \frac{1}{\sin s\pi}\,\frac{1}{2i}\int_C f(z)\, z^s dz.$$

Le second membre de cette équation fournit, sous une première

forme, l'expression valable dans tout le plan s que nous nous proposions d'obtenir. En effet, la fonction à intégrer ne peut pas avoir de point critique sur le contour C d'intégration.

Nous allons transformer ce second membre. Dans l'intégrale relative au contour C qui y figure, on a

$$z = be^{i\varphi}, \qquad dz = be^{i\varphi}id\varphi,$$

donc

$$\frac{1}{2i}\int_C f(z)\, z^s dz = \frac{b^{s+1}}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(be^{i\varphi})\, e^{(s+1)\varphi i}d\varphi,$$

d'où la relation suivante, dont nous aurons souvent à faire usage,

$$(3) \;.\;.\;.\int_0^b f(z)\, z^s dz = \frac{b^{s+1}}{2\sin s\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(be^{i\varphi})\, e^{(s+1)\varphi i}d\varphi.$$

11. *Cas où* f(z) *dépend de* s. Supposons que nous ayons maintenant à considérer une intégrale de la forme plus générale

$$\int_0^b f(z, s)\, z^s dz,$$

où l'on désigne par $f(z, s)$ une fonction synectique de z dans le cercle de rayon b et cela pour toutes les valeurs réelles ou imaginaires de s. Les raisonnements et les conclusions du numéro précédent subsistent intégralement. On a donc

$$(4) \;.\;.\int_0^b f(z, s)\, z^s dz = \frac{b^{s+1}}{2\sin s\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(be^{i\varphi}, s)\, e^{(s+1)\varphi i}d\varphi,$$

et le second membre de cette équation fournit une représentation, valable dans tout le plan s, de la fonction de s qui n'est définie dans le premier membre que pour $\mathfrak{R}(s) > -1$.

12. Théorème. *Soit, suivant les notations du* n° 3, θ (s, z) *une fonction entière de* s *qui vérifie uniformément la condition* Θ *quand le paramètre réel ou imaginaire* z *varie dans un cercle de*

rayon b *autour de l'origine; si* θ(s, z) *est en outre une fonction synectique de* z *dans ce cercle de rayon* b, *la fonction définie pour* $\mathfrak{R}(s) > -1$ *par la formule*

$$F(s) = \sin s\pi \int_0^b \theta(s, z)\, z^s dz$$

est une fonction entière de s *qui vérifie la condition* Θ *et s'exprime, quel que soit* s, *par l'intégrale*

$$F(s) = \frac{1}{2} b^{s+1} \int_{-\pi}^{\pi} \theta(s, be^{i\varphi})\, e^{(s+1)\varphi i} d\varphi.$$

Démonstration. Ces deux expressions de $F(s)$ sont égales par la formule (4) du numéro précédent. Il suffit donc de démontrer que la seconde vérifie la condition Θ. La quantité qui y figure sous le signe d'intégration, savoir :

$$b^{s+1}\theta(s, be^{i\varphi})\, e^{(s+1)\varphi i},$$

vérifie uniformément la condition Θ, φ variant de $-\pi$ à $+\pi$, car c'est un produit de trois facteurs qui sont dans ce cas (théorème II, n° 6), donc l'intégrale vérifie aussi la condition Θ (théorème III, n° 7).

Remarque. On peut généraliser le théorème précédent en y remplaçant $\theta(s,z)$ par une fonction plus générale $\theta(s, z, \alpha, \beta, \ldots)$ renfermant un plus grand nombre de paramètres variables, et vérifiant toujours *uniformément* la condition Θ. Il en résultera une fonction

$$F(s, \alpha, \beta, \ldots) = \sin s\pi \int_0^b \theta(s, z, \alpha, \beta, \ldots)\, z^s dz,$$

qui vérifiera *uniformément* la condition Θ.

13. *Application à* Γ(s). La fonction $\Gamma(1-s)$ peut être définie, pour $\mathfrak{R}(s) > 0$, par l'équation

$$\Gamma(1-s) = \int_0^\infty e^{-x}x^{-s}dx = \int_0^b + \int_b^\infty e^{-x}x^{-s}dx.$$

Appliquons la transformation (3) du n° 10 à la première intégrale au second membre. Il vient

$$\Gamma(1-s) = -\frac{b^{1-s}}{2\sin s\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-b(\cos\varphi+i\sin\varphi)}e^{(1-s)\varphi i}d\varphi + \int_{b}^{\infty} e^{-x}x^{-s}dx.$$

Remplaçons le premier membre, $\Gamma(1-s)$, par $\pi : \Gamma(s)\sin s\pi$, qui lui est égal, et multiplions toute l'équation par $\sin s\pi$; nous obtiendrons

$$(5)\qquad \frac{\pi}{\Gamma(s)} = \sin s\pi\int_{b}^{\infty} e^{-x}x^{-s}dx - \frac{1}{2}b^{1-s}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-b(\cos\varphi+i\sin\varphi)}e^{(1-s)\varphi i}d\varphi.$$

Remplaçons la variable d'intégration x par bx; il vient

$$(6)\qquad \frac{\pi b^{s-1}}{\Gamma(s)} = \sin s\pi\int_{1}^{\infty} e^{-bx}x^{-s}dx - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-b(\cos\varphi+i\sin\varphi)}e^{(1-s)\varphi i}d\varphi.$$

Enfin, si l'on fait $b=1$, on trouve, en particulier,

$$(7)\qquad \frac{\pi}{\Gamma(s)} = \sin s\pi\int_{1}^{\infty} e^{-x}x^{-s}dx - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-(\cos\varphi+i\sin\varphi)}e^{(1-s)\varphi i}d\varphi.$$

Cette expression remarquable de $1 : \Gamma(s)$ est due à Heine. Elle va jouer un rôle important dans les recherches qui vont suivre.

14. Théorème. *La fonction* $1 : \Gamma(s)$ *est une fonction entière dans tout le plan qui vérifie la condition* Θ.

C'est ce qui résulte de l'une quelconque des trois dernières équations, par exemple de l'équation (7), où le second membre est une somme de deux termes qui vérifient la condition Θ, le premier par les théorèmes des nos 9 (où l'on changera s en $-s$) et 6, le second par celui du n° 7.

§ 3. *Transformation générale d'une intégrale définie double. Théorèmes qui s'en déduisent.*

15. Théorème. *Soient* x *et* y *deux variables réelles et* f (y) *une fonction continue de* y *dans l'intervalle* (o, b); *soient ensuite* s *une quantité réelle ou imaginaire telle qu'on ait* $\mathfrak{R}(s) > 1$ *et* m *un nombre positif; je dis que l'intégrale double*

$$I = \int_0^b f(y)\,dy \int_1^\infty e^{-y^m x} x^{-s} dx$$

peut se mettre sous la forme

$$\int_0^b f(y)\, y^{m(s-1)} dy \int_{b^m}^\infty e^{-x} x^{-s} dx + m \int_0^b e^{-x^m} dx \int_0^1 f(xy)\, y^{m(s-1)} dy.$$

Démonstration. Changeons d'abord, dans l'intégrale I, la variable d'intégration x en $x : y^m$; il vient

$$I = \int_0^b f(y)\, y^{m(s-1)} dy \int_{y^m}^\infty e^{-x} x^{-s} dx;$$

ensuite, par la subdivision de l'intervalle (y^m, ∞) d'intégration en deux parties,

$$I = \int_0^b f(y) y^{m(s-1)} dy \left[\int_{b^m}^\infty + \int_{y^m}^{b^m} e^{-x} x^{-s} dx\right].$$

Par cette formule, I se décompose en deux termes, dont le premier figure aussi comme premier terme dans la décomposition à démontrer. Il nous reste donc à démontrer que les seconds termes sont égaux aussi, ou que l'on a

$$\int_0^b f(y)\, y^{m(s-1)} dy \int_{y^m}^{b^m} e^{-x} x^{-s} dx = m \int_0^b e^{-x^m} dx \int_1 f(xy) y^{m(s-1)} dy.$$

Pour cela, changeons x en x^m dans l'intégrale intérieure au premier membre. Celui-ci prend la forme

$$m\int_{\varepsilon}^{b} f(y)\, y^{m(s-1)}dy \int_{y}^{b} e^{-x^m} x^{-m(s-1)} \frac{dx}{x}.$$

Écrivons cette expression comme il suit :

$$m \lim_{\varepsilon=0} \int_{\varepsilon}^{b} f(y)\, y^{m(s-1)}dy \int_{y}^{b} e^{-x^m} x^{-m(s-1)} \frac{dx}{x}.$$

La fonction soumise à une double intégration est maintenant continue dans tout le champ de cette intégration, qui est compris entre les trois droites : $x = y$, $x = b$, $y = \varepsilon$. On peut intervertir les intégrations et l'on trouve

$$m \lim_{\varepsilon=0} \int_{\varepsilon}^{b} e^{-x^m} x^{-m(s-1)} \frac{dx}{x} \int_{\varepsilon}^{x} f(y)\, y^{m(s-1)}dy.$$

Enfin, si l'on change encore, dans l'intégrale intérieure, y en xy, on trouve

$$m \lim_{\varepsilon=0} \int_{\varepsilon}^{b} e^{-x^m}dx \int_{\frac{\varepsilon}{x}}^{1} f(xy)\, y^{m(s-1)}dy,$$

c'est-à-dire, sans aucune difficulté pour $\mathfrak{R}(s) > 1$,

$$m \int_{0}^{b} e^{-x^m}dx \int_{0}^{1} f(xy)\, y^{m(s-1)}dy,$$

ce qui est bien le second terme de la décomposition à établir.

16. *Cas particulier.* Pour $m = 1$, le théorème précédent fournit l'équation

$$\int_{0}^{b} f(y)dy \int_{1}^{\infty} e^{-yx}x^{-s}dx = \int_{0}^{b} f(y)\, y^{s-1}dx \int_{b}^{\infty} e^{-x}x^{-s}dx$$
$$+ \int^{b} e^{-x}dx \int_{0}^{1} f(xy)\, y^{s-1}dy.$$

17. Théorème. *Désignons, comme au n° 3, par* θ (s, y) *une fonction entière de* s *qui vérifie uniformément la condition* Θ *quand le paramètre réel ou imaginaire* y *varie dans un cercle de rayon* b *autour de l'origine; si la fonction* θ (s, y) *est, en outre, une fonction synectique de* y *dans ce cercle, je dis que la fonction définie, pour* $\mathfrak{R}(s) > 1$, *par la formule*

$$F(s) = \sin s\pi \int_0^b \theta(s, y)\, dy \int_1^\infty e^{-yx}x^{-s}dx,$$

est une fonction entière de s *dans tout le plan qui vérifie la condition* Θ.

Démonstration. Ce théorème résulte de la formule précédente (n° 16). Par celle-ci, F (*s*) se décompose en deux termes :

$$F(s) = \int_b^\infty e^{-x}x^{-s}dx \times \sin s\pi \int_1^b \theta(s, y)\, y^{s-1}dy$$

$$+ \sin s\pi \int_0^b e^{-x}dx \int_0^1 \theta(s, xy)\, y^{s-1}dy.$$

Je dis que chacun de ces deux termes vérifie la condition Θ. Quant au premier, il est un produit de deux facteurs qui vérifient respectivement la condition Θ par les théorèmes du n° 9 pour le premier et du n° 12 pour le second.

Le second terme est l'intégrale, par rapport au paramètre x, de la fonction

$$\sin s\pi \int_0^1 \theta(s, xy)\, y^{s-1}dy,$$

qui vérifie *uniformément* la condition Θ par le théorème du n° 12; donc (n° 7), ce terme lui-même vérifie la condition Θ et le théorème est démontré.

Remarque. On peut généraliser le théorème en y remplaçant la fonction θ(*s*, *y*) par une fonction plus générale θ(*s*, *y*, α, β,...),

dépendant de plusieurs paramètres et vérifiant *uniformément* la condition Θ. Il en résultera une fonction $F(s, \alpha, \beta, \ldots)$ qui vérifiera uniformément la condition Θ, α, $\beta, \ldots$ étant considérés comme variables.

18. Théorème. *Soit, comme au numéro précédent,* $\theta(s, y)$ *une fonction entière de* s *qui vérifie uniformément la condition* Θ *quand le paramètre réel ou imaginaire* y *varie dans un cercle de rayon* b *autour de l'origine ; si* $\theta(s, y)$ *est, en outre, une fonction synectique de* y *dans ce cercle, je dis que la fonction définie pour* $\mathcal{R}(s) > 1$, *par la formule*

$$F(s) = \frac{\pi}{\Gamma(s)} \int_0^b \theta(s, y) y^{s-1} dy,$$

est une fonction entière de s *dans tout le plan qui vérifie la condition* Θ.

Démonstration. La formule (6) du n° 13 devient, en y remplaçant b par y,

$$\frac{\pi y^{s-1}}{\Gamma(s)} = \sin s\pi \int_1^\infty e^{-yx} x^{-s} dx - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-y(\cos\varphi + i\sin\varphi)} e^{(1-s)\varphi i} d\varphi,$$

ce qui, substitué sous le signe d'intégration dans l'expression de $F(s)$, nous donne la décomposition en deux termes :

$$F(s) = \sin s\pi \int_0^b \theta(s, y)\, dy \int_1^\infty e^{-yx} x^{-s} dx$$
$$- \frac{1}{2} \int_0^b \theta(s, y)\, dy \int_{-\pi}^{\pi} e^{-y(\cos\varphi + i\sin\varphi)} e^{(1-s)\varphi i} d\varphi.$$

Le second terme converge dans tout le plan et vérifie la condition Θ (n° 7). Reste à démontrer que le premier définit une fonction entière vérifiant la condition Θ. C'est là ce qui faisait l'objet du théorème précédent (n° 17).

Remarque. On peut reproduire ici une remarque identique à celle qui termine le numéro précédent.

19. On peut restreindre, comme il suit, les conditions du théorème précédent :

THÉORÈME. *Soit* θ (s) *une fonction entière de* s, *qui vérifie uniformément la condition* Θ, *quand le paramètre* y *varie des deux manières suivantes : 1° dans l'intervalle réel* (0, b); *2° dans un cercle de rayon* ε *suffisamment petit autour de l'origine. Si la fonction* θ (s, y) *est, en outre, une fonction synectique de* y *dans ce cercle de rayon suffisamment petit, la formule*

$$F(s)=\frac{\pi}{\Gamma(s)}\int_0^{b}\theta(s,y)\,y^{s-1}dy$$

définit, pour $\Re(s)>1$, *une fonction entière dans tout le plan et qui vérifie la condition* Θ.

En effet, faisons la décomposition en deux termes :

$$F(s)=\frac{\pi}{\Gamma(s)}\int_0^{\varepsilon}\theta(s,y)\,y^{s-1}dy+\frac{\pi}{\Gamma(s)}\int_{\varepsilon}^{b}\theta(s,y)\,y^{s-1}dy;$$

le premier terme vérifie la condition Θ par le théorème du numéro précédent; le second, par l'application immédiate des conclusions du n° 7 à l'intégrale qui y figure et de celles du n° 14 au facteur $\pi : \Gamma(s)$.

Remarque. Comme au numéro précédent, on peut aussi reproduire textuellement ici la remarque finale du n° 17.

§ 4. *Application des théorèmes précédents à certains cas particuliers.*

20. Nous allons considérer des intégrales où figure le trinôme du second degré en y

$$p+2qy+ry^2.$$

Nous ferons, sur cette expression, les hypothèses suivantes :

1° Les trois coefficients p, q, r sont réels, le premier p est positif et non nul;

2° Le discriminant que nous représentons par δ,

$$\delta = q^2 - pr,$$

est positif;

3° L'expression $(p + 2qy + ry^2)$ ne s'annule pas dans l'intervalle $(0, 1)$ de y.

On a, dans ces conditions, le théorème suivant :

21. Théorème. *La fonction définie, pour* $\mathfrak{R}(s) > 1$, *par la formule*

$$F(s) = \frac{1}{\Gamma(s - \frac{1}{2})} \int_0^1 \frac{y^{2s-2}\,dy}{(p + 2qy + ry^2)^s},$$

est une fonction entière de s *dans tout le plan qui vérifie la condition* Θ.

Démonstration. Changeons d'abord y en $1 : y$ dans l'intégrale; il viendra

$$F(s) = \frac{1}{\Gamma(s - \frac{1}{2})} \int_1^\infty \frac{dy}{(py^2 + 2qy + r)^s}.$$

Donnons-nous un nombre Y assez grand pour que la fonction $(py^2 + 2qy + ry^2)$ soit constamment croissante pour $y \geqq Y$ et faisons la décomposition en deux termes :

$$F(s) = \frac{1}{\Gamma(s - \frac{1}{2})} \int_1^Y \frac{dy}{(py^2 + 2qy + r)} + \frac{1}{\Gamma(s - \frac{1}{2})} \int_Y^\infty \frac{dy}{(py^2 + 2qy + r)^s}.$$

Le premier terme est un produit de deux facteurs qui vérifient la condition Θ (n° 14 et n° 7). Il reste simplement à examiner le second terme.

Définissons un nombre positif Z et une nouvelle variable z



par les formules

$$Z = pY^2 + 2qY + r,$$
$$z = py^2 + 2qy + r,$$

et prenons z comme variable d'intégration. On a, puisque z et y sont tous deux positifs pour $y > Y$,

$$y = \frac{-q + \sqrt{\delta + pz}}{p}, \quad dy = \frac{dz}{2\sqrt{\delta + pz}},$$

d'où

$$\frac{1}{\Gamma(s - \frac{1}{2})} \int_Y^{\infty} \frac{dy}{(p + 2qy + ry^2)^s} = \frac{1}{2\Gamma(s - \frac{1}{2})} \int_Z^{\infty} \frac{z^{-s} dz}{\sqrt{\delta + pz}},$$

et, en changeant encore la variable d'intégration z en $Z : z$,

$$\frac{1}{\Gamma(s - \frac{1}{2})} \int_Y^{\infty} \frac{dy}{(p + 2qy + ry^2)^s} = \frac{Z^{\frac{1}{2} - s}}{2\Gamma(s - \frac{1}{2})} \int_0^1 \frac{z^{s - \frac{3}{2}} dz}{\sqrt{p + \frac{\delta}{Z} z}}.$$

Le second membre de cette équation définit une fonction entière de s qui vérifie la condition Θ, en vertu du théorème précédent n° 19 (où l'on changera s en $s - \frac{1}{2}$). En effet, la fonction

$$\left(p + \frac{\delta}{Z} z\right)^{-\frac{1}{2}}$$

est, vu les hypothèses sur p et δ (20), une fonction continue de z dans l'intervalle (0, 1) et qui est synectique dans un cercle de rayon suffisamment petit autour de l'origine.

Remarque I. Si p, q et r sont variables entre des limites finies, sans cesser de satisfaire aux conditions du n° 20, la fonction F (s) du théorème vérifiera *uniformément* la condition Θ, pourvu que la fonction $(p + 2qy + ry^2)$ ne puisse tendre vers zéro pour aucune valeur de y appartenant à l'intervalle (0, 1), limites comprises.

Remarque II. Les dérivées partielles de F (s) par rapport à p, q, r sont encore des fonctions entières de s qui vérifient la condition Θ.

Cette remarque résulte immédiatement de ce que les dérivées partielles de la fonction

$$\frac{Z^{\frac{1}{2}-s}}{\sqrt{p+\frac{\delta}{Z}z}},$$

par rapport à p, q, r, sont des fonctions continues ou synectiques de z dans les mêmes conditions que cette fonction elle-même. Il résulte encore de là que la remarque I s'applique aussi bien aux dérivées partielles de F (s) qu'à cette fonction elle-même. Par conséquent, si p, q, r varient comme on l'a dit dans la remarque I, les dérivées partielles de F (s) vérifieront *uniformément* la condition Θ.

22. Théorème. *Le trinôme* $(p+2qy+ry^2)$ *étant assujetti aux conditions du n° 20, la fonction définie, pour* $\Re(s)>1$, *par l'intégrale double*

$$F(s)=\frac{1}{\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)}\int_0^1\frac{dy}{(p+2qy+ry^2)^s}\int_1^\infty x^{-s}e^{-y^2x}dx,$$

est une fonction entière de s *dans tout le plan qui vérifie la condition* Θ.

Appliquons la décomposition du n° 15, où nous ferons $m=2$ et $f(y)=(p+2qy+ry^2)^{-s}$; il viendra

$$F(s)=\frac{1}{\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)}\int_0^1\frac{y^{2s-2}dy}{(p+2qy+ry^2)^s}\times\int_1^\infty e^{-x}x^{-s}dx$$

$$+\frac{2}{\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)}\int_0^1 e^{-x^2}dx\int_0^1\frac{y^{2s-2}dy}{(p+2qxy+rx^2y^2)^s}.$$

La fonction F (s) est ainsi décomposée en deux termes. Le premier terme vérifie la condition Θ, car c'est un produit de deux facteurs qui sont dans ce cas, le premier par le théorème du n° 21 et le second par celui du n° 9 (où l'on changera s en $-s$).

Le second terme de F (s) vérifie aussi la condition Θ, car, quand x varie de 0 à 1, la fonction

$$\frac{1}{\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)}\int_0^1 \frac{y^{2s-2}}{(p+2qxy+rx^2y^2)^s}=\theta(s,x)$$

est, par le théorème du n° 21 qui précède (remarque I), une fonction entière de s qui vérifie *uniformément* la condition Θ. Ce second terme est donc de la forme

$$2\int_0^1 e^{-x^2}\theta(s,x)\,dx,$$

et il vérifie la condition Θ par le théorème du n° 7.

Remarque I. Si les coefficients p, q, r du trinôme $(p+2qy+ry^2)$ sont variables entre des limites finies, la fonction F (s) vérifiera uniformément la condition Θ, pourvu que le trinôme reste assujetti aux conditions du n° 20 et ne puisse tendre vers zéro, pour aucun système de valeurs de p, q, r et y (y variant entre 0 et 1). En effet, par la remarque I du numéro précédent, la fonction θ (s, x) de la démonstration ci-dessus conserve les propriétés que nous lui avons attribuées.

Remarque II. Les dérivées partielles par rapport aux paramètres p, q et r de la fonction F (s) du théorème sont encore des fonctions entières de s qui vérifient la condition Θ.

En effet, par la remarque II du numéro précédent, les dérivées partielles de la fonction θ (s, x) de la démonstration ci-dessus conservent aussi les propriétés que nous avons attribuées à cette fonction elle-même.

On voit, en outre, que si p, q, r sont variables comme dans la remarque précédente, les dérivées partielles en question vérifieront aussi uniformément la condition Θ.

CHAPITRE II

Étude de la fonction $Z_h(s, u, v)$ et de la fonction auxiliaire $\psi_s(\alpha, t)$

---

§ 1. *Étude de la fonction* $\psi_s(\alpha, t)$

23. *Relation entre deux intégrales définies.* Soit $z = x + yi$ une variable imaginaire; intégrons la fonction

$$e^{z^2 t} dz$$

le long du rectangle ayant pour côtés : $x = 0$, $x = \alpha$; $y = 0$, $y = \beta$. Cette intégrale étant nulle, on aura l'équation

$$\int_0^\alpha e^{x^2 t} dx + i\int_0^\beta e^{(\alpha + yi)^2 t} dy = i\int_0^\beta e^{-y^2 t} dy + \int_0^\alpha e^{(x+\beta i)^2 t} dx.$$

Égalons les parties réelles et faisons tendre β vers l'infini; nous trouverons la relation connue

$$\int_0^\infty e^{-y^2 t} \sin(2\alpha y t)\, dy = e^{-\alpha^2 t}\int_0^\alpha e^{x^2 t} dx.$$

Changeons t en πt et α en $\frac{k}{t}$; il vient

$$\int_0^\infty e^{-y^2 \pi t} \sin(2k\pi y)\, dy = e^{-k^2 \frac{\pi}{t}}\int_0^{\frac{k}{t}} e^{x^2 \pi t} dx.$$

Changeons encore la variable d'intégration x en $kx : t$; nous

aurons

$$\int_0^\infty e^{-y^2\pi t}\sin(2k\pi y)\,dy = \frac{k}{t}\int_0^1 e^{-(1-x^2)k^2\frac{\pi}{t}}dx,$$

puis enfin, par la substitution $1 - x^2 = z$,

$$(1).\quad . \quad \int_0^\infty e^{-y^2\pi t}\sin(2k\pi y)\,dy = \frac{k}{2t}\int_0^1 e^{-k^2\pi\frac{z}{t}}\frac{dz}{\sqrt{1-z}}.$$

24. *Définition de la fonction* $\psi_3(\alpha, t)$. *Son développement en série trigonométrique.* Nous avons défini, dans la deuxième partie du Mémoire, les fonctions $\psi_1(\alpha, x)$ et $\psi_2(\alpha, x)$; nous allons ajouter à celles-là une nouvelle fonction qui est dans une étroite relation avec elles.

Soient α une quantité réelle, *comprise entre* 0 *et* 1, et t une quantité réelle et positive quelconque. Nous posons, par définition,

$$(2).\quad . \quad . \quad . \quad \psi_3(\alpha, t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{(n+\alpha)^2\pi t} - \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(n-\alpha)^2\pi t}.$$

Cette fonction n'est plus, comme $\psi_1(\alpha, x)$ ou $\psi_2(\alpha, x)$, une fonction périodique de α; c'est pourquoi nous nous sommes bornés à l'intervalle (0, 1) du paramètre α. Cette fonction jouit évidemment de la propriété fonctionnelle

$$(3).\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \psi_3(1-\alpha, t) = -\psi_3(\alpha, t);$$

l'étude de la fonction dans l'intervalle (0, 1) se ramène ainsi à l'examen de l'intervalle (0, $\frac{1}{2}$).

On peut assigner à cette fonction des limites supérieure et inférieure indépendantes de α et de t. Pour le montrer, écrivons, en prenant alternativement un terme dans chacune des deux sommes,

$$\psi_3(\alpha, t) = e^{-\alpha^2\pi t} - e^{-(1-\alpha)^2\pi t} + e^{-(1+\alpha)^2\pi t} - e^{-(2-\alpha)^2\pi t} + \ldots$$

Si l'on suppose $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, ces termes sont constamment et indéfiniment décroissants. On a donc, dans l'intervalle $(0 \overline{\gtrless} \alpha \overline{\gtrless} \frac{1}{2})$,

$$e^{-\alpha^2\pi t} > \psi_3(\alpha, t) > e^{-\alpha^2\pi t} - e^{-(1-\alpha)^2\pi t},$$

et, par conséquent, quel que soit t,

$$1 > \psi_3(\alpha, t) > 0.$$

On aurait de même dans l'intervalle $(\frac{1}{2} \overline{\gtrless} \alpha \overline{\gtrless} 1)$

$$0 > \psi_3(\alpha, t) > -1.$$

Nous pouvons développer cette fonction en série trigonométrique par rapport à α dans l'intervalle $(0,1)$. En vertu de la relation (3), ce développement sera de la forme

$$\psi_3(\alpha, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin 2k\pi\alpha,$$

les coefficients ayant pour valeurs

$$b_k = 2\int_0^1 \psi_3(\alpha, t) \sin(2k\pi x)\, d\alpha = 4\int_0^{\infty} e^{-\alpha^2\pi t} \sin(2k\pi\alpha)\, d\alpha.$$

Par la formule (1) du numéro précédent, ces coefficients deviennent

$$b_k = \frac{2k}{t}\int_0^1 e^{-k^2\pi\frac{z}{t}} \frac{dz}{\sqrt{1-z}}.$$

On a donc le développement trigonométrique

$$(4). \quad . \quad . \quad \psi_3(\alpha, t) = \frac{2}{t}\sum_{k=1}^{\infty} k \sin(2k\pi\alpha) \int_0^1 e^{-k^2\pi\frac{z}{t}} \frac{dz}{\sqrt{1-z}}.$$

25. *Relation entre* $\psi_3(\alpha, t)$ *et* $\psi_2(\alpha, x)$. Pour l'obtenir, il faut montrer qu'on peut intervertir les signes de sommation et d'intégration dans la formule précédente.

A cet effet, soit ε un nombre positif arbitrairement petit, la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \sin(2k\pi\alpha)\, e^{-k^2\pi\frac{z}{t}},$$

(où t est supposé donné) converge uniformément dans l'intervalle $(\varepsilon, 1)$ de la variable z (ce qui n'avait pas lieu dans l'intervalle de 0 à 1). On a donc, puisque l'interversion des signes est permise dans cet intervalle $(\varepsilon, 1)$,

$$\psi_3(\alpha, t) = \frac{2}{t}\int_{\varepsilon}^{1} \frac{dz}{\sqrt{1-z}} \sum_{k=1}^{\infty} k \sin(2k\pi\alpha)\, e^{-k^2\pi\frac{z}{t}}$$
$$+ \frac{2}{t}\sum_{k=1}^{\infty} k \sin(2k\pi\alpha) \int_{0}^{\varepsilon} e^{-k^2\pi\frac{z}{t}} \frac{dz}{\sqrt{1-z}},$$

et, en faisant tendre ε vers zéro,

$$(5). \quad \left\{ \begin{aligned} \psi_3(\alpha, t) &= \frac{2}{t}\int_{0}^{1} \frac{dz}{\sqrt{1-z}} \sum_{k=1}^{\infty} k \sin(2k\pi\alpha)\, e^{-k^2\pi\frac{z}{t}} \\ &+ \lim_{\varepsilon=0} \frac{2}{t}\sum_{k=1}^{\infty} k \sin(2k\pi\alpha) \int_{0}^{\varepsilon} e^{-k^2\pi\frac{z}{t}} \frac{dz}{\sqrt{1-z}}. \end{aligned} \right.$$

Cette dernière limite est nulle. Pour le montrer, changeons z en $z : k^2$; cette limite s'écrira

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{2}{t}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2k\pi\alpha}{k} \int_{0}^{k^2\varepsilon} e^{-\pi\frac{z}{t}} \frac{dz}{\sqrt{1-\frac{z}{k^2}}}.$$

Puis, par une intégration par parties portant sur l'exponentielle, cette expression se met sous la forme

$$\frac{2}{\pi}\lim_{\varepsilon=0}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2k\pi\alpha}{k}\left[1 - \frac{e^{-k^2\pi\frac{\varepsilon}{t}}}{\sqrt{1-\varepsilon}}\right] + \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon=0}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2k\pi\alpha}{k^3}\int^{k^2\varepsilon} \frac{e^{-k^2\pi\frac{z}{t}}\,dz}{\left(1-\frac{z}{k^2}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Comme la série Σk^{-2} est absolument convergente, le second terme tend visiblement vers zéro avec ε. Quant au premier, en posant $x = e^{-\frac{\pi\varepsilon}{t}}$, il peut se réduire à la différence

$$\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin 2k\pi\alpha}{k} - \frac{2}{\pi}\lim_{x=1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin 2k\pi\alpha}{k}x^{k^2}$$

Dans celle-ci, le second terme est une série potentielle convergente pour $x = 1$. Sa limite pour $x = 1$ coïncide avec sa valeur pour $x = 1$, en vertu d'un théorème classique dû à Abel. Donc la différence ci-dessus est nulle et l'équation (5) se réduit à

$$\psi_3(\alpha, t) = \frac{2}{t}\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z}}\sum_{k=1}^{\infty} k\sin(2k\pi\alpha)\, e^{-k^2\pi\frac{z}{t}}.$$

Changeons la variable d'intégration z en tz; il viendra

$$\psi_3(\alpha, t) = 2\int_0^{\frac{1}{t}} \frac{dz}{\sqrt{1-tz}}\sum_{k=1}^{\infty} k\sin(2k\pi\alpha)\, e^{-k^2\pi z},$$

c'est-à-dire, par la formule (4) du n° 5 de la deuxième partie du Mémoire,

$$\psi_3(\alpha, t) = \int_0^{\frac{1}{t}} \frac{dz}{\sqrt{1-zt}}\,\frac{\psi_2\left(\alpha, \frac{1}{z}\right)}{z\sqrt{z}},$$

et enfin, en changeant z en $1 : z$,

(6). . . . . $$\psi_3(\alpha, t) = \int_t^{\infty} \psi_2(\alpha, z)\frac{dz}{\sqrt{z-t}}.$$

Telle est la relation fondamentale qui lie les deux fonctions $\psi_2(\alpha, z)$ et $\psi_3(\alpha, t)$, pour $(0 \gtreqless \alpha \gtreqless 1)$.

Remarque. On peut donner à la formule (6) une forme plus

simple en apparence, quoique moins pratique, en y remplaçant la variable d'intégration z par $(z^2 + t)$. Il vient

$$\psi_3(\alpha, t) = 2\int_t^{\infty} \psi_2(\alpha, z^2 + t)\, dz.$$

§ 2. *Étude de la fonction* $Z_h(s, u, v)$

26. *Définition de* $Z_h(s, u, v)$. Cette fonction dépend de trois paramètres u, v, γ qui sont réels et compris tous les trois entre 0 et 1 (limites exclues pour γ seulement). Elle est définie, pour $\mathfrak{R}(s) > \frac{1}{2}$, par la formule

$$(1) \quad \ldots \quad Z_h(s, u, v) = \sum_h^{\infty} \frac{1}{[(x+u)^2 - \gamma(x+v)^2]^s},$$

où la sommation s'étend à toutes les valeurs positives et entières de x égales ou supérieures à un entier donné h.

Cet entier h sera supposé suffisamment grand pour qu'on ait

$$h > \frac{1}{1 - \sqrt{\gamma}}, \quad \text{d'où} \quad h > \sqrt{\gamma}(h + 1),$$

ce qui est toujours possible, puisqu'on a, par hypothèse, $\sqrt{\gamma} < 1$. Dans ces conditions, la fonction

$$(x + u)^2 - \gamma(x + v)^2$$

est essentiellement positive pour $x \gtreqless h$, et il n'y a pas de difficulté dans la définition de la fonction $Z_h(s, u, v)$, qui sera réelle en même temps que s. Cette fonction est analogue à la fonction $\zeta(s)$ de Riemann, mais elle présente des propriétés plus complexes que nous allons chercher à éclaircir.

27. *Transformation de la formule* (1). La formule (1) se

transforme d'abord dans la suivante :

$$(2). \quad . \quad Z_h(s, u, v) = \frac{\pi^s}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} t^{s-1} dt \sum_{x=h}^{\infty} e^{-[(x+u)^2 - \gamma(x+v)^2]\pi t}.$$

Nous allons d'abord simplifier l'écriture de l'exponentielle qui est sous le signe d'intégration. On a

$$\begin{aligned}(x+u)^2 - \gamma(x+v)^2 &= (x+u)^2 - \gamma(x+u+v-u)^2 \\ &= (1-\gamma)(x+u)^2 - 2\gamma(x+u)(v-u) - \gamma(v-u)^2 \\ &= (1-\gamma)\left[\left(x+u-\frac{\gamma(v-u)}{1-\gamma}\right)^2 - \gamma\left(\frac{v-u}{1-\gamma}\right)^2\right].\end{aligned}$$

Posons

$$\gamma\left(\frac{v-u}{1-\gamma}\right)^2 = \beta^2, \quad u - \frac{\gamma(v-u)}{1-\gamma} = e + \alpha,$$

où α est une fraction comprise entre *zéro* et *un* et e la partie entière de $u - \frac{\gamma(v-u)}{1-\gamma}$, c'est-à-dire un entier positif ou négatif. Cet entier sera $< h$ en valeur absolue et l'on aura

$$(x+u)^2 - \gamma(x+v)^2 = (1-\gamma)\left[(x+e+\alpha)^2 - \beta^2\right],$$

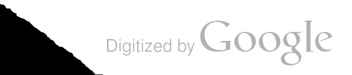
d'où

$$Z_h(s, u, v) = \frac{\pi^s}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} t^{s-1} dt e^{\beta^2(1-\gamma)\pi t} \sum_{x=h+e}^{\infty} e^{-(x+\alpha)^2(1-\gamma)\pi t}.$$

Changeons encore la variable d'intégration t en $t : (1-\gamma)$; nous aurons

$$(3) \qquad Z_h(s, u, v) = \frac{\pi^s}{(1-\gamma)^s \Gamma(s)} \int_0^{\infty} t^{s-1} dt e^{\beta^2 \pi t} \sum_{x=h+e}^{\infty} e^{-(x+\alpha)^2 \pi t}.$$

Cette formule en donne immédiatement une autre. Remplaçons u et v par leurs compléments $(1-u)$ et $(1-v)$; e se change en $-e$, α en $1-\alpha$ et β^2 ne change pas.



On a donc

$$(3^{\text{bis}})\quad Z_h(s,1-u,1-v)=\frac{\pi^s}{(1-\gamma)^s\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}dt\,e^{\beta^2\pi t}\sum_{z=h+1-\varepsilon}^{\infty}e^{-(z-\alpha)^2\pi t}.$$

Les propriétés de $Z_h(s, u, v)$ vont découler très aisément des deux théorèmes suivants, dont le premier surtout sera important pour la suite.

28. Théorème. *La fonction*

$$Z_h(s,u,v)-Z_h(s,1-u,1-v)$$

est une fonction entière de s *dans tout le plan qui vérifie uniformément la condition* Θ *quand* u *et* v *varient dans l'intervalle* (0, 1).

Démonstration. La méthode que nous allons suivre pour démontrer le théorème conduirait, en poussant les calculs jusqu'au bout (ce que nous ne ferons pas), à la formation d'expressions capables de représenter la fonction dans tout le plan. Cette méthode consistera à décomposer la fonction en une somme d'autres qui vérifieront séparément les conditions du théorème.

Posons d'abord

$$(4)\quad \begin{cases} Y_1(s)=\dfrac{\pi^s}{(1-\gamma)^s\Gamma(s)}\displaystyle\int_1^\infty t^{s-1}dt\,e^{\beta^2\pi t}\left[\sum_{z=h+\varepsilon}^{\infty}e^{-(z+\alpha)^2\pi t}-\sum_{z=h-\varepsilon+1}^{\infty}e^{-(z-\alpha)^2\pi t}\right],\\[2ex] Y_2(s)=\dfrac{\pi^s}{(1-\gamma)^s\Gamma(s)}\displaystyle\int_0^1 t^{s-1}dt\,e^{\beta^2\pi t}\left[\sum_{z=h+\varepsilon}^{\infty}e^{-(z+\alpha)^2\pi t}-\sum_{z=h-\varepsilon+1}^{\infty}e^{-(z-\alpha)^2\pi t}\right]. \end{cases}$$

On aura évidemment, en vertu des formules (3) et (3bis), où l'on décomposera l'intervalle d'intégration en deux parties (0, 1) et (1, ∞),

$$Z_h(s,u,v)-Z_h(s,1-u,1-v)=Y_1(s)+Y_2(s).$$

Le premier terme $Y_1(s)$ ne donne lieu à aucune difficulté :

son expression converge dans tout le plan s (*) et il définit une fonction qui vérifie uniformément la condition Θ par le théorème du n° 9.

Passons au second terme $Y_2(s)$, dont l'étude est plus difficile. En ajoutant des termes en nombre $2h$, puis soustrayant ces termes, on peut écrire, eu égard à la formule (2) du n° 24,

$$Y_2(s) = \frac{\pi^s}{(1-\gamma)^s\Gamma(s)}\int_0^1 e^{\beta^2\pi t}\psi_3(\alpha, t)\, t^{s-1}dt$$

$$+ \frac{\pi^s}{(1-\gamma)^s\Gamma(s)}\left[\sum_{x=1}^{h-1}\int_0^1 e^{[\beta^2-(x-\alpha)^2]\pi t}t^{s-1}dt - \sum_{x=0}^{h+e-1}\int_0^1 e^{[\beta^2-(x+\alpha)^2]\pi t}t^{s-1}dt\right].$$

Nous avons écrit en seconde ligne une somme de $2h$ termes qui vérifient *uniformément* la condition Θ, α et β (et par suite u, v) étant considérés comme variables, cela en vertu du théorème du n° 18, qui s'applique à chacun d'eux. La démonstration du théorème actuel se réduit donc à celle du théorème que voici :

29. Théorème. *La fonction* $T(s)$, *définie par la formule*

$$T(s) = \frac{\pi^s}{(1-\gamma)^s\Gamma(s)}\int_0^1 e^{\beta^2\pi t}\psi_3(\alpha, t)\, t^{s-1}dt,$$

est une fonction entière de s *qui vérifie uniformément la condition* Θ *quand* α *varie dans l'intervalle* $(0, 1)$ *et* β *entre des limites finies.*

(*) Pour se rendre compte de cette convergence, on se rappellera que l'on a, pour les valeurs de x qui entrent dans les sommes, sous le signe d'intégration,

$$(x+\alpha)^2 - \beta^2 = \frac{(x+u)^2 - \gamma(x+v)^2}{1-\gamma} > \frac{h-\gamma(h+1)}{1-\gamma} > 0,$$

et une inégalité semblable pour $(x-\alpha)^2 - \beta^2$. Dans les exponentielles en t, le coefficient de t ne peut donc tendre vers zéro et est essentiellement négatif, ce qu assure la convergence des intégrales dans l'intervalle (l, ∞) de t.

Pour démontrer ce théorème, remplaçons $\psi_3(\alpha, t)$ par sa valeur (6) au n° 25, savoir

$$\psi_3(\alpha, t) = \int_t^{\infty} \psi_2(\alpha, z) \frac{dz}{\sqrt{z-t}} = \int_t^1 + \int_1^{\infty} \psi_2(\alpha, z) \frac{dz}{\sqrt{z-t}},$$

et posons, en abrégé,

$$\left\{ \begin{aligned} T_1(s) &= \frac{\pi^s}{(1-\gamma)^s \Gamma(s)} \int_0^1 e^{\beta^2\pi t} t^{s-1} dt \int_t^1 \psi_2(\alpha, z) \frac{dz}{\sqrt{z-t}}, \\ T_2(s) &= \frac{\pi^s}{(1-\gamma)^s \Gamma(s)} \int_0^1 e^{\beta^2\pi t} t^{s-1} dt \int_1^{\infty} \psi_2(\alpha, z) \frac{dz}{\sqrt{z-t}}; \end{aligned} \right.$$

on aura la décomposition

$$T(s) = T_1(s) + T_2(s).$$

Montrons d'abord que le second terme $T_2(s)$ vérifie la condition Θ. Pour cela, supposons pour un instant que α ne puisse tendre ni vers *zéro* ni vers *un*; la formule (2e partie, n° 3)

$$\psi_2(\alpha, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (n+\alpha) e^{-(n+\alpha)^2\pi z}$$

met en évidence que la fonction

$$(5). \quad . \quad . \quad . \quad e^{\beta^2\pi t} \int_1^{\infty} \psi_2(\alpha, z) \frac{dz}{\sqrt{z-t}} = \theta_2(t, \alpha, \beta),$$

est une fonction continue de α, β, t dans l'intervalle $(0, 1)$ de t et une fonction synectique de t dans un cercle de rayon suffisamment petit autour de l'origine.

Donc la fonction

$$(6). \quad . \quad . \quad T_2(s) = \frac{\pi^s}{(1-\gamma)^s} \cdot \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^1 \theta_2(t, \alpha, \beta) t^{s-1} dt$$

est, par le théorème du n° 19, une fonction entière de s qui vérifie uniformément la condition Θ.

J'ajoute que cette conclusion subsiste si α peut tendre vers *zéro* ou vers *un*. Dans ce cas, il y a, dans l'expression de $\psi_2(\alpha, z)$ donnée ci-dessus, deux termes et deux seulement, où le coefficient de z peut tendre vers zéro, et qui réclament un nouvel examen, savoir

$$\alpha e^{-\alpha^2\pi z} \qquad \text{et} \qquad (1-\alpha)\, e^{-(1-\alpha)^2\pi z}.$$

Les difficultés relatives à ces deux termes se résolvent de la même façon, de sorte qu'il suffit de considérer le premier.

Il donne dans l'expression de $\theta_2(t, \alpha, \beta)$ le terme

$$e^{\beta^2\pi t}\int_1^\infty \alpha e^{-\alpha^2\pi z}\frac{dz}{\sqrt{z-t}} = e^{\beta^2\pi t}\int_{\alpha^2}^\infty e^{-\pi z}\frac{dz}{\sqrt{z-\alpha^2 t}}$$

$$= e^{\beta^2\pi t-\pi\alpha^2}\int_0^\infty e^{-\pi z}\frac{dz}{\sqrt{z+\alpha^2(1-t)}},$$

et, sous cette dernière forme, il saute aux yeux: 1° que ce terme est encore une fonction continue de t, de α et de β, 2° que c'est une fonction synectique de t dans le voisinage de l'origine. Il n'y a donc rien à changer à nos conclusions.

Passons à l'examen du premier terme $T_1(s)$. En renversant l'ordre des intégrations, il devient

$$T_1(s) = \frac{\pi^s}{(1-\gamma)^s\,\Gamma(s)}\int_0^1 \psi_2(\alpha, z)\, dz \int_0^z t^{s-1} e^{\beta^2\pi t}\frac{dt}{\sqrt{z-t}};$$

puis, en changeant t en tz,

$$T_1(s) = \frac{\pi^s}{(1-\gamma)^s\,\Gamma(s)}\int_0^1 \psi_2(\alpha, z)\, z^{s-\frac{1}{2}} dz \int_0^1 e^{\beta^2\pi t z}\frac{t^{s-1}dt}{\sqrt{1-t}};$$

puis, en changeant encore z en $1 : z$ et renversant l'ordre d'intégration,

$$T_1(s) = \frac{\pi^s}{(1-\gamma)^s\,\Gamma(s)}\int_0^1 \frac{t^{s-1}dt}{\sqrt{1-t}}\int_1^\infty e^{\beta^2\pi\frac{t}{z}}\psi_2\left(\alpha, \frac{1}{z}\right) z^{-s-\frac{3}{2}}dz.$$

Mais la formule (4) du n° 5 de la seconde partie, qui se met sous la forme

$$z^{-\frac{s}{2}}\psi_2\left(\alpha, \frac{1}{z}\right) = 2\sum_{k=1}^{\infty} ke^{-k^2\pi z}\sin 2k\pi\alpha,$$

met en évidence : 1° que la fonction

$$(7). \quad . \quad . \quad \int_1^{\infty} e^{\beta^2\pi\frac{t}{z}}\left[z^{-\frac{3}{2}}\psi_2\left(\alpha, \frac{1}{z}\right)\right] z^{-s}dz = \theta_1(s, t, \alpha, \beta)$$

est une fonction entière de s dans tout le plan qui vérifie uniformément la condition Θ (application du théorème du n° 9) ; 2° que c'est, pour toute valeur de s, une fonction synectique de t. Donc la fonction

$$(8). \quad . \quad . \quad T_1(s) = \frac{\pi^s}{(1-\gamma)^s\Gamma(s)}\int_0^1 \frac{t^{s-1}dt}{\sqrt{1-t}}\theta_1(s, t, \alpha, \beta)$$

est, par le théorème du n° 19, une fonction entière de s qui vérifie uniformément la condition Θ. Le théorème est donc démontré.

30. *Remarque*. La fonction $T(s)$ du théorème précédent dépend aussi des trois paramètres α, β, γ; ses dérivées partielles par rapport à ces trois paramètres sont aussi des fonctions entières de s qui vérifient uniformément la condition Θ, quand α varie dans l'intervalle (0, 1) et β entre des limites finies quelconques.

Nous avons fait, en effet, la décomposition

$$T(s) = T_1(s) + T_2(s).$$

Notre remarque s'applique à $T_2(s)$, en vertu de la formule (6), parce que les dérivées partielles de $\theta_2(t, \alpha, \beta)$ par rapport à α et β jouissent, comme le montre la formule (5), des propriétés que nous avons attribuées à cette fonction elle-même.

Notre remarque s'applique aussi à $T_1(s)$, en vertu de la formule (8), parce que les dérivées partielles par rapport à α et β de la fonction $\theta_1(s, t, \alpha, \beta)$, définie par la formule (7), jouissent aussi des propriétés que nous avons attribuées à cette fonction elle-même.

31. Théorème. *On peut former les dérivées partielles par rapport aux trois paramètres* u, v *et* γ *de la fonction*

$$Z_k(s, u, v) - Z_k(s, 1-u, 1-v),$$

qui dépend de ces trois paramètres. Ces nouvelles fonctions sont encore des fonctions entières de s *dans tout le plan qui vérifient uniformément la condition* Θ, *les paramètres* u *et* v *étant considérés comme variables dans l'intervalle* (0, 1).

Dans les numéros 28 et 29, nous avons décomposé la fonction, qui figure dans l'énoncé du théorème, dans la somme suivante:

$$Y_1(s) + T(s) + \frac{\pi^s}{(1-\gamma)^s\Gamma(s)}\left[\sum_{x=1}^{h-e}\int_0^1 e^{[\beta^2-(x-\alpha)^2]\pi t}t^{s-1}dt \right.$$
$$\left. - \sum_{x=0}^{h+e-1}\int_0^1 e^{[\beta^2-(x+\alpha)^2]\pi t}t^{s-1}dt\right].$$

Tous ces termes dépendent de trois paramètres α, β et γ. Mais les paramètres α et β (n° 27) sont des fonctions de u, v et γ ayant des dérivées partielles bien déterminées et indépendantes de s. Il suffit donc de démontrer que les dérivées partielles de la somme ci-dessus par rapport à α et β et γ vérifient la condition Θ.

La chose a été faite pour $T(s)$ au numéro précédent. En ce qui concerne $Y_1(s)$, on se reportera à la formule (4) du n° 28 et l'on verra que l'on peut raisonner sur les dérivées comme sur la fonction elle-même. Enfin, pour tous les autres termes, la conclusion est immédiatement apparente, les dérivées tombant

comme les termes eux-mêmes sous l'application du théorème du n° 18.

32. Théorème. *La fonction*

$$Z_k(s, u, v) + Z_k(s, 1-u, 1-v),$$

peut, pour $\Re(s) > \frac{1}{2}$, *se mettre sous la forme*

$$\theta(s, u, v) + \frac{\pi^s}{(1-\gamma)^s \Gamma(s)} \int_0^1 e^{\beta^2 \pi t} t^{s-\frac{3}{2}} dt,$$

où θ (s, u, v) *désigne une fonction entière de* s *dans toute l'étendue du plan et qui vérifie uniformément la condition* Θ *quand les deux paramètres* u *et* v *varient dans l'intervalle* (0, 1).

Démonstration. En ajoutant membre à membre les formules (3) et (3bis) du n° 27, puis en ajoutant dans le second membre des termes qui se détruisent comme au n° 28, et ayant égard à la relation (2ᵉ partie, n° 2)

$$\psi_1(\alpha, t) = \sum_{z=0}^{\infty} e^{-(z+\alpha)^2 \pi t} + \sum_{z=1}^{\infty} e^{-(z-\alpha)^2 \pi t},$$

on mettra la fonction $Z_k(s, u, v) + Z_k(s, 1-u, 1-v)$ qui nous intéresse sous la forme suivante (correspondant à la décomposition du n° 28) :

$$\frac{\pi^s}{(1-\gamma)^s \Gamma(s)} \int_1^{\infty} t^{s-1} dt\, e^{\beta^2 \pi t} \left[\sum_{z=k+e}^{\infty} e^{-(z+\alpha)^2 \pi t} + \sum_{z=k+1-e}^{\infty} e^{-(z-\alpha)^2 \pi t} \right]$$

$$- \frac{\pi^s}{(1-\gamma)^s \Gamma(s)} \left[\sum_{z=0}^{k+e-1} \int_0^1 e^{[\beta^2-(z-\alpha)^2]\pi t} t^{s-1} dt + \sum_{z=1}^{k-e} \int_0^1 e^{[\beta^2-(z-\alpha)^2]\pi t} t^{s-1} dt \right]$$

$$+ \frac{\pi^s}{(1-\gamma)^s \Gamma(s)} \int_0^1 e^{\beta^2 \pi t} \psi_1(\alpha, t)\, t^{s-1} dt.$$

La première ligne donne lieu à la même discussion que

le terme $Y_1(s)$ au n° 28; la seconde, à la même discussion que les sommes correspondantes dans la seconde expression de $Y_2(s)$ au n° 28. Ce sont donc des fonctions entières de s dans tout le plan qui vérifient la condition Θ.

Reste à considérer le terme écrit en troisième ligne. Changeons la variable d'intégration t en $1 : t$ et tenons compte de la relation (2) du n° 3 de la seconde partie, qui peut se mettre sous la forme

$$\psi_1\left(\alpha, \frac{1}{t}\right) = \sqrt{t}\left[1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2\pi t} \cos 2k\pi\alpha\right];$$

ce terme se décomposera en deux autres:

$$\frac{\pi^s}{(1-\gamma)^s\Gamma(s)}\int_1^{\infty} e^{\frac{\beta^2\pi}{t}} t^{-s-\frac{1}{2}} dt$$

$$+ \frac{2\pi^s}{(1-\gamma)^s\Gamma(s)}\int_1^{\infty} e^{\frac{\beta^2\pi}{t}} t^{-s-\frac{1}{2}} dt \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2\pi t} \cos 2k\pi\alpha$$

Le second terme est, à première vue, par le théorème du n° 9, une fonction entière de s qui vérifie la condition Θ; le premier devient, en changeant t en $\frac{1}{t}$,

$$\frac{\pi^s}{(1-\gamma)^s\Gamma(s)}\int_0^1 e^{\beta^2\pi t} t^{s-\frac{3}{2}} dt,$$

c'est-à-dire le terme qui figure dans l'énoncé du théorème. Le théorème est donc démontré.

33. *Propriétés analytiques de* $Z_h(s, u, v)$. Ces propriétés résultent immédiatement des théorèmes des n°s 28 et 32. On en conclut que l'on peut poser, pour $\Re(s) > \frac{1}{2}$,

$$(9). \quad Z_h(s, u, v) = \theta(s, u, v) + \frac{\pi^s}{2(1-\gamma)^s\Gamma(s)}\int_0^1 e^{\beta^2\pi t} t^{s-\frac{3}{2}} dt,$$

où $\theta(s, u, v)$ est, comme au n° 32, une fonction entière de s qui vérifie uniformément la condition Θ.

La fonction $Z_k(s, u, v)$ aura une infinité de pôles; ce sont ceux de la fonction

$$\frac{\pi^s}{2(1-\gamma)^s\Gamma(s)}\int_0^1 e^{\beta^2\pi t}\, t^{s-\frac{3}{2}}dt = \frac{\pi^s}{2(1-\gamma)^s\Gamma(s)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\pi\beta^2)^k}{k!}\int_0^1 t^{s+k-\frac{3}{2}}dt$$

$$= \frac{\pi^s}{2(1-\gamma)^s\Gamma(s)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\pi\beta^2)^k}{k!}\,\frac{1}{s+k-\frac{1}{2}}.$$

Ce développement, valable dans tout le plan s, met les pôles en évidence et fait connaître les résidus correspondants, si l'on se rappelle que (n° 27)

$$\beta^2 = \gamma\left(\frac{v-u}{1-\gamma}\right)^2.$$

La fonction $Z_k(s, u, v)$ possède donc tous les pôles $s = \frac{1}{2} - k$, $k = 0, 1, 2\ldots$, qui sont ceux de la fonction $\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)$, sauf cependant si $u = v$, auquel cas $\beta = 0$ et le pôle $s = \frac{1}{2}$ seul subsiste.

Enfin, en multipliant la formule (9) par $1 : \Gamma\left(s - \frac{1}{2}\right)$, on en conclut, moyennant le théorème du n° 18, où l'on changera s en $s - \frac{1}{2}$, que la fonction

$$\frac{Z_k(s, u, v)}{\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)}$$

est une fonction entière dans toute l'étendue du plan, qui vérifie la condition Θ.

CHAPITRE III

Étude des fonctions A (s, u, v), B (s, u, v) et de quatre fonctions auxiliaires

§ 1. *Définition et propriétés des fonctions auxiliaires*

$\psi_1(u, v, t), \chi_1(u, v, t), \psi_2(u, v, t), \chi_2(u, v, t)$

34. *Définition et propriétés fonctionnelles de* $\psi_1(u, v, t)$. Soit t une variable réelle, essentiellement positive, ensuite u et v des paramètres réels quelconques ; nous définirons la fonction $\psi_1(u, v, t)$ par la somme illimitée

$$(1). \quad . \quad . \quad \psi_1(u, v, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(n+u)^2\pi t} \cos 2\pi (n+u) v,$$

où n reçoit toutes les valeurs entières de $-\infty$ à $+\infty$.

La fonction définie par cette formule (1) renferme, comme cas particulier, la fonction $\psi_1(\alpha, x)$ de la deuxième partie (n° 3) avec laquelle elle se confond pour $v = 0$. Elle est visiblement, pour toute valeur de v, une fonction paire, continue et périodique de u, dont la période est l'unité.

On peut la développer, pour toutes les valeurs de u, dans la série trigonométrique

$$(2). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \psi_1(u, v, t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos 2k\pi u,$$

les coefficients ayant pour expressions

$$a_k = 2\int_0^1 \psi_1(u, v, t) \cos 2k\pi u \, du = 2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2\pi t} \cos(2\pi u v) \cos(2k\pi v) du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2\pi t} \left[\cos 2\pi (v+k) u + \cos 2\pi (v-k) u\right] du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{t}} \left[e^{-(k+v)^2 \frac{\pi}{t}} + e^{-(k-v)^2 \frac{\pi}{t}} \right].$$

Si l'on substitue ces valeurs dans la formule (2), elle devient

$$(3). \quad . \quad . \quad . \quad \psi_1(u, v, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-(k+v)^2 \frac{\pi}{t}} \cos 2k\pi u.$$

La comparaison des formules (1) et (3) montre la double réciprocité qui existe entre les paramètres de la fonction ψ_1 : d'abord une réciprocité de t avec lui-même, dont nous avons déjà reconnu l'importance dans la seconde partie du Mémoire à propos de $\psi_1(\alpha, x)$; ensuite une réciprocité correspondante entre les paramètres u et v.

35. *Définition et propriétés fonctionnelles de* χ_1 (u, v, t). Laissons aux variables u, v, t le même sens que dans le numéro précédent; la fonction $\chi_1(u, v, t)$ sera définie par la série doublement illimitée

$$(4). \quad . \quad . \quad \chi_1(u, v, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-(n+u)^2 \pi t} \sin 2\pi (n + u) v.$$

C'est une fonction impaire de u qui admet l'unité pour période. On peut donc, pour toutes les valeurs de u, la développer dans la série trigonométrique

$$(5). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \chi_1(u, v, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin 2k\pi u,$$

les coefficients ayant pour valeurs

$$\begin{aligned} b_k &= 2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2\pi t} \sin(2\pi u v) \sin(2k\pi u)\, du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2\pi t}\left[\cos 2\pi (v-k) u - \cos 2\pi (v+k) u\right] du \\ &= -\frac{1}{\sqrt{t}}\left[e^{-(k+v)^2\frac{\pi}{t}} - e^{-(k-v)^2\frac{\pi}{t}}\right]. \end{aligned}$$

Substituant ces valeurs dans (5), on trouve

$$(6) \ldots \chi_1(u, v, t) = -\frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-(k+v)^2 \frac{\pi}{t}} \sin 2k\pi u$$

et cette formule donne lieu aux mêmes remarques que la formule (3).

36. *Définitions de* ψ_2 (u, v, t) *et* χ_2 (u, v, t). Ces fonctions s'obtiennent, à un facteur près ($\pm 2\pi$), en différentiant les fonctions ψ_1 et χ_1 par rapport à v : on pose, par définition,

$$(7) \ldots \left\{ \begin{aligned} \psi_2(u, v, t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (n+u)\, e^{-(n+u)^2\pi t} \sin 2\pi(n+u)v, \\ \chi_2(u, v, t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (n+u)\, e^{-(n+u)^2\pi t} \cos 2\pi(n+u)v, \end{aligned} \right.$$

et l'on a par conséquent aussi des formules correspondant aux formules (3) et (6)

$$(8) \ldots \left\{ \begin{aligned} \psi_2(u, v, t) &= \frac{1}{t\sqrt{t}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (k+v)\, e^{-(k+v)^2\frac{\pi}{t}} \cos 2k\pi u, \\ \chi_2(u, v, t) &= \frac{1}{t\sqrt{t}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (k+v)\, e^{-(k+v)^2\frac{\pi}{t}} \sin 2k\pi u. \end{aligned} \right.$$

37. *Expressions particulières des fonctions précédentes.* Nous aurons à considérer ces fonctions dans le cas particulier où u et v varient entre *zéro* et *un* et où t est plus grand que *un*. Moyennant ces restrictions, les formules précédentes pourront se condenser, en désignant en général par $\theta(u, v, t)$ une fonction *continue* et *limitée* de u, v, t, sous les formes suivantes :

$$(9) \left\{ \begin{aligned} \psi_1(u, v, t) &= \cos(2\pi uv)\, e^{-u^2\pi t} + \cos[2\pi(1-u)v]\, e^{-(1-u)^2\pi t} + \theta(u, v, t)\, e^{-\pi t}, \\ \psi_1\left(u, v, \frac{1}{t}\right) &= \sqrt{t}\,[e^{-v^2\pi t} + \cos(2\pi u)\, e^{-(1-v)^2\pi t} + \theta(u, v, t)\, e^{-\pi t}], \end{aligned} \right.$$

$$(10)\quad \begin{cases} \chi_1(u, v, t) = \sin(2\pi uv)e^{-u^2\pi t} - \sin[2\pi(1-u)v]e^{-(1-u)^2\pi t} + \theta(u,v,t)e^{-\pi t}, \\ \chi_1\left(u, v, \dfrac{1}{t}\right) = \sqrt{t}\,[\sin(2\pi u)e^{-(1-v)^2\pi t} + \theta(u, v, t)\, e^{-\pi t}], \end{cases}$$

$$(11)\quad \begin{cases} \psi_2(u, v, t) = u\sin(2\pi uv)e^{-u^2\pi t} + (1-u)\sin[2\pi(1-u)v]e^{-(1-u)^2\pi t} + \theta(u,v,t)e^{-\pi t}, \\ \psi_2\left(u, v, \dfrac{1}{t}\right) = t\sqrt{t}\,[ve^{-v^2\pi t} - (1-v)\cos(2\pi u)\, e^{-(1-v)^2\pi t} + \theta(u, v, t)\, e^{-\pi t}], \end{cases}$$

$$(12)\quad \begin{cases} \chi_2(u, v, t) = u\cos(2\pi uv)e^{-u^2\pi t} - (1-u)\cos[2\pi(1-u)v]e^{-(1-u)^2\pi t} + \theta(u,v,t)e^{-\pi t}, \\ \chi_2\left(u, v, \dfrac{1}{t}\right) = t\sqrt{t}\,[(1-v)\sin(2\pi u)e^{-(1-v)^2\pi t} + \theta(u, v, t)\, e^{-\pi t}]. \end{cases}$$

Les formules (9) correspondent aux formules (1) et (3), les formules (10) à (4) et (6), les formules (11) et (12) à (7) et (8). On les obtient en isolant les termes relatifs à $n = 0$ et $n = -1$ ou bien à $k = 0$ et $k = -1$. Il est à remarquer que $\theta(u, v, t)$ représente une fonction différente dans chacune de ces formules, mais c'est toujours une fonction limitée de u, v, t.

§ 2. *Étude des fonctions* A (s, u, v) *et* B (s, u, v).

38. *Définitions de* $\mathrm{A}(s,u,v)$ *et* $\mathrm{B}(s,u,v)$. Soient s une variable imaginaire, u et v des paramètres réels. Nous n'imposerons d'abord aucune condition à v, mais nous supposerons que u est compris entre *zéro* et *un* (limites exclues). Cette restriction faite, nous posons, par définition, pour $\mathfrak{R}(s) > 1$,

$$(13)\quad \mathrm{A}(s,u,v) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos 2\pi(n+u)v}{(n+u)^s}, \quad \mathrm{B}(s,u,v) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin 2\pi(n+u)v}{(n+u)^s}\cdot$$

Ces séries sont absolument et uniformément convergentes pour $\mathfrak{R}(s) > 1$, mais les fonctions existent pour toutes les valeurs de s, comme nous le montrerons tout à l'heure.

Le cas où v est entier se résout immédiatement et nous

pouvons l'éliminer du paragraphe actuel. En effet, si v est entier, on a

$$A(s,u,v)=\cos 2\pi uv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+u)^s}, \qquad B(s,u,v)=\sin 2\pi uv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+u)^s},$$

et ces fonctions de s se ramènent à la fonction connue $B(\alpha, s)$ de la deuxième partie du Mémoire (n° 12); elles sont méromorphes et possèdent un pôle unique et simple $s=1$. Au contraire, si v est fractionnaire, les deux fonctions, ainsi qu'on le montrera bientôt, sont des fonctions synectiques de s dans tout le plan.

39. *Réduction au cas où* $0<v<1$. Nous pouvons nous borner maintenant au cas où v n'est pas entier et nous allons montrer qu'on peut même se réduire au cas où v est compris dans l'intervalle (0, 1). A cet effet, posons

$$v = \lambda + \alpha,$$

où α est compris entre *zéro* et *un* et où λ désigne un entier positif ou négatif. On aura, par les formules (13),

$$(14)\quad \begin{cases} A(s,u,v) = \cos 2\lambda\pi u \, A(s,u,\alpha) - \sin 2\lambda\pi u \, B(s,u,\alpha), \\ B(s,u,v) = \sin 2\lambda\pi u \, A(s,u,\alpha) + \cos 2\lambda\pi u \, B(s,u,\alpha), \end{cases}$$

ce qui prouve bien notre assertion, puisque $0<\alpha<1$.

40. *Extension de* A (s, u, v) *à tout le plan.* Nous pouvons maintenant supposer que u et v sont tous les deux compris dans l'intervalle (0, 1) et nous allons chercher, dans cette hypothèse, des formules capables de représenter $A(s,u,v)$ dans tout le plan. Par la relation

$$\frac{1}{(n+u)^s} = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \int_0^{\infty} t^{\frac{s}{2}-1} e^{-(n+u)^2\pi t} dt,$$

que nous multiplierons par $\cos(n+u)v$, il vient facilement, en

sommant par rapport à n et en tenant compte de la formule (1) au nº 34,

$$(15)\quad A(s,u,v)+A(s,1-u,v)=\frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\int_0^{\infty}\psi_1(u,v,t)\,t^{\frac{s}{2}-1}dt.$$

Le second membre converge pour toute valeur de s. Mais cette circonstance n'est pas apparente dans la formule précédente.

Pour la mettre en évidence, décomposons l'intervalle d'intégration en deux parties (0, 1) et (1, ∞) et changeons la variable d'intégration t en $1:t$ dans le premier de ces deux intervalles. Il viendra

$$(16)\quad A(s,u,v)+A(s,1-u,v)=\frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\int_1^{\infty}\left[\psi_1(u,v,t)t^{\frac{s}{2}}+\psi_1\left(u,v,\frac{1}{t}\right)t^{-\frac{s}{2}}\right]\frac{dt}{t}.$$

Maintenant la convergence de l'intégrale pour toute valeur de s est une conséquence immédiate des formules (9).

En second lieu, en partant de la relation

$$\frac{1}{(n+u)^{s+1}}=\frac{\pi^{\frac{s+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}\int_0^{\infty}t^{\frac{s+1}{2}-1}e^{-(n+u)^2\pi t}dt,$$

que nous multiplierons par $(n+u)\cos(n+u)v$, il viendra, en sommant par rapport à n, eu égard à la formule (7),

$$(17)\quad A(s,u,v)-A(s,1-u,v)=\frac{\pi^{\frac{s+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}\int_0^{\infty}\chi_2(u,v,t)\,t^{\frac{s+1}{2}-1}dt;$$

puis, en opérant comme dans le premier cas,

$$(18)\quad A(s,u,v)-A(s,1-u,v)=\frac{\pi^{\frac{s+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}\int_1^{\infty}\left[\chi_2(u,v,t)t^{\frac{s+1}{2}}+\chi_2\left(u,v,\frac{1}{t}\right)t^{-\frac{s+1}{2}}\right]\frac{dt}{t}.$$

Le second membre fournit maintenant, eu égard aux équations (12), une représentation valable dans tout le plan.

En additionnant membre à membre les équations (16) et (18), on aura une représentation de A (s, u, v) valable dans tout le plans s, qui montre (n° 9) que, u et v étant supposés donnés et compris entre *zéro* et *un*, la fonction A (s, u, v) est entière dans tout le plan et vérifie la condition Θ. Nous reviendrons sur ce point tout à l'heure (n° 42).

41. *Extension de* B (s, u, v) *à tout le plan*. Supposons encore u et v compris dans l'intervalle (0, 1) et procédons comme dans le numéro précédent. On trouvera, comme les formules (15) et (16),

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} B(s,u,v)-B(s,1-u,v) &= \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\int_0^{\infty}\chi_1(u,v,t)\,t^{\frac{s}{2}-1}dt \\ &= \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\int_1^{\infty}\left[\chi_1(u,v,t)t^{\frac{s}{2}}+\chi_1\left(u,v,\frac{1}{t}\right)t^{-\frac{s}{2}}\right]\frac{dt}{t}.\end{aligned}\right.$$

Sous cette dernière forme, u et v n'étant pas entiers, la convergence de l'intégrale pour toute valeur de s résulte immédiatement des formules (10).

En second lieu, on trouvera, comme les formules (17) et (18),

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} B(s,u,v)+B(s,1-u,v) &= \frac{\pi^{\frac{s+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}\int_0^{\infty}\psi_2(u,v,t)\,t^{\frac{s+1}{2}-1}dt \\ &= \frac{\pi^{\frac{s+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}\int_1^{\infty}\left[\psi_2(u,v,t)t^{\frac{s+1}{2}}+\psi_2\left(u,v,\frac{1}{t}\right)t^{-\frac{s+1}{2}}\right]\frac{dt}{t},\end{aligned}\right.$$

et ce second membre fournit, eu égard aux équations (11), une définition du premier membre valable dans tout le plan s.

En additionnant maintenant membre à membre les équations (19) et (20), on obtiendra une définition de B (s, u, v) valable dans tout le plan. Elle montre que B (s, u, v) est une fonction entière de s dans tout le plan qui vérifie la condition Θ, mais nous aurons à revenir sur ce point dans un instant (n° 43).

42. ***Manière dont*** **A (s, u, v)** ***vérifie la condition*** **Θ.** Nous venons de dire que A (s, u, v) vérifie la condition Θ pour des valeurs fractionnaires données de u, v. Mais, comme cette fonction présente un pôle pour v entier (n° 38), il est clair qu'elle ne peut pas vérifier *uniformément* la condition Θ quand v varie dans l'intervalle (0, 1). Il est très important d'étudier les propriétés de la fonction dans le voisinage de ces valeurs limites 0 et 1 où elle cesse d'être entière. Pour faire cette étude, nous nous placerons au point de vue suivant, qui se présentera plus tard (§ 3) :

Nous supposerons que u est une constante donnée, comprise entre *zéro* et *un*, tandis que v seul est variable et peut tendre vers les limites 0 et 1.

Considérons d'abord la formule (16), savoir

$$A(s,u,v)+A(s,1-u,v)=\frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\left[\int_1^\infty \psi_1(u,v,t)t^{\frac{s}{2}}\frac{dt}{t}+\int_1^\infty \psi_1\left(u,v,\frac{1}{t}\right)t^{-\frac{s}{2}}\frac{dt}{t}\right].$$

La première intégrale, où $\psi_1(u,v,t)$ est donné par la première des formules (9) au n° 37, est, par le théorème du n° 9, une fonction entière de s qui vérifie *uniformément* la condition Θ. En effet, c'est u seul, lequel est considéré comme donné et compris entre *zéro* et *un*, qui figure dans les exposants.

Il n'en est pas de même dans la seconde intégrale. Celle-ci, par la seconde des formules (9), se met sous la forme

$$\int_1^\infty t^{-\frac{s+1}{2}}e^{-v^2\pi t}dt+\cos 2\pi u\int_1^\infty t^{-\frac{s+1}{2}}e^{-(1-v)^2\pi t}dt+\int_1^\infty \theta(u,v,t)\,t^{-\frac{s+1}{2}}e^{-\pi t}dt.$$

Le dernier terme de cette somme est, par le théorème du n° 9, une fonction entière de s qui vérifie *uniformément* la condition Θ dans l'intervalle $(0, 1)$ de v. Mais il est visible qu'il n'en est pas de même des deux premiers, dans lesquels l'exponentielle disparaît pour $v = 0$ ou pour $v = 1$. Pour résumer cette discussion dans une formule, désignons par $\theta(s, v)$ une fonction qui vérifie *uniformément* la condition Θ dans l'intervalle $(0, 1)$ de v; on pourra poser

$$(21)\quad \left\{ \begin{aligned} & A(s, u, v) + A(s, 1-u, v) = \theta(s, v) \\ & \qquad + \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \int_1^{\infty} t^{-\frac{s+1}{2}} dt \left[e^{-v^2 \pi t} + \cos 2\pi u \, e^{-(1-v)^2 \pi t} \right]. \end{aligned} \right.$$

En se servant des formules (12), on peut faire sur la formule (18) une discussion identique à la précédente et l'on trouve

$$(22)\quad \left\{ \begin{aligned} & A(s, u, v) - A(s, 1-u, v) = \theta(s, v) \\ & \qquad + (1-v) \sin 2\pi u \frac{\pi^{\frac{s+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)} \int_1^{\infty} t^{-\frac{s}{2}} e^{-(1-v)^2 \pi t} dt, \end{aligned} \right.$$

et $\theta(s, v)$ désigne, en général, une fonction entière de s qui vérifie *uniformément* la condition Θ dans l'intervalle $(0, 1)$ de v.

43. *Manière dont* B (s, u, v) *vérifie la condition* Θ. Supposons, comme au numéro précédent, que le paramètre u soit donné entre *zéro* et *un* (limites exclues) et que v seul soit variable entre *zéro* et *un*. La fonction $B(s, u, v)$ ne vérifiera pas *uniformément* la condition Θ dans cet intervalle $(0, 1)$ de v, mais une discussion semblable à celle du numéro précédent permet d'isoler, dans la représentation de cette fonction, les seuls termes auxquels tient cette difficulté.

En substituant les valeurs (10) dans les équations (19), on trouve, par le raisonnement du numéro précédent,

$$(23)\quad \left\{ \begin{aligned} & B(s, u, v) - B(s, 1-u, v) = \theta(s, v) \\ & \qquad + \sin 2\pi u \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \int_1^{\infty} e^{-(1-v)^2 \pi t} t^{-\frac{s+1}{2}} dt; \end{aligned} \right.$$

de même, en substituant les valeurs (11) dans les formules (20),

$$(24)\quad \left\{ \begin{aligned} & B(s, u, v) + B(s, 1-u, v) = \theta(s, v) \\ & \qquad + \frac{\pi^{\frac{s+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)} \int_1^{\infty} t^{-\frac{s}{2}} dt \left[v e^{-v^2 \pi t} - (1-v) \cos 2\pi u \, e^{-(1-v)^2 \pi t} \right]. \end{aligned} \right.$$

On représente, comme au numéro précédent, par $\theta(s, v)$ une fonction entière de s qui vérifie *uniformément* la condition Θ dans l'intervalle (0, 1) de v, mais cette fonction diffère, à part cela, d'une formule à l'autre.

§ 3. *Étude des intégrales*

$$\int_0^1 \frac{A(2s-1, u, kv)\, dv}{(p + 2qv + rv^2)^s}, \quad \int_0^1 \frac{B(2s-1, u, kv)\, dv}{(p + 2qv + rv^2)^s}.$$

44. Dans le paragraphe actuel, nous allons considérer des intégrales formées au moyen des fonctions A et B du paragraphe précédent et d'un trinôme du second degré en v

$$p + 2qv + rv^2,$$

assujetti aux conditions du n° 20 : 1° les coefficients p, q, r sont réels et $p > 0$; 2° le discriminant $\delta = q^2 - pr$ est positif; 3° le trinôme ne s'annule pas dans l'intervalle (0, 1) de v.

45. Théorème. *La fonction définie, pour toute valeur de* s, *par la formule*

$$\mathcal{A}_1(s) = \int_0^1 \frac{A(2s-1, u, v) + A(2s-1, 1-u, v)}{(p + 2qv + rv^2)^s} dv,$$

est une fonction entière de s dans tout le plan qui vérifie la condition Θ.

Démonstration. Remplaçons, sous le signe d'intégration, le numérateur par sa valeur (21) où l'on changera s en $2s-1$; $\mathcal{A}_1(s)$ deviendra

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^1 \frac{\theta(s,v)\,dv}{(p+2qv+rv^2)^s} + \frac{\pi^{s-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)}\int_0^1 dv \int_1^\infty \frac{e^{-v^2\pi t}t^{-s}\,dt}{(p+2qv+rv^2)^s} \\ &\qquad + \cos 2\pi u\, \frac{\pi^{s-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)}\int_0^1 dv \int_1^\infty \frac{e^{-(1-v)^2\pi t}t^{-s}\,dt}{(p+2qv+rv^2)^s}. \end{aligned}\right.$$

Le premier terme vérifie la condition Θ par le théorème du n° 7; le second par celui du n° 22; le troisième, moyennant le changement de la variable d'intégration v en $(1-v)$, prend la même forme que le second et vérifie la condition Θ pour la même raison (*).

Remarque. Si les coefficients p, q et r sont variables entre des limites finies sans cesser de vérifier les conditions du numéro précédent, la fonction $\mathcal{A}_1(s)$ vérifiera *uniformément* la condition Θ, pourvu que le trinôme $(p+2qv+rv^2)$ ne puisse pas tendre vers zéro, p, q, r variant dans les conditions indiquées et v dans l'intervalle $(0, 1)$.

Cette conclusion découle immédiatement de la remarque qui termine le n° 22.

(*) On remarquera que la démonstration précédente repose sur la présence du dénominateur $\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)$, devant le signe d'intégration, dans la formule (25). Si l'on remplaçait dans $\mathcal{A}_1(s)$ la somme $A(2s-1, u, v) + A(2s-1, 1-u, v)$ par la différence de ces deux termes, l'emploi de la formule (22) fournirait une formule analogue à (25), mais le dénominateur $\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)$ serait remplacé par $\Gamma(s)$, le théorème du n° 22 ne s'appliquerait plus et la nouvelle fonction ainsi formée aurait une infinité de pôles. Il résulte aussi de là que le quotient de cette nouvelle fonction par $\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)$ vérifierait la condition Θ.

46. Théorème. *La fonction définie, pour toute valeur de* s, *par la formule*

$$\mathfrak{B}_1(s) = \int_0^1 \frac{B(2s-1, u, v) - B(2s-1, 1-u, v)}{(p+2qv+rv^2)^s}\, dv$$

est une fonction entière de s *qui vérifie la condition* Θ (*).

Démonstration. Remplaçons, sous le signe d'intégration, le numérateur $B(2s-1, u, v) - B(2s-1, 1-u, v)$ par sa valeur, déduite de la formule (23) où l'on changera s en $2s-1$.

La fonction $\mathfrak{B}_1(s)$ se met sous la forme

$$(26)\qquad \int_0^1 \frac{\theta(s, v)\, dv}{(p+2qv+rv^2)^s} + \sin 2\pi u\, \frac{\pi^{s-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)} \int_0^1 dv \int_1^{\infty} \frac{t^{-s} e^{-(1-v)^2\pi t}\, dt}{(p+2qv+rv^2)^s}.$$

Ces deux termes vérifient la condition Θ, comme on l'a montré dans la démonstration du théorème précédent.

Remarque. Si les coefficients p, q et r sont variables, comme dans la remarque qui termine le numéro précédent, $\mathfrak{B}_1(s)$ vérifiera aussi uniformément la condition Θ.

47. Théorème. *Les dérivées partielles par rapport aux paramètres* p, q, r *des fonctions* $\mathfrak{A}_1(s)$ *et* $\mathfrak{B}_1(s)$ *des deux théorèmes précédents, sont encore des fonctions entières de* s *qui vérifient la condition* Θ.

Démonstration. Considérons, par exemple, l'expression (25) de $\mathfrak{A}_1(s)$ au n° 45. C'est une somme de trois termes, qui satis-

(*) Si l'on remplaçait dans l'expression de $\mathfrak{B}_1(s)$ la différence $B(2s-1, u, v) - B(2s-1, 1-u, v)$ par une somme, le théorème ne s'appliquerait plus et la fonction aurait une infinité de pôles (voir la note précédente). Mais le quotient de cette fonction par $\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)$ vérifierait de nouveau la condition Θ.

font séparément à l'énoncé du théorème : on le voit directement pour le premier; pour les deux autres, on le conclut de la remarque II qui complète le théorème du n° 22.

Remarque. Si les coefficients p, q, r sont variables comme dans la remarque du n° 45, les dérivées partielles dont il est question dans le théorème vérifieront aussi uniformément la condition Θ. C'est encore une conséquence de la remarque du n° 22 à laquelle nous venons de renvoyer.

48. Théorème. *Soient γ un nombre positif donné > 0 et < 1, et* k *un entier positif variable qui peut croître indéfiniment; la fonction définie par la formule*

$$\mathcal{A}_k(s) = \int_0^1 \frac{A(2s-1, u, kv) + A(2s-1, 1-u, kv)}{(1-\gamma v^2)^s}\, dv$$

est une fonction entière de s *dans tout le plan qui vérifie uniformément la condition Θ,* k *étant considéré comme variable.*

Démonstration. Soit λ le plus grand entier contenu dans kv; posons, comme au n° 39,

$$kv = \lambda + \alpha,$$

il viendra, par la formule (14) de ce numéro,

$$\mathcal{A}_k(s) = \int_0^1 \cos 2\lambda\pi u \frac{A(2s-1, u, \alpha) + A(2s-1, 1-u, \alpha)}{(1-\gamma v^2)^s}\, dv$$
$$- \int_0^1 \sin 2\lambda\pi u \frac{B(2s-1, u, \alpha) - B(2s-1, 1-u, \alpha)}{(1-\gamma v^2)^s}\, dv,$$

ou, par décomposition de l'intervalle (0, 1) d'intégration,

$$\mathcal{A}_k(s) = \sum_{\lambda=0}^{k-1} \cos 2\lambda\pi u \int_{\frac{\lambda}{k}}^{\frac{\lambda+1}{k}} \frac{A(2s-1, u, \alpha) + A(2s-1, 1-u, \alpha)}{(1-\gamma v^2)^s}\, dv$$
$$- \sum_{\lambda=0}^{k-1} \sin 2\lambda\pi u \int_{\frac{\lambda}{k}}^{\frac{\lambda+1}{k}} \frac{B(2s-1, u, \alpha) - B(2s-1, 1-u, \alpha)}{(1-\gamma v^2)^s}\, dv,$$

Prenons, dans chaque intervalle partiel $\left(\frac{\lambda}{k}, \frac{\lambda+1}{k}\right)$, α comme variable d'intégration au lieu de v. Il viendra

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned} \mathcal{A}_k(s) = \frac{1}{k}\sum_{\lambda=0}^{k-1} \cos 2\lambda\pi u \int_0^1 \frac{A(2s-1,u,\alpha)+A(2s-1,1-u,\alpha)}{\left[1-\gamma\left(\frac{\lambda+\alpha}{k}\right)^2\right]^s}\, d\alpha \\ -\frac{1}{k}\sum_{\lambda=0}^{k-1} \sin 2\lambda\pi u \int_0^1 \frac{B(2s-1,u,\alpha)-B(2s-1,1-u,\alpha)}{\left[1-\gamma\left(\frac{\lambda+\alpha}{k}\right)^2\right]^s}\, d\alpha, \end{aligned}\right.$$

Si l'on considère le trinôme du second degré en α

$$1-\gamma\left(\frac{\lambda+\alpha}{k}\right)^2 = \left(1-\gamma\frac{\lambda^2}{k^2}\right) - 2\left(\frac{\gamma\lambda}{k^2}\right)\alpha - \left(\frac{\gamma}{k^2}\right)\alpha^2$$
$$= p + 2q\alpha + r\alpha^2,$$

dont les coefficients p, q, r varient avec λ et k, on reconnait bien facilement que l'on se trouve dans les conditions où s'appliquent les remarques des n°s 45 et 46. Donc chacune des $2k$ intégrales qui figurent dans la dernière expression de $\mathcal{A}_k(s)$ vérifie *uniformément* la condition Θ, k et λ étant considérés comme variables et $\mathcal{A}_k(s)$, *qui est égal au quotient par* k de la somme de ces $2k$ intégrales, vérifie aussi *uniformément* la condition Θ, k étant considéré comme variable.

49. Théorème. *Les lettres γ et* k *ayant le même sens que dans le théorème précédent, la fonction*

$$\mathcal{B}_k(s) = \int_0^1 \frac{B(2s-1, u, kv) - B(2s-1, 1-u, kv)}{(1-\gamma v^2)^s}\, dv$$

est une fonction entière de s *dans tout le plan qui vérifie uniformément la condition* Θ, k *étant considéré comme variable.*

Démonstration. Ce théorème se démontre comme le précédent. On désigne par λ le plus grand entier contenu dans kv, et

en posant $kv = \lambda + \alpha$, on trouve, par la formule (14) du n° 39,

$$\mathfrak{B}_k(s) = \int_0^1 \sin 2\lambda\pi u \frac{A(2s-1, u, \alpha) + A(2s-1, 1-u, \alpha)}{(1-\gamma v^2)} dv$$

$$+ \int_0^1 \cos 2\lambda\pi u \frac{B(2s-1, u, \alpha) - B(2s-1, 1-u, \alpha)}{(1-\gamma v^2)} dv$$

et l'on poursuit comme dans le cas précédent.

50. Théorème. *Les dérivées partielles par rapport au paramètre γ des fonctions des deux théorèmes précédents :*

$$\frac{\partial}{\partial\gamma}\mathfrak{A}_k(s), \quad \frac{\partial}{\partial\gamma}\mathfrak{B}_k(s),$$

sont encore des fonctions entières de s *dans tout le plan qui vérifient uniformément la condition* Θ, k *étant considéré comme variable.*

Démonstration. Revenons, par exemple, à l'expression de $\mathfrak{A}_k(s)$ par la formule (27) au n° 48. La dérivée par rapport à γ de chaque intégrale qui y figure, telle que

$$\int_0^1 \frac{A(2s-1, u, \alpha) + A(2s-1, 1-u, \alpha)}{\left[1-\gamma\left(\frac{\lambda+\alpha}{k}\right)^2\right]} d\alpha$$

est encore une fonction qui vérifie uniformément la condition Θ. Cela résulte du théorème du n° 47, car si l'on pose

$$1-\gamma\left(\frac{\lambda+\alpha}{k}\right)^2 = p + 2q\alpha + r\alpha^2,$$

les dérivées partielles par rapport à γ se ramènent à une somme de dérivées partielles par rapport à p, q, r, multipliées respectivement par des facteurs < 1. La démonstration du n° 48 s'applique donc encore au théorème actuel.

§ 4. *Modifications des résultats précédents dans le cas où* $u=0$

51. Dans les deux paragraphes précédents il a été stipulé que u était compris entre *zéro* et *un*, limites exclues. Les théorèmes que nous avons établis cessent d'être vrais pour $u=0$. Mais ils peuvent dans ce cas être remplacés par d'autres plus simples que nous aurons aussi à utiliser. Nous allons indiquer comment l'analyse précédente doit être modifiée dans ce cas.

Dans le § 1 de ce chapitre, nous avons dû introduire quatre fonctions auxiliaires. Une seule nous suffira pour le but que nous poursuivons dans celui-ci. Si l'on pose $u=0$ dans les formules (1) et (3) du n° 4, on trouve

$$(28)\qquad \psi_1(o, v, t) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi t}\cos 2n\pi v = \frac{1}{\sqrt{t}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-(n+v)^2\pi t},$$

résultat qui coïncide avec ceux qui ont été établis dans la deuxième partie du Mémoire n° 3.

52. La fonction $A(s, u, v)$ du § 2 devient illusoire pour $u=0$, un de ses termes devenant infini. Nous lui substituerons, dans le cas actuel, la fonction

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n\pi v}{n^s},$$

qui est une fonction périodique du paramètre v.

La série précédente n'est absolument convergente que pour $\mathfrak{R}(s) > 1$, mais on trouve, en raisonnant comme au n° 40, une expression valable dans tout le plan.

On a d'abord

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n\pi v}{n^s} = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\int_0^{\infty} t^{\frac{s}{2}-1}\,dt\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi t}\cos 2n\pi v.$$

Partageons l'intervalle d'intégration en deux parties (0, 1) et (1, ∞); puis, dans le premier de ces intervalles, substituons à la somme qui est sous le signe d'intégration son expression donnée par la formule (28) :

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi t}\cos 2n\pi v = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{t}}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(n+v)^2\frac{\pi}{t}},$$

et changeons, dans ce même intervalle, la variable d'intégration t en $1:t$; il viendra, en observant que $s\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = 2\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n\pi v}{n^s} = -\frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{2\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)} + \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\int_1^{\infty} t^{\frac{s}{2}-1}dt\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi t}\cos 2n\pi v$$

$$+ \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{2\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\int_1^{\infty} t^{-\frac{s+1}{2}}dt\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(n+v)^2\pi t}.$$

Cette expression montre (nº 9) que la fonction est entière et vérifie la condition Θ lorsque v n'est pas entier. Supposons que v varie dans l'intervalle (0, 1), la fonction ne vérifiera pas *uniformément* la condition Θ, mais nous pouvons reproduire une discussion identique à celle du nº 42 et isoler les deux seuls termes auxquels tient cette difficulté. Ces termes correspondent aux valeurs $n = 0$ et $n = -1$ dans la dernière intégrale. On peut donc poser ici la formule suivante, qui remplacera la formule (21) du nº 42 :

$$(29)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n\pi v}{n^s} = \theta(s,v) + \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{2\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\int_1^{\infty} t^{-\frac{s+1}{2}}dt\left[e^{-v^2\pi t} + e^{-(1-v)^2\pi t}\right]$$

et $\theta(s, v)$ désigne, dans cette formule, une fonction entière de s dans tout le plan, qui vérifie *uniformément* la condition Θ dans l'intervalle (0, 1) de v.

Nous pouvons passer maintenant aux théorèmes qui remplaceront ceux du § 5.

53. Théorème. *Soit* $(p + 2qv + rv^2)$ *un trinôme du second degré en* v, *assujetti aux conditions du* n° **44**, *la fonction définie pour* $\Re(s) > 1$ *par la formule*

$$\int_0^1 \frac{dv}{(p + 2qv + rv^2)^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\pi v}{n^{2s-1}}$$

est une fonction entière de s *dans tout le plan qui vérifie la condition* Θ. *Les dérivées partielles de la fonction par rapport aux paramètres* p, q *et* r *jouissent de la même propriété* (*).

Démonstration. On remplace la somme sous le signe d'intégration par sa valeur (29) au numéro précédent et l'on retombe sur les démonstrations des n°s 45 et 47.

Remarque. On voit, comme dans la remarque du n° **45**, que si les paramètres p, q, r varient entre des limites finies sans cesser de satisfaire aux conditions du n° **44**, la fonction du théorème vérifiera *uniformément* la condition Θ. La même conclusion s'applique aux dérivées partielles par rapport à p, q et r.

54. Théorème. *Soit* γ *un nombre donné* > 0 *et* < 1 *et* k *un entier variable qui peut croître indéfiniment, la fonction définie, pour* $\Re(s) > 1$, *par la formule*

$$\int_0^1 \frac{dv}{(1 - \gamma v^2)^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2kn\pi v}{n^{2s-1}}$$

est une fonction entière de s *dans tout le plan qui vérifie uniformément la condition* Θ, k *étant considéré comme variable.*

(*) Si l'on remplaçait les cosinus par des sinus dans la fonction du théorème, elle cesserait d'être entière, mais, en la divisant par $\Gamma\left(s - \frac{1}{2}\right)$, elle vérifierait de nouveau la condition Θ (voir la note au n° 45).

Démonstration. Ce théorème remplace celui du n° 48 et se démontre de la même manière. Soit λ le plus grand entier contenu dans kv, on pose $kv = \lambda + \alpha$ et l'on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2kn\pi v}{n^{2s-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2kn\pi\alpha}{n^{2s-1}}.$$

Si l'on prend α comme variable d'intégration, la fonction du théorème se met sous la forme

$$\frac{1}{k}\sum_{\lambda=0}^{k-1} \int_0^1 \frac{d\alpha}{\left[1 - \gamma\left(\frac{\lambda+\alpha}{k}\right)^2\right]^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\pi\alpha}{n^{2s-1}}.$$

En raisonnant sur cette formule comme sur la formule (27) du n° 48, on voit que le théorème actuel est une simple conséquence du précédent et de la remarque qui l'accompagne.

55. Théorème. *La dérivée partielle par rapport à γ de la fonction précédente, c'est-à-dire la fonctian définie, pour $\Re(s) > 1$, par la formule*

$$\frac{\partial}{\partial\gamma} \int_0^1 \frac{dv}{(1-\gamma v^2)^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2kn\pi v}{n^{2s-1}}$$

est aussi une fonction entière de s *dans tout le plan qui vérifie uniformément la condition* Θ, k *étant considéré comme variable.*

Démonstration. Ce théorème remplace celui du n° 50 et se démontre de la même manière moyennant la substitution du théorème précédent à celui du n° 48.



CHAPITRE IV

ÉTUDE DE LA FONCTION $\mathcal{G}(s, u, v)$ (*)

§ 1. *Définition et développement en série de* $\mathcal{G}$(s, u, v)

56. *Définition de* $\mathcal{G}$(s, u, v). Cette fonction est, comme $Z(s, u, v)$, une fonction de la variable imaginaire s et de trois paramètres réels, u, v et γ, que nous supposerons tous compris entre 0 et 1 (limites exclues).

Elle est définie, pour $\mathfrak{R}(s) > 1$, par une somme double :

$$(1). \quad . \quad . \quad \mathcal{G}(s, u, v) = \sum_{x=1}^{\infty} \sum_{y=0}^{E(x+u-v)} \frac{1}{[(x+u)^2 - \gamma(y+v)^2]^s},$$

où l'on attribue à x toutes les valeurs entières de 1 à ∞ et où l'on donne à y, pour chaque valeur de x, toutes les valeurs entières $\geqq 0$ et $< (x + u - v)$. On remarquera que la plus grande valeur de y est x si $u > v$ et $x - 1$ si $u < v$. Nous excluons de notre analyse le cas où $u = v$, qui exigerait des considérations spéciales.

57. *Réduction de* $\mathcal{G}$(s, u, v) *à* $\mathcal{G}_h$(s, u, v). Nous désignerons par $\mathcal{G}_h(s, u, v)$, h étant un entier positif, la fonction qui s'obtient en supprimant dans la fonction $\mathcal{G}(s, u, v)$ tous les termes, en nombre limité, dans lesquels x est $< h$. On a ainsi

$$(2). \quad . \quad . \quad \mathcal{G}_h(s, u, v) = \sum_{x=h}^{\infty} \sum_{y=0}^{E(x+u-v)} \frac{1}{[(x+u)^2 - \gamma(y+v)^2]^s}.$$

(*) Il est à remarquer que cette fonction joue un rôle intermédiaire dans notre analyse, aussi notre but n'était nullement d'en faire ici une étude complète. Nous nous bornons strictement à démontrer les résultats qui doivent nous servir au chapitre VI. Quelques autres résultats seront indiqués en note et sans démonstration, à titre d'éclaircissement, lorsque nous le jugerons utile.

Les deux fonctions $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}_h$ ne diffèrent l'une de l'autre que par la suppression d'un nombre limité d'exponentielles qui sont toutes des fonctions synectiques de s dans tout le plan et qui vérifient la condition Θ. Donc, au point de vue des singularités ou de la condition Θ, l'étude de $\mathcal{G}$ se ramène entièrement à celle de $\mathcal{G}_h$.

Dans la suite, nous supposerons que l'on ait choisi h assez grand pour que l'on ait (comme au n° 26)

$$h > \sqrt{\gamma}\,(h+1).$$

Dans cette hypothèse, la quantité $(x+u)^2 - \gamma(y+v)^2$ sera essentiellement positive et non nulle dans tous les termes de $\mathcal{G}_h$, alors même que u et v varient dans l'intervalle (0,1), et cette condition est nécessaire pour que les développements trigonométriques que nous allons effectuer ne donnent lieu à aucune critique.

58. *Développement de* $\mathcal{G}_h(s, u, v)$ *en série trigonométrique.* Nous désignerons désormais par u une quantité supérieure à v, de sorte que la limite supérieure de y dans la somme du second membre de l'équation (2) sera x. On peut développer la fonction $\mathcal{G}_h(s, u, v)$ en série trigonométrique par rapport à v dans l'intervalle (0,1). Ce développement sera de la forme

$$(3).\quad . \quad . \; \mathcal{G}_h(s, u, v) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos 2k\pi v + b_k \sin 2k\pi v).$$

Le coefficient a_0 aura pour valeur

$$a_0 = 2\int_0^1 \mathcal{G}_h(s, u, v)\,dv = 2\sum_{x=h}^{\infty}\sum_{y=0}^{x}\int_0^1 \frac{dv}{[(x+u)^2 - \gamma\,(y+v)^2]^s}.$$

Dans le second membre de cette équation, la somme par rapport à y se transforme immédiatement en une seule intégrale aux limites 0 et $(x+1)$. La même transformation s'applique

aux coefficients a_k et b_k, de telle sorte que ces coefficients se présentent d'abord sous la forme :

$$(4)\dots\quad\begin{cases} a_0 = 2\sum_{x=h}^{\infty}\int_0^{x+1}\frac{dv}{[(x+u)^2-\gamma v^2]^s}, \\ a_k = 2\sum_{x=h}^{\infty}\int_0^{x+1}\frac{\cos 2k\pi v\, dv}{[(x+u)^2-\gamma v^2]^s}, \\ b_k = 2\sum_{x=h}^{\infty}\int_0^{x+1}\frac{\sin 2k\pi v\, dv}{[(x+u)^2-\gamma v^2]^s}. \end{cases}$$

59. *Développement de $\mathcal{G}_h(s, 1-u, 1-v)$ en série trigonométrique.* Continuons à désigner par u et v les deux paramètres considérés au numéro précédent ($u > v$) et représentons par u' et v' leurs compléments

$$u' = 1 - u, \quad v' = 1 - v.$$

On aura, à l'inverse de ce qui avait lieu pour u et v,

$$u' < v';$$

de sorte que, si l'on accentue u et v dans la formule (2), la limite supérieure de la somme par rapport à y sera $x - 1$ au second membre de cette formule.

Posons donc le nouveau développement trigonométrique :

$$(5)\dots\quad\begin{cases} \mathcal{G}_h(s, u', v') = \frac{1}{2}a'_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a'_k \cos 2k\pi v' + b'_k \sin 2k\pi v') \\ \qquad = \frac{1}{2}a'_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a'_k \cos 2k\pi v - b'_k \sin 2k\pi v), \end{cases}$$

valable aussi dans l'intervalle (0, 1) de v. Les nouveaux coefficients auront pour valeurs :

$$
(6) \ldots \quad \left\{
\begin{aligned}
a'_0 &= 2\sum_{x=h}^{\infty}\int_0^{x}\frac{dv}{[(x+u')^2-\gamma v^2]^s},\\
a'_k &= 2\sum_{x=h}^{\infty}\int_0^{x}\frac{\cos 2k\pi v\,dv}{[(x+u')^2-\gamma v^2]^s},\\
b'_k &= 2\sum_{x=h}^{\infty}\int_0^{x}\frac{\sin 2k\pi v\,dv}{[(x+u')^2-\gamma v^2]^s}.
\end{aligned}
\right.
$$

§ 2. *Étude de la fonction* $\mathrm{a}_0 + \mathrm{a}'_0$

60. *Transformation de* $\mathrm{a}_0 + \mathrm{a}'_0$. En décomposant l'intervalle d'intégration en deux parties, on tire des formules (4) et (6)

$$
\left\{
\begin{aligned}
a_0 &= 2\sum_{x=h}^{\infty}\left[\int_0^{x+u} + \int_{x+u}^{x+1}\right]\frac{dv}{[(x+u)^2-\gamma v^2]^s},\\
a'_0 &= 2\sum_{x=h}^{\infty}\left[\int_0^{x+u'} - \int_{x}^{x+u'}\right]\frac{dv}{[(x+u')^2-\gamma v^2]^s}.
\end{aligned}
\right.
$$

Changeons la variable d'intégration v :

En	$(x+u)v$	dans l'intégrale aux limites	$(0, x+u)$,
»	$(x+u')v$	» »	$(0, x+u')$,
»	$(x+u+v)$	» »	$(x+u, x+1)$,
»	$(x+u'-v)$	» »	$(x, x+u')$.

Il viendra

$$
(7) \quad \left\{
\begin{aligned}
a_0 &= 2\sum_{x=h}^{\infty}\frac{1}{(x+u)^{2s-1}}\int_0^{1}\frac{dv}{(1-\gamma v^2)^s} + 2\sum_{x=h}^{\infty}\int_0^{1-u}\frac{dv}{[(x+u)^2-\gamma(x+u+v)^2]^s},\\
a'_0 &= 2\sum_{x=h}^{\infty}\frac{1}{(x+u')^{2s-1}}\int_0^{1}\frac{dv}{(1-\gamma v^2)^s} - 2\sum_{x=h}^{\infty}\int_0^{u'}\frac{dv}{[(x+u')^2-\gamma(x+u'-v)^2]^s}.
\end{aligned}
\right.
$$

Posons

$$
(8) \ldots \quad \zeta_{1,h}(u,s) = \sum_{x=h}^{\infty}\frac{1}{(x+u)^s} + \sum_{x=h+1}^{\infty}\frac{1}{(x-u)^s}.
$$

Cette fonction est une fonction connue; elle ne diffère de la fonction $\zeta_1(\alpha, s)$, définie par la formule (5) au n° 6 de la deuxième partie du Mémoire, que par la suppression des h premiers termes dans chacune des deux sommes. C'est donc une fonction méromorphe; elle n'a qu'un seul pôle $s = 1$, qui est simple et dont le résidu est 2 (n° 7 de la deuxième partie). La formule (7) au n° 7 de la deuxième partie du Mémoire montre, par l'application du théorème du n° 9, que $\zeta_1(\alpha, s)$ peut se mettre sous la forme

$$\zeta_1(\alpha, s) = \frac{2}{s-1} + \theta(s),$$

où $\theta(s)$ est une fonction entière qui vérifie la condition Θ (α étant donné entre *zéro* et *un*). Donc $\zeta_{1h}(u, s)$ peut aussi se mettre sous la même forme et le produit $(s-1)\,\zeta_{1h}(u, s)$ est une fonction entière dans tout le plan qui vérifie la condition Θ.

Additionnons les formules (7) membre à membre, en remplaçant u' par $(1-u)$ et en nous reportant à la définition de $Z_h(s, u, v)$ donnée au n° 26; il viendra

$$(9)\quad \left\{ \begin{aligned} a_0 + a'_0 = {} & 2\zeta_{1h}(u, 2s-1)\int_0^1 \frac{dv}{(1-\gamma v^2)^s} \\ & + 2\int_0^{1-u} [Z_h(s, u, u+v) - Z_h(s, 1-u, 1-u-v)]\,dv. \end{aligned} \right.$$

Cette formule conduit au théorème suivant :

61. Théorème. *La fonction* $a_0 + a'_0$ *est une fonction méromorphe de* s *qui n'a qu'un seul pôle* $s = 1$ *et elle peut se mettre sous la forme*

$$\frac{1}{s-1}\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\log\frac{1+\sqrt{\gamma}}{1-\sqrt{\gamma}} + \theta(s),$$

où $\theta(s)$ *désigne une fonction entière dans tout le plan qui vérifie la condition* Θ.

Démonstration. Le terme écrit sur la seconde ligne dans le

second membre de l'équation (9) est de la forme $\theta(s)$, en vertu des théorèmes des n° 28 et 7. Il reste donc à démontrer que celui qui est sur la première ligne est de la forme indiquée dans le théorème :

$$\frac{1}{s-1}\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\log\frac{1+\sqrt{\gamma}}{1-\sqrt{\gamma}}+\theta(s).$$

En vertu des remarques faites au numéro précédent, on peut poser

$$\zeta_{1h}(u, 2s-1)=\frac{1}{s-1}+\theta(s).$$

D'autre part, en développant suivant les puissances de $(s-1)$, on a

$$\int_0^1 \frac{dv}{(1-\gamma v^2)^s}=\theta(s-1)=\int_0^1 \frac{dv}{1-\gamma v^2}+(s-1)\,\theta(s).$$

On trouve, en multipliant ces deux équations membre à membre

$$\zeta_{1h}(u, 2s-1)\int_0^1 \frac{dv}{(1-\gamma v^2)^s}=\frac{1}{s-1}\int_0^1 \frac{dv}{1-\gamma v^2}+\theta(s).$$

Multiplions encore par 2 et effectuons l'intégration au second membre; nous retomberons sur l'expression qu'il s'agissait d'obtenir.

62. *Remarque sur les pôles de* a_0 *et* a'_0. Les fonctions a_0 et a'_0 ont toutes les deux une infinité de pôles, mais ces pôles se détruisent en faisant la somme. Pour l'établir, il suffit de considérer la fonction $a_0-a'_0$. Si l'on définit $\zeta_{2,h}$ par rapport à ζ_2 (2[e] partie, n° 9) comme nous venons de définir $\zeta_{1,h}$ par rapport à ζ_1, on aura, en soustrayant les équations (7),

$$a_0-a'_0=2\zeta_{2,h}(u, 2s-1)\int_0^1 \frac{dv}{(1-\gamma v^2)^s}$$
$$+2\int^{1-u}[Z_h(s,u,u+v)+Z_h(s,1-u,1-u-v)]\,dv,$$

si l'on remarque que $\zeta_{s,h}$ est une fonction entière qui vérifie la condition Θ (2ᵉ partie, n° 10) et si l'on se reporte au théorème du n° 32, où l'on doit faire actuellement

$$\beta^2 = \frac{\gamma v^2}{(1-\gamma)^2},$$

on trouve que le second membre de la dernière équation peut se mettre sous la forme

$$a_0 - a_0' = \theta(s) + \frac{2\pi^s}{(1-\gamma)^s \Gamma(s)} \int_0^{1-u} dv \int_0^1 e^{-\frac{\gamma v^2}{(1-\gamma)^2}\pi t}\, t^{s-\frac{3}{2}} dt.$$

Au second membre, le premier terme vérifie la condition Θ ; le second possède tous les pôles $s = \frac{1}{2} - k$ où $k = 0, 1, 2 \ldots$; les résidus correspondants se calculent sans aucune peine sous forme finie. Mais, si l'on fait le quotient de $(a_0 - a_0')$ par $\Gamma\left(s - \frac{1}{2}\right)$, on trouve une fonction entière qui vérifie la condition Θ. Nous n'insisterons pas sur ces calculs qui ne doivent pas nous servir. On pourrait faire dans les paragraphes suivants des remarques analogues aux précédentes au sujet des expressions $(a_k - a_k')$ et $(b_k + b_k')$, dont il ne sera pas question, mais qui sont voisines de celles que nous allons y étudier.

§ 3. *Étude de la fonction* $\mathrm{a}_k + \mathrm{a}_k'$

63. *Transformation de* $\mathrm{a}_k + \mathrm{a}_k'$. Faisons sur les équations (4) et (6) donnant a_k et a_k' les mêmes décompositions, puis les mêmes substitutions qu'au n° 60; il viendra

$$(10) \ldots \left\{ \begin{aligned} a_k &= 2\int_0^1 \frac{dv}{(1-\gamma v^2)^s} \sum_{x=h}^{\infty} \frac{\cos 2k\pi(x+u)v}{(x+u)^{2s-1}} \\ &\quad + 2\int_0^{1-u} dv \sum_{x=h}^{\infty} \frac{\cos 2k\pi(u+v)}{[(x+u)^2 - \gamma(x+u+v)^2]^s}, \\ a_k' &= 2\int_0^1 \frac{dv}{(1-\gamma v^2)^s} \sum_{x=h}^{\infty} \frac{\cos 2k\pi(x+u')v}{(x+u')^{2s-1}} \\ &\quad - 2\int_0^{u'} dv \sum_{x=h}^{\infty} \frac{\cos 2k\pi(u+v)}{[(x+u')^2 - \gamma(x+u'-v)^2]^s}. \end{aligned} \right.$$

Posons

$$A_h(2s-1, u, kv) = \sum_{x=h}^{\infty} \frac{\cos 2k\pi(x+u)v}{(x+u)^{2s-1}}.$$

Cette fonction est connue; elle ne diffère de la fonction $A(2s-1, u, kv)$ du chapitre III que par la suppression d'un nombre limité de termes, qui sont des fonctions entières de s dans tout le plan et qui vérifient la condition Θ.

Les formules (10) donnent alors

$$(11) \left\{ \begin{aligned} a_k+a'_k = {} & 2\int_0^1 \frac{dv}{(1-\gamma v^2)^s}[A_h(2s-1, u, kv) + A_h(2s-1, 1-u, kv)] \\ & +2\int_0^{1-u} \cos 2k\pi(u+v)[Z_h(s,u,u+v) - Z_h(s,1-u,1-u-v)]dv. \end{aligned} \right.$$

On déduit de là le théorème suivant :

64. Théorème. *La fonction* $(a_k + a'_k)$ *est une fonction entière de* s *dans tout le plan qui vérifie uniformément la condition* Θ, k *étant considéré comme variable de* 1 *à* ∞.

Démonstration. Considérons le second membre de la formule (11). Le terme écrit sur la première ligne vérifie *uniformément* la condition Θ, car il ne diffère de la fonction $\mathcal{A}_k(s)$ qui fait l'objet du théorème du n° 48 que par un nombre limité d'expressions du type

$$\frac{1}{(x+u)^{2s-1}}\int_0^1 \frac{\cos 2k\pi(x+u)v}{(1-\gamma v^2)^s}dv,$$

qui vérifient *uniformément* la condition Θ (k n'entrant que dans un cosinus indépendant de s).

Le terme écrit sur la seconde ligne est, en vertu des théorèmes des n°s 27 et 8, comme précédemment, une fonction qui vérifie *uniformément* la condition Θ. Le théorème est donc établi.

65. Théorème. *La dérivée partielle de la fonction* $(a_k + a'_k)$ *par rapport au paramètre* γ *dont elle dépend, est aussi une fonction qui vérifie uniformément la condition* Θ *quand l'entier* k *varie de* 1 *à* ∞.

Démonstration. La dérivée $\frac{\partial}{\partial\gamma}(a_k + a'_k)$ est la somme de deux fonctions

$$\frac{\partial}{\partial\gamma}\int_0^1 \frac{dv}{(1-\gamma v^2)^s}\left[A_k(2s-1, u, kv) + A_k(2s-1, 1-u, kv)\right]$$

$$+\int_0^{1-u} \cos 2k\pi(u+v)\frac{\partial}{\partial\gamma}\left[Z_k(s, u, u+v) - Z_k(s, 1-u, 1-u-v)\right]dv,$$

qui vérifient toutes les deux le théorème actuel, la première par le théorème du n° 50, la seconde par celui du n° 31.

66. Le théorème du n° 64 ne nous suffit pas pour la suite, parce que nous aurons à démontrer qu'une série composée d'un nombre illimité de termes, $\Sigma(a_k + a'_k)$, vérifie aussi la condition Θ. Nous arriverons à notre but en nous appuyant sur le théorème qui précède et en procédant par intégrations par parties.

Revenons aux formules (4) où l'on a

$$(12).\quad\ldots\quad a_k = 2\sum_{x=h}^{\infty}\int_0^{x+1}\frac{\cos 2k\pi v\, dv}{[(x+u)^2-\gamma v^2]^s}.$$

Transformons chaque terme de cette somme par deux intégrations par parties consécutives portant sur la ligne trigonométrique. Si l'on a soin de remarquer que kx est un entier, on obtiendra

$$(13)\quad\left\{\begin{aligned}\int_0^{x+1}\frac{\cos 2k\pi v\, dv}{[(x+u)^2-\gamma v^2]^s} = {} & \frac{2\gamma s}{(2k\pi)^2}\frac{x+1}{[(x+u)^2-\gamma(x+1)^2]^{s+1}} \\ & -\frac{2\gamma s}{(2k\pi)^2}\int_0^{x+1}\frac{\cos 2k\pi v\, dv}{[(x+u)^2-\gamma v^2]^{s+1}} \\ & -\frac{4\gamma^2 s(s+1)}{(2k\pi)^2}\int_0^{x+1}\frac{\cos 2k\pi v}{[(x+u)^2-\gamma v^2]^{s+2}}v^2 dv.\end{aligned}\right.$$

Les termes du second membre peuvent s'écrire

$$
(14).\quad\left\{
\begin{aligned}
&\frac{1}{(2k\pi)^2}\left[\frac{\partial}{\partial v}\frac{1}{[(x+u)^2-\gamma(x+v)^2]^s}\right]_{v=1}\\
&-\frac{2\gamma s}{(2k\pi)^2}\int_0^{x+1}\frac{\cos 2k\pi v\,dv}{[(x+u)^2-\gamma v^2]^{s+1}}\\
&-\frac{4\gamma^2 s}{(2k\pi)^2}\frac{\partial}{\partial\gamma}\int_0^{x+1}\frac{\cos 2k\pi v\,dv}{[(x+u)^2-\gamma v^2]^{s+1}}.
\end{aligned}\right.
$$

Substituons cette valeur des intégrales dans l'expression (12) de a_k; le résultat pourra s'écrire, en précisant par la notation $a_k(s)$ la valeur de l'argument s qui entre dans cette fonction,

$$
(15).\quad\left\{
\begin{aligned}
a_k(s)=&\frac{1}{2(k\pi)^2}\left[\frac{\partial}{\partial v}Z_h(s,u,v)\right]_{v=1}\\
&-\frac{\gamma s}{(k\pi)^2}\left(1+2\gamma\frac{\partial}{\partial\gamma}\right)a_k(s+1).
\end{aligned}\right.
$$

La même transformation s'applique à a'_k. On n'a pas de nouveau calcul à faire, si l'on remarque que l'on passe de a_k à a'_k en changeant x en $x-1$ et u en $2-u$ dans la formule (12). Il suffit donc de faire cette même substitution dans (13) et dans (14), où il n'y a pas de dérivation à faire par rapport à u ou à x. Mais le terme tout intégré dans (14) peut alors s'écrire autrement, car

$$
\left[\frac{\partial}{\partial v}\frac{1}{[(x+1-u)^2-\gamma(x-1+v)^2]^s}\right]_{v=1}
$$

$$
=-\left[\frac{\partial}{\partial v}\frac{1}{[(x+1-u)^2-\gamma(x+1-v)^2]^s}\right]_{v=1},
$$

et par conséquent la formule (15) sera remplacée par

$$
(16).\quad\left\{
\begin{aligned}
a'_k(s)=&-\frac{1}{2(k\pi)^2}\left[\frac{\partial}{\partial v}Z_h(s,1-u,1-v)\right]_{v=1}\\
&-\frac{\gamma s}{(k\pi)^2}\left(1+2\gamma\frac{\partial}{\partial\gamma}\right)a'_k(s+1).
\end{aligned}\right.
$$

On conclut de là le théorème suivant :

67. Théorème. *La fonction* $a_k + a'_k$ *peut se mettre sous la forme*

$$a_k + a'_k = \frac{\theta(s, k)}{k^2},$$

où $\theta(s, k)$ *vérifie uniformément la condition* Θ *quand l'entier* k *varie de* 1 *à* ∞.

Démonstration. On voit, par les formules (15) et (16), que la fonction $\theta(s, k)$ est représentée, à un facteur numérique près qui est $1 : 2\pi^2$, par la formule

$$\frac{\partial}{\partial v}[Z_k(s, u, v) - Z_k(s, 1-u, 1-v)]_{v=1}$$
$$-2\gamma s\left(1 + 2\gamma\frac{\partial}{\partial\gamma}\right)[a_k(s+1) + a'_k(s+1)].$$

Le terme de la première ligne ne contient pas k et vérifie la condition Θ par le théorème du n° 31 ; celui de la seconde ligne vérifie *uniformément* la condition Θ par les théorèmes des n°s 64 et 65, en y joignant celui du n° 6.

§ 4. *Étude de la fonction* $b_k - b'_k$

68. *Transformation de* $b_k - b'_k$. L'analyse du paragraphe actuel présente la plus grande analogie avec celle du paragraphe précédent. On fait, sur les équations (4) et (6) donnant b_k et b'_k aux n°s 58 et 59, les mêmes décompositions et les mêmes substitutions qu'au n° 60, et l'on trouve, en soustrayant les résultats,

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} b_k - b'_k &= 2\int_0^1 \frac{dv}{(1-\gamma v^2)^s}[B_k(2s-1, u, kv) - B_k(2s-1, 1-u, kv)] \\ &+ 2\int_0^{1-u} \sin 2k\pi(u+v)[Z_k(s,u,u+v) - Z_k(s,1-u,1-u-v)]dv. \end{aligned}\right.$$

Dans cette formule, la fonction B_h est définie par rapport à B comme A_h par rapport à A ; en d'autres termes, elle ne diffère de la fonction B définie par la formule 13 du n° 38 que par la suppression des termes, en nombre limité, dans lesquels n est $< h$.

69. Théorème. *La fonction* $\mathrm{b}_k - \mathrm{b}'_k$ *est une fonction entière de* s *dans tout le plan qui vérifie uniformément la condition* Θ *quand l'entier* k *varie de* 1 *à* ∞.

Démonstration. La démonstration est la même que celle du n° 64. Le terme écrit sur la première ligne dans la formule (17) vérifie uniformément la condition Θ par le théorème du n° 49; celui de la seconde ligne, par les théorèmes du n° 27 et du n° 7.

70. Théorème. *La dérivée partielle* $\frac{\partial}{\partial\gamma}(\mathrm{b}_k - \mathrm{b}'_k)$ *est aussi une fonction entière de* s *qui vérifie uniformément la condition* Θ *quand* k *varie de* 1 *à* ∞ (même démonstration qu'au n° 65).

71. Nous avons à reproduire ici une transformation analogue à celle du n° 66. Revenons à la troisième des formules (4) au n° 57, qui est

$$(18)\quad \ldots \quad b_k = 2\sum_{x=h}^{\infty}\int_0^{x+1}\frac{\sin 2k\pi v\,dv}{[(x+u)^2-\gamma v^2]^s}$$

et faisons subir à chaque terme deux intégrations par parties consécutives portant sur la ligne trigonométrique. On a ainsi

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned}\int_0^{x+1}\frac{\sin 2k\pi v\,dv}{[(x+u)^2-\gamma v)]^s} = &-\frac{1}{2k\pi}\left[\frac{1}{[(x+u)^2-\gamma(x+1)^2]^s}-\frac{1}{(x+u)^{2s}}\right]\\ &-\frac{2\gamma s}{(2k\pi)^2}\int^{x+1}\frac{\sin 2k\pi v\,dv}{[(x+u)^2-\gamma v^2]^{s+1}}\\ &-\frac{4\gamma^2 s(s+1)}{(2k\pi)^2}\int_0^{x+1}\frac{\sin 2k\pi v}{[(x+u)^2-\gamma v^2]^{s+2}}\,v^2dv.\end{aligned}\right.$$

Le second membre peut aussi se mettre sous la forme

$$(20). \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2k\pi}\left[\frac{1}{(x+u)^{2s}} - \frac{1}{[(x+u)^2 - \gamma(x+1)^2]^s}\right] \\ & - \frac{\gamma s}{2(k\pi)^2}\left(1 + 2\gamma\frac{\partial}{\partial\gamma}\right)\int_0^{x+1} \frac{\sin 2k\pi v dv}{[(x+u)^2 - \gamma v^2]^{s+1}}. \end{aligned} \right.$$

En substituant cette valeur (20) des intégrales dans la formule (18), on trouve

$$(21). \quad \left\{ \begin{aligned} b_k(s) = {} & \frac{1}{k\pi}\left[\sum_{x=k}^{\infty}\frac{1}{(x+u)^{2s}} - Z_k(s, u, 1)\right] \\ & - \frac{\gamma s}{(k\pi)^2}\left(1 + 2\gamma\frac{\partial}{\partial\gamma}\right) b_k(s+1). \end{aligned} \right.$$

Un calcul analogue s'applique à b'_k. Pour passer de b_k à b'_k, il suffit de changer x en $(x-1)$ et u en $1 + u' = 2 - u$ dans l'équation (18), donc aussi dans (19) et dans l'expression (20). L'équation (21) devra ainsi être remplacée par

$$(22). \quad \left\{ \begin{aligned} b'_k(s) = {} & \frac{1}{k\pi}\left[\sum_{x=k+1}^{\infty}\frac{1}{(x-u)^{2s}} - Z_k(s, 1-u, 0)\right] \\ & - \frac{\gamma s}{(k\pi)^2}\left(1 + 2\gamma\frac{\partial}{\partial\gamma}\right) b'_k(s+1). \end{aligned} \right.$$

72. Théorème. *La fonction* $b_k - b'_k$ *peut se mettre sous la forme*

$$\begin{aligned} b_k - b'_k = {} & \frac{1}{k\pi}\left[\sum_{x=k}^{\infty}\frac{1}{(x+u)^{2s}} - \sum_{x=k+1}^{\infty}\frac{1}{(x-u)^{2s}}\right] \\ & + \frac{1}{k\pi}[Z_k(s, 1-u, 0) - Z_k(s, u, 1)] + \frac{\theta_1(s, k)}{k^2}, \end{aligned}$$

où l'on désigne par $\theta_1(s, k)$ *une fonction entière de* s *dans tout le plan qui vérifie uniformément la condition* Θ *quand* k *varie de* 1 *à* ∞.

Démonstration. En effet, en additionnant les formules (21) et (22) du numéro précédent, on voit que, à part un facteur numérique indépendant de k, la fonction $\theta_1(s, k)$ a pour expression

$$\left(1 + 2\gamma \frac{\partial}{\partial\gamma}\right)[b_k(s+1) - b'_k(s+1)]$$

et il suffit d'appliquer les théorèmes des nos 69 et 70.

§ 5. *Étude de* $\mathcal{G}_h(s, u, v) + \mathcal{G}_h(s, 1-u, 1-v)$

73. *Développement trigonométrique.* Ce développement est immédiatement fourni par les formules (3) et (5) des nos 58 et 59. Il est de la forme

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} \mathcal{G}_h(s,u,v) + \mathcal{G}_h(s,1-u,1-v) &= \frac{1}{2}(a_0 + a'_0) + \sum (a_k + a'_k)\cos 2k\pi v \\ &+ \sum (b_k - b'_k)\sin 2k\pi v. \end{aligned}\right.$$

Remplaçons $a_k + a'_k$ et $b_k - b'_k$ par leurs expressions fournies par les théorèmes des nos 67 et 72; posons en abrégé (comme au n° 62)

$$\zeta_{2,h}(u, 2s) = \sum_{x=h}^{\infty} \frac{1}{(x+u)^{2s}} - \sum_{x=h+1}^{\infty} \frac{1}{(x-u)^{2s}};$$

enfin, remarquons que l'on a, dans l'intervalle (0, 1) de v,

$$\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2k\pi v}{k} = \frac{1}{2} - v.$$

La formule (23) pourra se mettre sous la forme

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned} \mathcal{G}_h(s,u,v) + \mathcal{G}_h(s,1-u,1-v) &= \frac{1}{2}(a_0 + a'_0) + \left(\frac{1}{2} - v\right)\zeta_{2,h}(2s, u) \\ &- \left(\frac{1}{2} - v\right)[Z_h(s, u, 1) - Z_h(s, 1-u, 0)] \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\theta(s,k)\cos 2k\pi v}{k^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\theta_1(s,k)\sin 2k\pi v}{k^2}. \end{aligned}\right.$$

On déduit de là le théorème suivant :

74. Théorème. *La fonction* $\mathcal{G}(s, u, v) + \mathcal{G}(s, 1-u, 1-v)$ *peut se mettre sous la forme*

$$\frac{1}{s-1}\frac{1}{2\sqrt{\gamma}}\log\frac{1+\sqrt{\gamma}}{1-\sqrt{\gamma}} + \theta(s),$$

où $\theta(s)$ *est une fonction entière de* s *dans tout le plan qui vérifie la condition* Θ (*).

Démonstration. Le théorème sera vrai pour $\mathcal{G}$, s'il l'est pour $\mathcal{G}_k$; considérons donc la décomposition (24). La fonction $\frac{1}{2}(a_0 + a'_0)$ peut se mettre sous la forme indiquée dans le théorème (n° 61). Il faut donc montrer que les autres fonctions qui figurent au second membre de la formule (24) sont de la forme $\theta(s)$. Pour $\zeta_{2,k}(2s, u)$, la chose a déjà été dite au n° 62 ; elle l'a été au n° 28 pour la fonction suivante. Il reste donc à considérer une des deux dernières sommes. Montrons, par exemple, que l'on a

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\theta(s, k)\cos 2k\pi v}{k^2} = \theta(s).$$

Pour cela, posons

$$\theta(s, k) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_{k,n}}{1.2\ldots n}s^n;$$

on aura, Δ étant indépendant de k,

$$\operatorname{mod} A_{k,n} < (\Delta l n)^n.$$

Donc, si l'on pose aussi

$$(25)\quad \ldots \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\theta(s, k)\cos 2k\pi v}{k^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n}{1.2\ldots n}s^n,$$

(*) Une analyse analogue s'applique à $\mathcal{G}(s, u, v) - \mathcal{G}(s, 1-u, 1-v)$. On peut montrer que cette fonction possède tous les pôles de $\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)$, mais que son quotient par $\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)$ vérifie la condition Θ. On en conclut facilement que le quotient de $(s-1)\,\mathcal{G}(s, u, v)$ par $\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)$ est aussi une fonction entière qui vérifie la condition Θ. On reconnaît ainsi que $\mathcal{G}(s, u, v)$ est le quotient de deux fonctions du premier genre.

on aura

$$\text{mod } B_n = \text{mod} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{k,n} \cos 2k\pi v}{k^2} < (\Delta ln)^n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2},$$

$$\text{mod } B_n < \frac{\pi^2}{6} (\Delta ln)^n,$$

c'est-à-dire que la fonction (25) vérifie aussi la condition Θ.

CHAPITRE V

Étude de la fonction $\mathcal{G}(s, 0, v)$

75. *Définition.* La fonction $\mathcal{G}(s, 0, v)$ est un cas particulier plus simple de la fonction $\mathcal{G}(s, u, v)$ du chapitre précédent, mais un cas que nous avons formellement exclu, savoir celui où $u = 0$. Par contre, nous supposerons, comme au chapitre précédent, que v est compris entre 0 et 1 (limites exclues). On a alors, par définition (n° 56),

$$(1)\ldots \quad \mathcal{G}(s, 0, v) = \sum_{x=1}^{\infty} \sum_{y=0}^{x-1} \frac{1}{[x^2 - \gamma (y + v)^2]^s}.$$

76. *Développement trigonométrique.* Ce développement, valable dans l'intervalle (0, 1) de v, sera de la forme

$$(2)\ldots \quad \mathcal{G}(s, 0\, v) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos 2k\pi v + b_k \sin 2k\pi v,$$

où les coefficients ont pour valeur (comme dans les formules (6) du n° 59)

$$(3)\ldots \quad \left\{ \begin{aligned} a_0 &= 2 \sum_{x=1}^{\infty} \int_0^x \frac{dv}{(x^2 - \gamma v^2)^s}, \\ a_k &= 2 \sum_{x=1}^{\infty} \int_0^x \frac{\cos 2k\pi v\, dv}{(x^2 - \gamma v^2)^s}, \\ b_k &= 2 \sum_{x=1}^{\infty} \int_0^x \frac{\sin 2k\pi v\, dv}{(x^2 - \gamma v^2)^s}. \end{aligned} \right.$$

77. Théorème. *La fonction* a_0 *est une fonction méromorphe de* s, *possédant un pôle unique et simple* s = 1 *et qui peut se mettre sous la forme*

$$a_0 = \frac{1}{2\sqrt{\gamma}} \log \frac{1+\sqrt{\gamma}}{1-\sqrt{\gamma}} \frac{1}{s-1} + \theta(s),$$

où θ (s) *est une fonction entière qui vérifie la condition* Θ.

Démonstration. En effet, en changeant la variable d'intégration v en vx dans la formule (3), il vient

$$a_0 = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2s-1}} \int_0^1 \frac{dv}{(1-\gamma v^2)^s} = 2\zeta(2s-1)\int_0^1 \frac{dv}{(1-\gamma v^2)^s}.$$

Comme on a, ainsi que nous allons le montrer

(4). . . . . . $\zeta(2s-1) = \frac{1}{2}\frac{1}{s-1} + \theta(s),$

la démonstration s'achèvera comme celle du n° 61. Il reste seulement à démontrer la formule (4). Pour cela, écrivons la formule (7) du n° 7 de la seconde partie du Mémoire sous la forme suivante, qui suppose seulement $\Re(s) > 1$:

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\left[\zeta_1(\alpha, s) - \frac{1}{\alpha^s}\right] = \frac{2}{s-1} + \int_1^{\infty}[\psi_1(\alpha, x) - e^{-\alpha^2\pi x}]x^{\frac{s}{2}-1}dx$$
$$- \int_0^1 e^{-\alpha^2\pi x}x^{\frac{s}{2}-1}dx$$
$$+ 2\sum_{k=1}^{\infty}\cos 2k\pi\alpha \int_1^{\infty} e^{-k^2\pi x}x^{-\frac{1+s}{2}}dx.$$

Dans cette formule, on peut faire tendre α vers zéro. Or on a

$$\lim_{\alpha=0}\left[\zeta_1(\alpha, s) - \frac{1}{\alpha^s}\right] = 2\zeta(s);$$

il viendra, par conséquent, à la limite, pour $\alpha = 0$,

$$2\zeta(s) = \frac{2\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \frac{1}{s-1} + \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \int_1^{\infty} [\psi_1(0, x) - 1] x^{\frac{s}{2}-1} dx$$

$$- \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)} + \frac{2\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \sum_{k=1}^{\infty} \int_1^{\infty} e^{-k^2\pi x} x^{-\frac{1+s}{2}} dx.$$

Tous ces termes, sauf le premier, sont de la forme $\theta(s)$ et l'on a, par conséquent,

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \theta(s).$$

Cette formule est équivalente à la formule (4) qu'il s'agissait d'établir.

78. Théorème. *La fonction* $\mathfrak{a}_k$ *du n° 76 est une fonction entière de* s *dans tout le plan qui vérifie uniformément la condition* Θ *quand* k *varie de* 1 *à* ∞.

En effet, en changeant la variable d'intégration v en vx dans la seconde des formules (3) on trouve

$$a_k = 2\int_0^1 \frac{dv}{(1-\gamma v^2)^s} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\cos 2k\pi v x}{x^{2s-1}},$$

et il suffit d'appliquer le théorème du n° 54.

79. Théorème. *La dérivée partielle* $\frac{\partial}{\partial\gamma}\mathfrak{a}_k$ *est une fonction entière de* s *dans tout le plan qui vérifie uniformément la condition* Θ *quand* k *varie de* 1 *à* ∞ (conséquence du n° 55).

80. *Transformation de* $\mathfrak{a}_k$. On peut faire subir à a_k dans le cas actuel une transformation identique à celle que l'on a fait subir à a'_k au n° 66 et qui est exprimée par l'équation (16). Nous

rencontrons simplement ici le cas particulier où $1 - u$ est égal à zéro dans cette équation. Si l'on observe que

$$-\left[\frac{\partial}{\partial v} Z(s, 0, 1 - v)\right]_{v=1} = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{2\gamma s x}{(x^2 - \gamma x^2)^{s+1}}$$
$$= \frac{2\gamma s}{(1-\gamma)^{s+1}} \zeta(2s+1),$$

l'équation (16) du n° 66 sera remplacée par

$$(5) \qquad a_k(s) = \frac{\gamma}{(k\pi)^2} \frac{s\zeta(2s+1)}{(1-\gamma)^{s+1}} - \frac{\gamma s}{(k\pi)^2}\left(1 + 2\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma}\right) a_k(s+1).$$

On déduit de cette formule le théorème suivant :

81. Théorème. *La fonction* a_k *peut se mettre sous la forme*

$$a_k = \frac{\theta(s, k)}{k^2},$$

où $\theta(s, k)$ *désigne une fonction entière de* s *dans tout le plan qui vérifie uniformément la condition* Θ *quand* k *varie de* 1 *à* ∞.

Démonstration. En effet, en négligeant un facteur numérique indépendant de k, la fonction $\theta(s, k)$ a pour expression, eu égard à la formule (5) du numéro précédent,

$$\frac{s\zeta(2s+1)}{(1-\gamma)^{s+1}} - s\left(1 + 2\gamma\frac{\partial}{\partial\gamma}\right) a_k(s+1).$$

Le premier terme est indépendant de k et il vérifie la condition Θ, parce que $s\zeta(2s+1)$ vérifie cette condition, en vertu de la formule (4) au n° 77, où l'on changera s en $s+1$. Le second terme vérifie *uniformément* la condition Θ par les théorèmes des nos 78 et 79.

82. Théorème. *La fonction* $\mathcal{G}(s, 0, v) + \mathcal{G}(s, 0, 1 - v)$ *peut se mettre sous la forme*

$$\frac{1}{s-1}\frac{1}{2\sqrt{\gamma}}\log\frac{1+\sqrt{\gamma}}{1-\sqrt{\gamma}} + \theta(s)$$

où $\theta(s)$ est une fonction entière de s dans tout le plan qui vérifie la condition Θ (*).

Démonstration. On tire de la formule (2) du n° 76

$$\mathcal{G}(s, 0, v) + \mathcal{G}(s, 0, 1 - v) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos 2k\pi v.$$

Il vient alors par les théorèmes des nos 77 et 81

$$\mathcal{G}(s, 0, v) + \mathcal{G}(s, 0, 1 - v) = \frac{1}{s-1}\frac{1}{2\sqrt{\gamma}}\log\frac{1+\sqrt{\gamma}}{1-\sqrt{\gamma}} + \theta(s) + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\theta(s, k)\cos 2k\pi v}{k^2},$$

et la démonstration s'achève comme au n° 74.

83. *Remarque.* On peut faire sur b_k une étude analogue à celle que nous avons faite de a_k. Cette étude nous étant inutile, nous ne la ferons pas et nous nous contenterons d'indiquer le résultat auquel elle conduirait. On trouverait que b_k est une fonction méromorphe de s qui possède tous les pôles de $\Gamma\left(s - \frac{1}{2}\right)$. Mais si l'on fait le quotient de b_k par $\Gamma\left(s - \frac{1}{2}\right)$, le quotient est une fonction entière dans tout le plan et vérifie la condition Θ (**).

(*) Une analyse analogue s'applique à $\mathcal{G}(s, 0, v) - \mathcal{G}(s, 0, 1 - v)$. Cette fonction possède tous les pôles de $\Gamma\left(s - \frac{1}{2}\right)$, mais son quotient par $\Gamma\left(s - \frac{1}{2}\right)$ est une fonction entière qui vérifie la condition Θ. On reconnaît ainsi que $(s - 1)\,\mathcal{G}(s, 0, v) : \Gamma\left(s - \frac{1}{2}\right)$ est aussi une fonction qui vérifie la condition Θ et que, par conséquent, $\mathcal{G}(s, 0, v)$ est le quotient de deux fonctions du premier genre.

(**) Cela résulte de l'application de la remarque ajoutée en note au n° 53.

CHAPITRE VI

ÉTUDE DE LA FONCTION Q (s, c)

§ 1. *Définition de* Q(s,c)

84. *Première définition de* Q (s, c). La définition de cette fonction se fait par l'intermédiaire d'une forme quadratique du déterminant positif D et de la classe c. Pour cela, on choisit dans la classe c, supposée proprement primitive, une forme

$$f = ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

où $a > 0$ (il y a une infinité de formes dans ce cas) et l'on pose, pour $\mathfrak{R}(s) > 1$,

$$(1). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad Q(s, c) = \sum_{x,\,y} \frac{1}{(ax^2 + 2bxy + cy^2)^s}.$$

La somme double ne s'étend pas ici, comme dans le cas des déterminants négatifs (voir 2e partie, n° 10), à toutes les valeurs positives et négatives de x et y qui rendent f impaire et première à D, elle s'étend seulement à celles de ces valeurs qui vérifient, en outre, les deux conditions

$$(2). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad y \gtreqless 0, \quad (ax + by) > \frac{T}{U}\,y,$$

où (T, U) sont les plus petites solutions positives de l'équation de Pell : $T^2 - DU^2 = 1$.

85. *Remarque I.* La forme $(ax^2 + 2\,bxy + cy^2)$ ne prendra que des valeurs positives et non nulles dans l'équation (1). C'est la conséquence de l'hypothèse $a > 0$ et des conditions (2). Pour le montrer, écrivons f comme il suit :

$$(3). \quad . \quad . \quad ax^2 + 2bxy + cy^2 = \frac{1}{a}[(ax + by)^2 - Dy^2];$$

la quantité entre crochets sera positive, car on aura par (2)

$$(ax^2 + by)^2 - Dy^2 > \left(\frac{T^2}{U^2} - D\right) y^2 = \frac{1}{U^2} y^2 \geqq 0.$$

86. *Remarque II.* Il n'y a pas d'ambiguïté sur la valeur qu'il faut attribuer à chacun des termes de la formule (1). Pour s réel, on attribuera à chaque terme sa valeur réelle; pour s imaginaire, les valeurs qui se déduisent des précédentes par voie de continuité.

87. *Remarque III.* Sauf la restriction $a > 0$, la définition de $Q(s, c)$ ne dépend nullement du choix de la forme f dans la classe c.

Nous allons mettre $Q(s, c)$ sous une forme différente dans laquelle cette propriété sera évidente. D'abord, en mettant en évidence les facteurs communs de x et y, $Q(s, c)$ se décompose en un produit de deux facteurs

$$Q(s, c) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2s}} \times \sum_{x', y'} \frac{1}{(ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2)^s}.$$

Dans le premier facteur, n prend toutes les valeurs entières de 1 à ∞ qui sont premières à $2D$; dans le second, x' et y' sont assujettis aux mêmes conditions que x et y, mais sont en outre premiers entre eux.

Or Dirichlet a montré que l'on a

$$\sum_{x', y'} \frac{1}{(ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2)^s} = \sum_{m} \frac{2^{\mu}}{m^s},$$

où μ est le nombre des facteurs premiers différents de m, et où m désigne successivement tous les nombres positifs, premiers à $2D$ et représentables par la forme f, et, par suite, par toutes les formes de la classe c (Voir Dirichlet-Dedekind, *Zahlentheorie*, 4e édition, § 88). Notre remarque est donc justifiée.

88. *Choix particulier de la forme* f. En vertu de la remarque qui précède, nous pouvons choisir la forme f de manière à simplifier les raisonnements. Ce choix sera analogue à celui que nous avons fait dans le cas des déterminants négatifs (3e partie, n° 8), sans cependant lui correspondre exactement.

Nous commencerons par nous donner le troisième coefficient c positif et premier à 2D, ce qui est toujours possible. Ensuite on peut faire en sorte que b soit > 0, divisible par D et, en outre, pair ou impair en même temps que D, de telle façon que

$$a = \frac{b^2 - D}{c}$$

soit positif (comme on l'a stipulé plus haut) et, en outre, pair et divisible par D. En effet, si b ne vérifiait pas ces conditions, par une substitution

$$x = x', \qquad y = \lambda x' + y',$$

où λ est une inconnue à déterminer, on remplacerait la forme (a, b, c) par une autre équivalente (a', b', c) et b' serait déterminé par la congruence

$$b' = b + \lambda c \equiv 0 \pmod{D},$$

à laquelle on ajouterait, en toute hypothèse, la condition $b' > 0$ et, dans l'hypothèse seulement de D impair, la condition $b' \equiv 1 \pmod 2$.

La forme f étant ainsi choisie, il suffit pour que $ax^2 + 2bxy + cy^2$ soit premier à 2D que y soit premier à 2D, tandis que x n'est plus astreint à aucune restriction.

§ 2. *Réduction de* Q (s, c) *à* $\mathcal{G}$ (s, u, v)

89. La forme $(ax^2 + 2bxy + cy^2)$ étant choisie comme nous venons de le dire, la fonction Q (s, c) sera définie par la formule (1), dans laquelle on donne à y toutes les valeurs premières

à 2D et à x toutes les valeurs entières quelconques qui vérifient les conditions (2), savoir

$$(2). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad y > 0, \quad (ax + by) > \frac{T}{U} y.$$

Dans ces conditions, la fonction Q (s, c) se ramène à une somme de fonctions $\mathcal{G}(s,u,v)$ en nombre limité dans lesquels γ a une valeur constante $DU^2 : T^2$. Cette décomposition correspond, comme nous allons le montrer, au partage en plusieurs groupes des valeurs de x et y à substituer dans f.

90. *Transformation de f par les substitutions* (S) et (S'). Si l'on fait la substitution

$$(S). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \begin{cases} x = \alpha + 2bDx', \\ y = \beta + 2aDy', \end{cases}$$

on réduit f à

$$f = 4ab^2D^2 \left[\left(\frac{a\alpha + b\beta}{2abD} + x' + y' \right)^2 - \frac{D}{b^2} \left(\frac{\beta}{2aD} + y' \right)^2 \right].$$

Désignons par E (x) le plus grand entier contenu dans x et posons, en abrégé,

$$(4). \quad . \quad . \quad u' = \frac{a\alpha + b\beta}{2abD} - E\frac{a\alpha + b\beta}{2abD}, \quad v' = \frac{\beta}{2aD};$$

la forme f s'écrira plus simplement

$$f = 4ab^2D^2 \left[\left(u' + x' + y' + E\frac{a\alpha + b\beta}{2abD} \right)^2 - \frac{D}{b^2} (v' + y')^2 \right].$$

Si l'on fait maintenant une seconde substitution

$$(S'). \quad . \quad . \quad . \quad \begin{cases} x' + y' + E\dfrac{a\alpha + b\beta}{2abD} = \alpha' + Tx'', \\ y' = \beta' + bUy'', \end{cases}$$

et si l'on pose en abrégé

$$(5). \quad . \quad . \quad . \quad u = \frac{u' + \alpha'}{T}, \quad v = \frac{v' + \beta'}{bU}, \quad \gamma = \frac{DU^2}{T^2},$$

on réduit simplement f à

$$(6). \quad . \quad . \quad . \quad f = 4ab^2D^2T^2[(u + x'')^2 - \gamma (v + y'')^2].$$

91. *Conditions auxquelles sont soumises les nouvelles variables.* Nous allons montrer qu'on peut engendrer toutes les valeurs de x et y à substituer dans f, en attribuant à $(\alpha, \beta, \alpha', \beta')$ et par suite à (u, v) certains systèmes de valeurs, en nombre limité, pour chacun desquels x'' et y'' prendront aussi des systèmes de valeurs qu'il s'agit de définir.

Toutes les valeurs entières de x et toutes les valeurs premières à $2D$ de y sont fournies par le système (S) en donnant :

à α les $2bD$ valeurs entières $\gtreqqless 0$ et $< 2bD$,

à β les $a\varphi(2D)$ valeurs > 0, $< 2aD$ et premières à $2D$;

ensuite, pour chaque système (α, β), à x' et y' toutes les valeurs entières possibles.

Mais, d'autre part, toutes les valeurs entières de x' et y' sont fournies par le système (S′), en donnant :

à α' les T valeurs $0, 1, 2, \ldots T - 1$,

à β' les bU valeurs $0, 1, 2, \ldots bU - 1$;

ensuite à x'', y'' toutes les valeurs entières possibles.

Pour obtenir toutes les valeurs de x et de y à substituer dans f, nous avons donc simplement à chercher, pour chaque système de $(\alpha, \beta, \alpha', \beta')$, les valeurs entières x'' et y'' qui vérifient les conditions (2) transformées par les substitutions (S) et (S′).

La substitution (S) dans les conditions (2) donne

$$y' \gtreqqless 0, \quad u' + x' + y' + E\frac{a\alpha + b\beta}{2abD} > \frac{T}{bU}(v' + y'),$$

puis la substitution (S′)

$$(7). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad y'' \gtreqqless 0, \qquad u + x'' > v + y''.$$

On voit ainsi que, pour chaque système de valeurs de

à 2D et à x ...
les conditions ...

(2). . . .

Dans ces ...
somme de ...
a une valeur ...
comme nous a...
des valeurs ...

90. *Tr...*
l'on fait la s...

(S). . . .

on réduit ...

f ...

Désign...
posons, en ...

(4). . . u

la forme f s'écrira ...

$$f = 4ab^2D^2\left[\left(u \right.\right.$$

Si l'on fait mainten...

(S'). . . . $\left\{ x' + y' \right.$

Montrons, en effet, que (u, v) ne peuvent reprendre les mêmes valeurs que si $(\alpha, \beta, \alpha', \beta')$ reprennent aussi les mêmes valeurs.

D'abord, les deux expressions (5) au n° 90

$$(5). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad u = \frac{u' + \alpha'}{\mathrm{T}}, \quad v = \frac{v' + \beta'}{b\mathrm{U}}$$

où (u', v') sont des fractions proprement dites et (α', β') des entiers, ne peuvent reprendre les mêmes valeurs que si (α', β') d'une part et (u', v') de l'autre reprennent les mêmes valeurs.

En second lieu, les expressions (4)

$$(4). \quad . \quad . \quad . \quad v' = \frac{\beta}{2a\mathrm{D}}, \quad u' = \frac{a\alpha + b\beta}{2ab\mathrm{D}} - \mathrm{E}\left(\frac{a\alpha + b\beta}{2ab\mathrm{D}}\right)$$

ne peuvent reprendre les mêmes valeurs que si β d'abord reprend la même valeur, et par conséquent aussi, puisque $\frac{a\alpha}{2ab\mathrm{D}}$ est une fraction proprement dite, que si α reprend la même valeur.

94. *Pour aucun système de valeurs de* $(\alpha, \beta, \alpha', \beta')$ *on ne peut avoir* $\mathrm{u} = \mathrm{v}$.

En effet, l'égalité des valeurs (5) au numéro précédent donnerait

$$b\mathrm{U}(u' + \alpha') = \mathrm{T}(v' + \beta').$$

En remplaçant v' par sa valeur (4) et multipliant par $2a$, il viendrait

$$2ab\mathrm{U}(u' + \alpha') = \mathrm{T}\left(\frac{\beta}{\mathrm{D}} + 2a\beta'\right).$$

Le premier membre est entier, car l'expression (4) de u' au numéro précédent prouve (a et b étant multiples de D, n° 88) que $2abu'$ est entier; d'autre part, le second membre est fractionnaire, T et β étant premiers à D. Donc, etc.

95. *On ne peut avoir non plus* $\mathrm{v} = \frac{1}{2}$.

En effet, dans ce cas, la relation (5) montre que $2(v'+\beta')$ donc $2v' - \frac{\beta}{aD}$ serait entier; ce qui ne peut être, β étant premier avec D. Donc, etc.

96. *Si* u *n'est pas nul, au système* (u, v) *correspond le système non identique* (1 — u, 1 — v).

En effet, si α est différent de zéro, changeons (α, β) en $(2bD-\alpha,\ 2aD-\beta)$ et, si α est nul, changeons seulement β en $2aD-\beta$; les quantités (u', v') données par les formules (4) au n° 93 seront changées en $(1-u',\ 1-v')$. Si donc on change encore (α', β') en $(T-\alpha'-1, bU-\beta'-1)$, les quantités (u, v) données par les formules (5) seront changées en $(1-u, 1-v)$. Or nous avons remplacé de la sorte $(\alpha, \beta, \alpha', \beta')$ par un autre système de valeurs qu'on doit attribuer à ces quantités; de plus, les deux systèmes (u, v) et $(1-u,\ 1-v)$ sont différents en vertu de la remarque précédente. Donc, etc.

97. *Si* u *est égal à zéro, au système* (0, v) *correspond le système non identique* $(0, 1-v)$.

Si $u=0$, la relation (5) donne $u'=0$ et $\alpha'=0$. Changeons (α, β) en $(2bD-\alpha,\ 2aD-\beta)$ dans les relations (4); u' restera nul et v' sera changé en $1-v'$. Donc, si l'on conserve $\alpha'=0$, mais change encore β' en $(bU-\beta'-1)$ dans les formules (5), u restera nul et v se changera en $1-v$. Or nous avons remplacé ainsi le système $(\alpha, \beta, 0, \beta')$ par le système $(2bD-\alpha, 2aD-\beta, 0, bU-\beta'-1)$, qui se présente également. Donc, etc.

98. *La valeur* u = 0 *se présentera si* D *est pair et ne se présentera pas si* D *est impair.*

Faisons observer d'abord que l'équation $b^2-ac=D$, où a et b sont divisibles par D, c premier à 2D et b de même parité que D, peut s'écrire

$$D\left(\frac{b}{D}\right)^2-\left(\frac{a}{D}\right)c=1,$$

et, sous cette forme, elle met en évidence que D et $\left(\frac{a}{D}\right)$ sont de parité différente et que $\left(\frac{a}{D}\right)$ et $\left(\frac{b}{D}\right)$ sont premiers entre eux.

Revenons-en maintenant à notre remarque. Si $u=0$, on doit avoir $u'=0$. Cherchons donc les valeurs de (α,β) pour lesquelles on aura $u'=0$. Il faut et il suffit pour cela (voir l'équation 4) que $\frac{a\alpha+b\beta}{2abD}$, qui est >0 et <2, soit entier, c'est-à-dire que l'on ait

$$a\alpha + b\beta = 2abD.$$

Mettons cette équation sous la forme

$$\left(\frac{a}{D}\right)\alpha + \left(\frac{b}{D}\right)\beta = 2D^2\left(\frac{a}{D}\right)\left(\frac{b}{D}\right).$$

Puisque $\left(\frac{a}{D}\right)$ et $\left(\frac{b}{D}\right)$ sont premiers entre eux, il faut poser, pour vérifier cette équation par des valeurs entières de α et de β,

$$\alpha = \left(\frac{b}{D}\right)x, \quad \beta = \left(\frac{a}{D}\right)y$$

et chercher les solutions entières de

$$x + y = 2D^2.$$

Si D est pair, $\left(\frac{a}{D}\right)$ est impair, puisque D et $\left(\frac{a}{D}\right)$ sont de parité différente, et toutes les solutions (x, y) positives et premières entre elles de cette équation donnent des valeurs de α et de β qui se présentent dans la question.

Si D est impair, $\left(\frac{a}{D}\right)$ est pair et, les valeurs de β étant paires, sont à rejeter comme ne se présentant pas dans la question.

§ 4. *Propriétés analytiques de* Q (s, c)

99. *Transformation de la formule* (9). Pour fixer les idées, supposons que D soit pair et considérons la formule (9), savoir

$$(9). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad Q(s,c) = \frac{1}{(4ab^2D^2T^2)^s}\sum_{u,v} \mathcal{G}(s,u,v).$$

On peut ranger, en vertu des remarques du paragraphe précé-

dent, les systèmes de valeurs de (u, v) par couples, ceux où u n'est pas nul étant

$$(u, v), \qquad (1-u, 1-v);$$

ceux où u est nul étant

$$(0, v), \qquad (0, 1-v).$$

En accouplant de même les valeurs de $\mathcal{G}$, la fonction $Q(s, c)$ se met sous la forme

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} Q(s, c) = & \frac{1}{(4ab^2D^2T^2)^s} \underset{u>v}{S} \left[\mathcal{G}(s, u, v) + \mathcal{G}(s, 1-u, 1-v)\right] \\ & + \frac{1}{(4ab^2D^2T^2)^s} \underset{v<\frac{1}{2}}{S} \left[\mathcal{G}(s, 0, v) + \mathcal{G}(s, 0, 1-v)\right], \end{aligned} \right.$$

la première somme s'étendant à tous les systèmes de valeurs de (u, v) où $u > v$; la seconde aux systèmes $(0, v)$, où $v < \frac{1}{2}$. Si D était impair, les valeurs $u = 0$ ne se présenteraient pas et il faudrait supprimer la seconde somme.

100. Théorème. *La fonction* $Q(s, c)$ *est une fonction méromorphe de* s *qui n'a qu'un pôle unique et simple* $s = 1$ *et qui peut se mettre sous la forme*

$$Q(s, c) = \frac{1}{s-1} \frac{\varphi(2D)}{4D\sqrt{D}} \log(T + U\sqrt{D}) + \theta(s),$$

où $\theta(s)$ *désigne une fonction entière dans tout le plan qui vérifie la condition* Θ.

Démonstration. Chacun des crochets de la formule (10) peut, par les théorèmes des nos 74 ou 82, se mettre sous la forme

$$\frac{1}{s-1} \frac{1}{2\sqrt{\gamma}} \log \frac{1+\sqrt{\gamma}}{1-\sqrt{\gamma}} + \theta(s).$$

Remplaçons $\sqrt{\gamma}$ par sa valeur $U\sqrt{D} : T$ et observons que

$$\frac{1+\sqrt{\gamma}}{1-\sqrt{\gamma}}=\frac{T+U\sqrt{D}}{T-U\sqrt{D}}=\left(T+U\sqrt{D}\right)^2;$$

cette expression prendra la forme

$$\frac{1}{s-1}\frac{T}{U\sqrt{D}}\log\left(T+U\sqrt{D}\right)+\theta(s).$$

Le nombre total des crochets dans la formule (10) est égal à la moitié du nombre total des valeurs de (u, v), c'est-à-dire à $ab^2TUD\varphi(2D)$ en vertu de la conclusion n° 92. Donc la somme de tous les crochets est une expression de la forme

$$\frac{ab^2T^2\sqrt{D}\varphi(2D)}{s-1}\log\left(T+U\sqrt{D}\right)+\theta(s).$$

D'autre part, en le développant suivant les puissances de $(s-1)$, le facteur commun $(4ab^2D^2T^2)^{-s}$, qui est en évidence dans la formule (10), devient de la forme

$$\frac{1}{4ab^2D^2T^2}+(s-1)\,\theta(s).$$

Le second membre de la formule (10) doit être égal au produit de ces deux dernières expressions, ce qui démontre le théorème.

CHAPITRE VII

Généralisation des théorèmes de la troisième partie. Lois asymptotiques

101. Nous pouvons nous borner, dans ce chapitre, à rappeler les résultats de la troisième partie.

On a vu (troisième partie, chap. II, §§ 1 et 2) que l'étude des nombres premiers représentables par une forme quadratique de

déterminant négatif $(-\Delta)$ repose sur l'équation fondamentale

$$(1)\ldots \quad L(s,k) = P(s) \prod_q \frac{1}{[1-q^{-s}k(c_q)][1-q^{-s}k(c_q^{-1})]},$$

où $L(s,k)$ est une fonction de s liée au caractère k et qui se définit au moyen de la fonction $Q(s,c)$ par la formule

$$(2)\ldots\ldots \quad L(s,k) = \sum_{i=1}^{i=h} k(c_i)\, Q(s,c_i),$$

cette somme s'étendant à toutes les classes $c_1, c_2, \ldots c_h$ proprement primitives.

Ces équations subsistent dans le cas d'un déterminant positif D et se démontrent par un raisonnement identique, mais $Q(s,c)$ désigne alors la fonction étudiée au chapitre précédent, qui n'est pas exactement définie comme dans la troisième partie.

Au second membre de (1), $P(s)$ désigne le produit

$$P(s) = \prod_p \frac{1}{1-p^{-2s}},$$

étendu à tous les nombres premiers p dont D est non-résidu, tandis que le produit Π_q s'étend à tous les nombres premiers q dont D est résidu quadratique. Enfin c_q et c_q^{-1} sont les deux classes opposées dans lesquelles q peut se représenter.

102. Toutes les conclusions ultérieures de la troisième partie reposent sur des transformations des équations (1) et (2) et sur les propriétés suivantes des fonctions $L(s,k)$:

1° *La fonction* $(s-1)\, L(s,k_0)$, *dans le cas du caractère principal, et* $L(s,k)$, *dans le cas d'un autre caractère, sont des fonctions entières du premier genre* (troisième partie, n° 20).

2° *Si l'on représente, en général, par* $\rho(k)$ *les zéros de* $L(s,k)$, *la série*

$$\sum_\rho \frac{1}{[\rho(k)]^r}$$

sera absolument convergente pour m > 2 (troisième partie, n° 21).

Ces théorèmes subsistent dans le cas d'un déterminant positif, car ils résultent du théorème suivant que nous allons démontrer et qu'il serait très facile d'étendre aux déterminants négatifs :

3° *La fonction* (s — 1) $L(s, k_0)$, *et les fonctions* $L(s, k)$ *pour* k *différent de* k_0, *sont des fonctions entières qui vérifient la condition* Θ.

Ce théorème est une conséquence immédiate du théorème du n° 100 et de la formule (2) ci-dessus, pourvu qu'on se rappelle que la somme $k(c_1) + k(c_2) + \cdots + k(c_h)$ est nulle, sauf dans le cas du caractère principal.

On sera donc conduit, comme dans la troisième partie, aux lois asymptotiques suivantes :

103. 1° *Si l'on désigne par* h *le nombre des classes de formes proprement primitives du déterminant* D, *les expressions*

$$\frac{2h}{y}\sum lq_c, \quad \text{si c est une classe bilatérale,}$$

$$\frac{h}{y}\sum lq_c, \quad \text{dans le cas contraire,}$$

expressions où les sommes s'étendent aux nombres premiers < y *et représentables par la classe* c *ont pour limite l'unité quand* y *tend vers l'infini.*

2° *Les différences correspondantes :*

$$2h\sum\frac{lq_c}{q_c} - ly \quad \text{ou} \quad h\sum\frac{lq_c}{q_c} - ly,$$

tendent vers des limites finies et déterminées quand y *tend vers l'infini.*

3° *Le nombre des nombres premiers* < y *et représentables par la classe* c *a pour expression asymptotique*

$$\frac{1+\varepsilon}{2h}\frac{y}{ly} \quad \text{ou} \quad \frac{1+\varepsilon}{h}\frac{y}{ly},$$

suivant que c *est bilatérale ou non,* ε *étant infiniment petit pour* y *infiniment grand.*

4° *La série, étendue aux nombres premiers* q *dont* D *est résidu quadratique rangés par ordre de grandeur,*

$$\sum_q [k(c_q) + k(c_q^{-1})] \frac{lq}{q^u},$$

est convergente pour $\mathfrak{R}$ (u) = 1, *pourvu que le caractère* k *soit différent du principal.*

RECHERCHES ANALYTIQUES

SUR

LA THÉORIE DES NOMBRES PREMIERS

CINQUIÈME PARTIE

NOMBRES PREMIERS REPRÉSENTABLES SIMULTANÉMENT PAR UNE FORME LINÉAIRE ET UNE FORME QUADRATIQUE

Préliminaire

Pour démontrer que toute progression $Mx+N$ renferme une infinité de nombres premiers qui sont en même temps d'une forme quadratique donnée, on est amené à considérer des fonctions $L(s, k, \chi)$ analogues aux fonctions $L(s, k)$ des parties précédentes du Mémoire, mais où l'on combine ensemble les caractères de classes avec les caractères (mod. M).

Une simple généralisation des méthodes antérieures montre que toutes les fonctions $(s-1)\ L(s, k, \chi)$ sont entières et du premier genre. Si cette généralisation suffisait, nous pourrions nous dispenser d'écrire cette partie complémentaire de notre travail. Mais il faut savoir déterminer quelles sont les fonctions $L(s, k, \chi)$ qui possèdent en réalité un pôle pour $s=1$. Cette détermination exige des considérations plus nouvelles.

La question peut être tranchée directement par l'examen immédiat des fonctions. C'est la méthode suivie par M. Meyer, qui est longue et pénible. Il vaut mieux profiter des avantages

que donne l'emploi des dérivées logarithmiques et rattacher la solution du problème aux résultats établis dans les parties précédentes du Mémoire. C'est ainsi que nous allons procéder. Sous cette forme, la démonstration devient élégante et simple; elle achève de satisfaire aux *desiderata* de M. P. Bachmann, signalés dans les préliminaires de notre troisième partie.

CHAPITRE I

Analyse des fonctions qui interviennent dans la démonstration

§ 1. *Étude de la fonction* $\mathcal{M}(\alpha, \beta, s)$

1. *Choix particulier d'une forme quadratique.* La fonction qui va nous occuper se rattache à la considération d'une forme quadratique, proprement primitive, du déterminant D :

$$f = ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

que nous représenterons souvent, en abrégé, par

$$(x, y).$$

Si D est un déterminant négatif $(-\Delta)$, cette forme sera supposée être positive et avoir ses trois coefficients positifs. Aucune autre restriction n'est supposée dans le paragraphe actuel.

Si D est positif, il faut des conditions plus particulières. Comme il n'y a pas d'intérêt à réduire ces conditions, nous ferons dès maintenant les hypothèses qui se rencontreront plus tard. Nous supposerons que a, b et c sont positifs, que a et b sont divisibles par D, que a est pair et que c est premier à 2D. Toute forme proprement primitive est, comme on l'a montré dans la quatrième partie (n° 88), équivalente à une autre forme qui vérifie ces conditions.

2. *Définition de* $\mathfrak{M}(\alpha, \beta, s)$. Cette définition se rattache à la considération de la forme f que nous venons de particulariser et à celle d'un nombre entier M que nous supposerons ici pair et divisible par D (au chapitre suivant, il sera de plus divisible par 4).

La fonction est définie par la somme double

$$(1)\quad \ldots\ldots\quad \mathfrak{M}(\alpha, \beta, s) = \sum_{m,n} \frac{1}{(x, y)^s},$$

où l'on a

$$\begin{cases} x = \alpha + Mm, \\ y = \beta + Mn. \end{cases}$$

Quant aux variables m et n par rapport auxquelles se fait la sommation, elles reçoivent toutes les valeurs entières de $-\infty$ à $+\infty$, si D est négatif; si, au contraire, D est positif, elles reçoivent seulement celles de ces valeurs qui vérifient en outre les deux conditions :

$$(2)\quad \ldots\ldots\quad y \gtreqless 0, \quad ax + by > \frac{T}{U} y,$$

où (T, U) sont les plus petites solutions positives de l'équation de Pell : $T^2 - DU^2 = 1$.

3. Théorème. *Si* D *est un déterminant négatif* $(-\Delta)$, *la fonction* $\mathfrak{M}(\alpha, \beta, s)$ *est une fonction méromorphe de* s *qui n'a que le seul pôle* $s = 1$ *et qui peut se mettre sous la forme*

$$(3)\quad \ldots\ldots\quad \mathfrak{M}(\alpha, \beta, s) = \frac{\pi}{M^2\sqrt{\Delta}} \frac{1}{s - 1} + \theta(s),$$

où $\theta(s)$ *désigne une fonction qui vérifie la condition* Θ (quatrième partie, n° 1).

La démonstration est toute pareille à celle qui a été faite dans la troisième partie. On posera

$$F(\alpha, \beta, t) = \sum_{m,n} e^{-(x,y)t},$$

la somme double ayant le même sens que dans l'équation (1). Puis, par ab substitutions :

$$\begin{cases} m = i + bm', \\ n = k + an', \end{cases} \qquad \begin{cases} i = 0, 1, 2, \ldots (b-1), \\ k = 0, 1, 2, \ldots (a-1), \end{cases}$$

on décomposera, comme au n° 5 de la troisième partie, F en ab sommes partielles :

$$F_{i,k}(t) = \psi_1\left(\alpha'', \frac{ab^2 M^2 t}{\pi}\right) \psi_1\left(\beta'', \frac{a\Delta M^2 t}{\pi}\right),$$

qui ne diffèrent entre elles que par les valeurs de α'', β'' et vérifient toutes (3e partie, n° 3) une relation de la forme

$$F_{i,k}(t) = \frac{\pi}{abM^2\sqrt{\Delta}}\frac{1}{t} + \frac{\theta(t)}{t}e^{-\frac{K}{t}},$$

où $\theta(t)$ reste fini quand t tend vers zéro et où K est positif et indépendant de t.

On a donc aussi, par l'addition de ab relations de cette forme, la relation fonctionnelle

$$F(\alpha, \beta, t) = \frac{\pi}{M^2\sqrt{\Delta}}\frac{1}{t} + \frac{\theta(t)}{t}e^{-\frac{K}{t}}.$$

On a maintenant, pour $\mathfrak{R}(s) > 1$,

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}(\alpha, \beta, s)\,\Gamma(s) &= \int_0^\infty F(\alpha, \beta, t)\, t^{s-1}dt \\ &= \int_1^\infty + \int_0^1 F(\alpha, \beta, t)\, t^{s-1}dt. \end{aligned}$$

Changeons t en $1 : t$ dans la seconde intégrale, appliquons la relation fonctionnelle qui précède et effectuons une intégration immédiate ; nous trouverons

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}(\alpha, \beta, s)\,\Gamma(s) = \frac{\pi}{M^2\sqrt{\Delta}}\frac{1}{s-1} &+ \int_1^\infty F(\alpha, \beta, t)\, t^{s-1}dt \\ &+ \int_1^\infty \theta\left(\frac{1}{t}\right) e^{-Kt}t^{-s}dt. \end{aligned}$$

Donc il vient, par l'application du théorème du n° (9) de la quatrième partie,

$$\Gamma(s)\,\mathfrak{M}(\alpha, \beta, s) = \frac{\pi}{M^2\sqrt{\Delta}}\,\frac{1}{s-1} + \theta(s),$$

et, si l'on divise par $\Gamma(s)$, le second membre ne change pas de forme, ce qui prouve le théorème.

4. Théorème. *Si le déterminant* D *est positif, si* α *et* β *sont compris entre* 0 *et* M (*limites exclues*) *et si* β *est premier à* D, *la fonction*

$$\mathfrak{M}(\alpha, \beta, s) + \mathfrak{M}(M-\alpha, M-\beta, s)$$

est une fonction méromorphe de s *dans tout le plan, qui peut se mettre sous la forme*

$$(4)\quad \frac{1}{M^2\sqrt{D}}\log\left(T + U\sqrt{D}\right)\frac{1}{s-1} + \theta(s),$$

où $\theta(s)$ *est une fonction entière qui vérifie la condition* Θ.

On procède exactement comme aux n°s 90, 91 et 92 de la quatrième partie.

Par une première substitution de variables :

$$(5)\quad \begin{cases} m = \alpha' + bm', \\ n = \beta' + an', \end{cases}$$

on met d'abord f sous la forme

$$f = ab^2M^2\left[(u' + m'')^2 - \frac{D}{b^2}(v' + n')^2\right],$$

où l'on a posé, en abrégé,

$$(6)\quad \begin{cases} u' = \dfrac{a(\alpha+M\alpha') + b(\beta+M\beta')}{abM} - E\left(\dfrac{a(\alpha+M\alpha')+b(\beta+M\beta')}{abM}\right), \\ v' = \dfrac{\beta+M\beta'}{aM}, \\ m'' = m' + n' + E\left(\dfrac{a(\alpha+M\alpha')+b(\beta+M\beta')}{abM}\right). \end{cases}$$

Cela fait, on peut engendrer toutes les valeurs entières positives et négatives de m, n, en attribuant à α', β' les systèmes de valeurs (en nombre ab)

$$\alpha' = 0, 1, 2, \dots (b-1),$$
$$\beta' = 0, 1, 2, \dots (a-1),$$

et en donnant, pour chacun d'eux, à m'' et n' toutes les valeurs entières positives et négatives.

Faisons une deuxième substitution :

$$(7)\ldots\ldots\ldots \begin{cases} m'' = \alpha'' + \mathrm{T}x', \\ n' = \beta'' + b\mathrm{U}y'; \end{cases}$$

la forme f deviendra

$$f = ab^2\mathrm{M}^2\mathrm{T}^2\left[(u + x')^2 - \gamma(v + y')^2\right],$$

où l'on a posé, en abrégé,

$$(8)\ldots\quad u = \frac{u' + \alpha''}{\mathrm{T}}, \quad v = \frac{v' + \beta''}{b\mathrm{U}}, \quad \gamma = \frac{\mathrm{DU}^2}{\mathrm{T}^2}.$$

On peut maintenant engendrer toutes les valeurs entières de m'' et n' en attribuant à α'', β'' les systèmes de valeurs (en nombre $b\mathrm{UT}$)

$$\begin{cases} \alpha'' = 0, 1, 2, \dots (\mathrm{T} - 1), \\ \beta'' = 0, 1, 2, \dots (b\mathrm{U} - 1), \end{cases}$$

et en attribuant encore, pour chacun d'eux, à x' et y' toutes les valeurs entières.

On attribuera donc à x et y toutes les valeurs que prennent ces variables dans la somme $\mathfrak{M}(\alpha, \beta, s)$, en donnant à α', β', α'', β'' leurs différents systèmes de valeurs et, pour chacun d'eux, à x' et y' tous les systèmes de valeurs qui vérifient les conditions (2), transformées par les substitutions (5) et (7), savoir celles qui définissent $\mathcal{G}$ (4e partie, no 56) :

$$y' \geqq 0, \qquad u + x' > v + y'.$$

On a, comme dans la quatrième partie, $u' \gtreqless 0$ et < 1, $v' > 0$ et < 1, donc les mêmes inégalités pour u et v.

Il vient ainsi

$$\mathfrak{M}(\alpha, \beta, s) = \frac{1}{(ab^2T^2M^2)^s} \mathop{\mathrm{S}}_{u, v} \mathcal{G}(s, u, v).$$

Changeons α en $M - \alpha$ et β en $M - \beta$; nous aurons une nouvelle décomposition correspondant à la précédente. A tout système (u, v) de la première décomposition où u n'est pas nul, correspond le système $(1 - u, 1 - v)$ dans la seconde. Celui-ci s'obtient en changeant, dans u et v,

$$\begin{array}{lll} \alpha \text{ en } M - \alpha & \text{et} & \beta \text{ en } M - \beta, \\ \alpha' \text{ en } b - 1 - \alpha' & \text{et} & \beta' \text{ en } a - 1 - \beta', \end{array}$$

ce qui change déjà u' en $1 - u'$ et v' en $1 - v'$; puis

$$\alpha'' \text{ en } T - 1 - \alpha'' \qquad \text{et} \qquad \beta'' \text{ en } bU - 1 - \beta'',$$

ce qui change u en $1 - u$ et v en $1 - v$.

De même, à tout système $(0, v)$ de la première décomposition, correspond le système $(0, 1 - v)$ dans la seconde. Celui-ci s'obtient en conservant $\alpha'' = 0$ (u' ne peut être nul que si $\alpha'' = 0$) et en faisant, à part cela, les mêmes substitutions que précédemment.

Par conséquent, la somme

$$\mathfrak{M}(\alpha, \beta, s) + \mathfrak{M}(M - \alpha, M - \beta, s)$$

se met sous la forme

$$\frac{1}{(ab^2T^2M^2)^s} \mathop{\mathrm{S}}_{u, v} \Big[\mathcal{G}(s, u, v) + \mathcal{G}(s, 1 - u, 1 - v)\Big]$$
$$+ \frac{1}{(ab^2T^2M^2)^s} \mathop{\mathrm{S}}_{0, v} \Big[\mathcal{G}(s, 0, v) + \mathcal{G}(s, 0, 1 - v)\Big].$$

Le nombre des systèmes (u, v), c'est-à-dire des systèmes $(\alpha', \beta', \alpha'', \beta'')$ est ab^2UT; chacun des crochets correspondants

est de la forme (4e partie, nos 74 et 82)

$$\frac{1}{s-1}\frac{1}{2\sqrt{\gamma}}\log\frac{1+\sqrt{\gamma}}{1-\sqrt{\gamma}}+\theta(s)$$

$$=\frac{1}{s-1}\frac{T}{U\sqrt{D}}\log\left(T+U\sqrt{D}\right)+\theta(s);$$

la somme des crochets devient donc, par cette substitution,

$$\frac{1}{(ab^2T^2M^2)^s}\left[\frac{ab^2T^2}{\sqrt{D}}\log\left(T+U\sqrt{D}\right)\frac{1}{s-1}+\theta(s)\right],$$

ce qui équivaut à la forme proposée dans l'énoncé du théorème.

Il y a à remarquer toutefois que les formules que nous venons d'employer n'ont été établies, dans la quatrième partie, que pour u différent de v. Mais cette condition est réalisée ici, grâce aux hypothèses faites sur les coefficients a, b, c et sur β. On déduirait en effet de $u=v$, par les formules (8) :

$$bU(u'+\alpha'')=T(v'+\beta''),$$

d'où, en remplaçant u' et v' par leurs valeurs (6) et chassant les dénominateurs,

$$U(a\alpha+b\beta)\equiv T\beta \pmod{M};$$

puis, a et b ainsi que M étant multiples de D,

$$T\beta\equiv 0 \pmod{D},$$

ce qui est impossible, car β est premier à D, par hypothèse, et T l'est aussi, en vertu de la relation $T^2-DU^2=1$.

5. Théorème. *Si le déterminant* D *est positif et si* β *est compris entre* 0 *et* M *et premier à* D, *la fonction*

$$\mathfrak{M}(0,\beta,s)+\mathfrak{M}(0,M-\beta,s),$$

peut se mettre sous la forme

$$\frac{1}{M^2\sqrt{D}}\log\left(T + U\sqrt{D}\right)\frac{1}{s-1} + \theta(s),$$

où $\theta(s)$ *est une fonction entière dans tout le plan qui vérifie la condition* Θ.

On trouve en effet, par les deux substitutions successives de la démonstration précédente et comme dans ce cas,

$$\mathfrak{M}(0, \beta, s) = \frac{1}{(ab^2T^2M^2)^s} \underset{u,v}{S} \mathcal{G}(s, u, v).$$

Comparons à cette première décomposition la décomposition analogue effectuée sur $\mathfrak{M}(0, M - \beta, s)$. A tout système (u, v) de la première où u n'est pas nul correspond le système $(1 - u, 1 - v)$ dans la seconde par le changement de

$$\beta, \alpha', \beta', \alpha'', \beta'',$$

en

$$M - \beta, \quad b - 1 - \alpha', \quad a - 1 - \beta', \quad T - 1 - \alpha'', \quad bU - 1 - \beta'';$$

de même, à tout système $(0, v)$ correspond le système $(0, 1 - v)$ qui s'en déduit par les mêmes changements, sauf qu'on garde $\alpha'' = 0$ dans les deux cas. La démonstration s'achèvera donc comme la précédente.

§ 2. *Étude de la fonction* Q (s, c, χ)

6. *Première définition de* $Q(s, c, \chi)$. Soit c une classe proprement primitive de formes (positives) du déterminant D, positif ou négatif. Choisissons, dans cette classe, une forme

$$f = (x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

soumise aux conditions du n° 1, et désignons, comme dans la deuxième partie du Mémoire, par $\chi(n)$ les caractères de n (mod M), le nombre M étant toujours supposé pair et divisible par D.

La fonction $Q(s, c, \chi)$, analogue aux fonctions $Q(s, c)$ des

parties précédentes, sera définie par la somme double

$$(10). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad Q(s, c, \chi) = \sum_{x, y} \frac{\chi(x, y)}{(x, y)^s},$$

où l'on donne à x, y tous les systèmes de valeurs entières pour lesquelles la forme $f = (x, y)$ est première à M. De plus, si D est positif, ces valeurs doivent vérifier les conditions connues :

$$y \gtreqless 0, \quad ax + by > \frac{T}{U} y.$$

Il résulte de là que $Q(s, c, \chi)$ ne dépend pas du choix de la forme f dans la classe c.

7. *Réduction de la fonction* Q *à la fonction* $\mathfrak{M}$. Désignons, en général, par α, β les systèmes de nombres positifs $<$ M, pour lesquels

$$f = (\alpha, \beta)$$

est premier à M. Tous les systèmes

$$\begin{cases} x = \alpha + Mm, \\ y = \beta + Mn, \end{cases}$$

donneront $(x, y) \equiv (\alpha, \beta) \pmod{M}$. Ils rendront donc f premier à M et l'on aura, en outre,

$$\chi(x, y) = \chi(\alpha, \beta);$$

d'où la décomposition

$$(11). \quad . \quad . \quad . \quad Q(s, c, \chi) = \sum_{\alpha, \beta} \chi(\alpha, \beta) \mathfrak{M}(\alpha, \beta, s).$$

On a d'ailleurs

$$(\alpha, \beta) \equiv (M - \alpha, M - \beta) \pmod{M}$$
$$(0, \beta) \equiv (0, M - \beta) \pmod{M}.$$

Dans le cas d'un déterminant positif, on pourra donc décomposer Q en sommes de la manière suivante :

$$\sum \chi(\alpha, \beta) [\mathfrak{M}(\alpha, \beta, s) + \mathfrak{M}(M - \alpha, M - \beta, s)]$$
$$+ \sum \chi(0, \beta) [\mathfrak{M}(0, \beta, s) + \mathfrak{M}(0, M - \beta, s)].$$

Il résulte de là, par les théorèmes des n°s 3, 4 et 5 :

1° Que si D est un déterminant négatif $(-\Delta)$, on a

$$(12). \quad . \quad . \quad Q(s, c, \chi) = \frac{1}{s-1} \frac{\pi}{M^2\sqrt{\Delta}} \sum_{\alpha,\beta} \chi(\alpha, \beta) + \theta(s);$$

2° Que si D est positif,

$$(13) \quad Q(s, c, \chi) = \frac{1}{s-1} \frac{1}{2M^2\sqrt{D}} \log\left(T + U\sqrt{D}\right) \sum_{\alpha,\beta} \chi(\alpha, \beta) + \theta(s),$$

où la somme Σ s'étend à toutes les combinaisons α, β et où $\theta(s)$ est une fonction entière dans tout le plan qui vérifie la condition Θ.

On conclut de là le théorème suivant :

8. Théorème. *La fonction*

$$(s-1)\,Q(s, c, \chi)$$

est, dans tous les cas, une fonction entière dans tout le plan s, *qui vérifie la condition* Θ.

9. *Remarque.* Les caractères (mod M) renferment en particulier les caractères (mod D), puisque D divise M. Si χ est un caractère *bilatéral* (mod D) (*), $\chi(m)$ a la même valeur ± 1 pour tous les nombres premiers à 2D et représentables par la même forme (**). Si l'on désigne par λ le nombre des systèmes (α, β),

(*) Nous appelons caractère *bilatéral* (*ambigu* de Dirichlet, *zweiseitig* de M. Dedekind) un caractère qui coïncide avec son opposé. Un tel caractère est exclusivement formé de racines réelles, sa valeur est toujours égale à ± 1 et son carré χ^2 est identique au caractère principal.

(**) Si m et m' sont représentables par la même forme, m' admet une représentation par une forme ayant m pour premier coefficient, par exemple

$$mx^2 + 2bxy + cy^2 = m';$$

d'où, en multipliant par m,

$$(mx + by)^2 - Dy^2 = mm'.$$

Donc le produit mm' est congru à un carré (mod D).

Par conséquent, si χ est bilatéral, $\chi(mm') = 1$ et $\chi(m) = \chi(m')$.

on aura donc, dans ce cas particulier,

$$Q(s, c, \chi) = \pm \frac{1}{s-1} \frac{\pi\lambda}{M^2\sqrt{\Delta}} + \theta(s),$$

ou bien

$$Q(s, c, \chi) = \pm \frac{1}{s-1} \frac{\lambda}{2M^2\sqrt{D}} \log\left(T + U\sqrt{D}\right) + \theta(s),$$

de sorte que la fonction a toujours un pôle pour $s = 1$, si χ est un caractère bilatéral (mod D).

Il sera démontré plus loin (n° **24**) qu'elle n'a de pôle que dans ce cas, de sorte que $\Sigma\chi(\alpha, \beta)$ est toujours nulle, sauf si χ est un caractère bilatéral (mod D). Un des principaux avantages de la méthode que nous exposons est de nous dispenser d'établir ce résultat directement.

§ 3. *Étude de la fonction* L(s, k, χ)

10. Nous avons raisonné, dans les deux parties précédentes du Mémoire, sur l'identité

$$\sum_{i=1}^{h} k(c_i)\, Q(s, c_i) = \tau \prod_p \frac{1}{1-p^{-2s}} \prod_q \frac{1}{[1-q^{-s}k(c_q)][1-q^{-s}k(c_q^{-1})]},$$

où τ est égal au nombre des solutions de l'équation de Pell dans le cas d'un déterminant négatif, et à *un* dans le cas d'un déterminant positif.

Si l'on remplace au second membre les nombres p^{-2s} et q^{-s} par $\chi(p^2)p^{-2s}$ et $\chi(q)q^{-s}$ et se restreint aux nombres premiers à M, il faudra remplacer au premier membre, dans chacune des fonctions $Q(s, c_i) = \Sigma m^{-s}$, les termes m^{-s} (qui proviennent tous d'un produit de facteurs p^{-2s} et q^{-s}) par $\chi(m)m^{-s}$.

On obtiendra ainsi l'identité

$$\sum_{i=1}^{h} k(c_i)\, Q(s, c_i, \chi)$$

$$= \tau \prod_p \frac{1}{1-\chi(p^2)p^{-2s}} \prod_q \frac{1}{[1-q^{-s}\chi(q)k(c_q)][1-q^{-s}\chi(q)k(c_q^{-1})]}.$$

Posons, en abrégé, par analogie avec la fonction $P(s)$,

$$(14). \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad P(s, \chi) = \tau \prod_p \frac{1}{1 - \chi(p^2) p^{-2s}};$$

et définissons, pour toute valeur de s, la fonction $L(s, k, \chi)$ par la formule

$$(15). \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad L(s, k, \chi) = \sum_{i=1}^{h} k(c_i)\, Q(s, c_i, \chi);$$

on aura, pour $\Re(s) > 1$,

$$(16) \quad L(s, k, \chi) = P(s, \chi) \prod_q \frac{1}{[1 - q^{-s}\chi(q) k(c_q)][1 - q^{-s}\chi(q) k(c_q^{-1})]}.$$

11. *Propriétés des fonctions* $L(s, k, \chi)$. Ces fonctions correspondent exactement aux fonctions $L(s, k)$ des parties précédentes.

Leur définition par la formule (15) montre qu'elles ne peuvent avoir que le seul pôle $s = 1$ et que, si ce point n'est pas un pôle, les fonctions vérifient la condition Θ.

Les seules propriétés que nous utiliserons au chapitre qui suit sont les suivantes :

1° *Dans tous les cas, la fonction*

$$(s - 1)\, L(s, k, \chi)$$

est une fonction entière dans tout le plan qui vérifie la condition Θ;

2° *La fonction* $L(s, k, \chi)$ *ne change pas par la permutation de* k *en* k^{-1};

3° *La fonction* $L(s, k_0, \chi_0)$, *qui correspond aux deux caractères principaux, a un pôle simple pour* $s = 1$.

La première et la troisième propriétés résultent de la formule (15) et des propriétés de la fonction Q; la seconde résulte de la formule (16) et des relations

$$k^{-1}(c_q) = k(c_q^{-1}), \qquad k^{-1}(c_q^{-1}) = k(c_q).$$

CHAPITRE II.

Infinité des nombres premiers qui sont a la fois d'une forme linéaire et d'une forme quadratique

§ 1. *Restrictions que comporte la question*

12. *Restrictions dans le choix de la progression.* Dans les parties précédentes du Mémoire, nous avons éliminé systématiquement tout ce qui a rapport à la loi de réciprocité de Legendre, parce que cette loi n'intervenait qu'artificiellement dans la question. Au point où nous en sommes arrivés, il n'en est plus de même, mais cette loi ne doit servir d'appui qu'à quelques remarques extrêmement simples.

Nous avons à déterminer si la progression arithmétique $Mx+N$ peut renfermer des nombres premiers représentables par une forme quadratique du déterminant D. Pour traiter la question sous sa forme la plus générale, nous supposerons que M est un multiple de D et de 4.

Il y a $\varphi(M)$ progressions différentes de raison M renfermant des nombres premiers, mais la moitié sont à éliminer, de prime abord, comme ne contenant aucun nombre représentable par des formes du déterminant D. En effet, pour qu'un nombre m, premier à 2D, soit représentable par une forme du déterminant D, il faut que D soit résidu quadratrique de m. Il est nécessaire pour cela que le symbole de Jacobi $\left(\frac{D}{m}\right)$ soit égale à $(+1)$. Cette condition devient même suffisante quand m est un nombre premier. Or, pour tout nombre m, appartenant à une progression déterminée,

$$m = Mx + N \equiv N \ (\text{mod } D \quad \text{et} \quad \text{mod } 4),$$

on a, par la loi de réciprocité et les propriétés bien connues du symbole de Jacobi,

$$\left(\frac{D}{Mx+N}\right) = \left(\frac{D}{N}\right).$$

Donc les seules progressions $Mx + N$ qui puissent contenir des nombres représentables par des formes du déterminant D, sont celles pour lesquelles

$$\left(\frac{D}{N}\right) = 1.$$

Dans la suite, nous nous bornerons aux seules valeurs de N qui vérifient cette condition, tandis que nous désignerons par N′ celles pour lesquelles

$$\left(\frac{D}{N'}\right) = -1.$$

13. *Restrictions dans le choix des classes.* Après la restriction précédente, tous les nombres premiers de la forme $Mx + N$ sont aussi représentables par des formes du déterminant D, mais ces représentations ne se font pas par des classes quelconques.

On sait que, quand deux nombres m et m', premiers à 2D, sont représentables par la même forme, leur produit mm' est résidu quadratique de D (*), c'est-à-dire que l'on peut vérifier la congruence

$$mm' \equiv x^2 \pmod{D}.$$

On est convenu, avec Gauss, de dire que deux classes c et c' sont *du même genre* quand les nombres m et m' qu'elles représentent respectivement vérifient cette condition.

Il résulte de cette définition que les nombres de la progression $Mx + N$ ne peuvent être représentés que par des formes du même genre, car, M étant multiple de D, on a, quels que soient x et x',

$$(Mx + N)(Mx' + N) \equiv N^2 \pmod{D}.$$

Pour abréger le discours, nous dirons que ces formes sont du genre (N).

La démonstration que nous devons faire se réduit ainsi à établir que toute classe du genre (N) peut représenter une infinité de nombres premiers de la forme $Mx + N$.

(*) Voir la note au n° 9

14. ***Remarques.*** **I.** Pour tous les nombres m premiers à 2D, représentables par les classes du même genre, les caractères bilatéraux χ (m, mod D) ont la même valeur (voir n° 9).

II. Les classes qui peuvent représenter des nombres congrus à un carré (mod D) sont dites du *genre principal*. On démontre, dans la théorie des genres, que celles-là sont toujours formées par *duplication*.

III. Le *nombre des genres* dépend uniquement des facteurs premiers impairs de D et de la puissance de 2 qui divise D; ce nombre est égal à la moitié du nombre des caractères bilatéraux (mod D).

IV. Si μ désigne le nombre des classes fondamentales qui appartiennent à des exposants impairs, le nombre des genres est égal à 2^{μ} (*) et ce nombre est aussi celui des caractères bilatéraux k. Donc le nombre des caractères de classes qui sont bilatéraux est égal à celui des genres.

§ 2. *Aucune fonction* L (s, k, χ) *ne s'annule pour* s = 1

15. *Démonstration d'une équation fondamentale.* Multiplions l'équation (16) du n° 10 par $(s-1)$, faisons tendre s vers l'unité et passons à la limite; il viendra, en négligeant des termes qui sont nuls,

$$(1)\quad \lim_{s=1}(s-1)\sum_{q}\chi(q)\frac{k(c_q)+k(c_q^{-1})}{q^s}lq = -\lim_{s=1}(s-1)\frac{L'(s, k. \chi)}{L(s, k, \chi)}.$$

Le second membre est égal à 0, + 1 ou — 1, suivant que $s=1$ est un point ordinaire, un pôle ou un zéro (nécessairement simples) de L (s, k, χ).

16. *Transformation de cette équation.* Désignons, en général, par $q_{c,N}$ les nombres premiers de la forme linéaire $Mx+N$ et

(*) Voir, sur ce point, la *Zahlentheorie* de M. P. Bachmann (1[re] partie) ou nos *Recherches arithmétiques sur la composition des formes* (Mémoires in-8° de l'Académie royale de Belgique, 1896).



d'une forme quadratique de la classe c du genre (N). La somme au premier membre de l'équation (1) ne diffère que par l'ordre des termes de la suivante :

$$(2). \quad . \quad . \quad . \quad \sum_{c,\,N} \left[e\, k(c_q)\, \chi(N) \lim_{s=1} (s-1) \sum_q \frac{lq_{c,\,N}}{q^s_{c,\,N}} \right],$$

dans laquelle $e = 1$ ou 2 selon que c est bilatéral ou non, et où la somme $\Sigma_{c,\,N}$ s'étend à toutes les combinaisons (c, N), lesquelles sont en nombre limité. On tire de là, par (1) :

$$(3) \qquad \sum_{c,\,N} \left[e\, k(c_q)\, \chi(N) \lim_{s=1} (s-1) \sum_q \frac{lq_{c,\,N}}{q^s_{c,\,N}} \right] = 0, +1 \text{ ou } -1,$$

suivant que $s = 1$ est un point ordinaire, un pôle ou un zéro de $L(s, k, \chi)$. En particulier, $s = 1$ étant un pôle dans le cas des caractères principaux, on a

$$(4). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \sum_{c,\,N} \left[e \lim (s-1) \sum_q \frac{lq_{c,\,N}}{q^s_{c,\,N}} \right] = 1.$$

17. *Deux conséquences préliminaires.* En supposant s réel et > 1, on tire de la comparaison des équations (3) et (4) les conclusions suivantes :

1° Si $s = 1$ est un pôle de $L(s, k, \chi)$, la somme $\Sigma_{c,\,N}$ du premier membre de l'équation (3) est égale à la somme des modules de chacun de ses termes. Donc chaque terme séparément est égal à son module, ce qui exige qu'on ait, pour chaque combinaison (c, N), respectivement :

$$k(c)\, \chi(N) = 1, \quad \text{sauf si} \quad \lim (s-1) \sum_q \frac{lq_{c,\,N}}{q^s_{c,\,N}} = 0;$$

2° Si $s = 1$ est un zéro de $L(s, k, \chi)$, cette même somme $\Sigma_{c,\,N}$ est égale en signe contraire à la somme des modules de chacun de ses termes. Donc la même relation a lieu pour chaque terme séparément, ce qui exige qu'on ait pour chaque combinaison (c, N) respectivement :

$$k(c)\, \chi(N) = -1, \quad \text{sauf si} \quad \lim_{s=1} (s-1) \sum_q \frac{lq_{c,\,N}}{q^s_{c,\,N}} = 0.$$

18. Lemme I. *Le groupe des fonctions* L (s, k, χ) *du même caractère* k *ne peut présenter en même temps des pôles et des zéros pour* s = 1. *En d'autres termes, il est impossible que deux fonctions* L (s, k, χ) *formées avec le même caractère* k *aient l'une un pôle et l'autre un zéro pour* s = 1.

Si l'on remarque que tous les nombres premiers q_1 de la forme $Mx + 1$ sont représentables par des formes du déterminant D et que l'on a (2ᵉ partie, n° 69)

$$\lim_{s=1} (s-1) \sum_{q_1} \frac{lq_1}{q_1^s} = \frac{1}{\varphi(M)},$$

on doit admettre qu'il existe au moins une classe c pour laquelle

$$\lim (s-1) \sum_{q} \frac{lq_{c,1}}{q_{c,1}^s} > 0.$$

Appliquons successivement les deux conséquences du numéro précédent. Il viendra, pour cette classe c et pour un caractère χ arbitraire (car $\chi(1) = 1$ quel que soit χ) :

1°) $k(c) = 1$, si L (s, k, χ) a un pôle;

2°) $k(c) = -1$, si L (s, k, χ) a un zéro,

et ces deux conséquences s'excluent pour un même caractère k.

19. Lemme II. *Le groupe des fonctions* L (s, k, χ) *du même caractère* χ *ne peut présenter en même temps des pôles et des zéros pour* s = 1.

Désignons par q_{c^0} les nombres représentables par la classe principale c^0 qui est bilatérale; on a, comme on le sait (3ᵉ partie, n° 25) :

$$\lim_{s=1} (s-1) \sum_{q} \frac{lq_{c^0}}{q_{c^0}^s} = \frac{1}{2h}.$$

Donc il existe au moins une forme $Mx + N$ pour laquelle

$$\lim_{s=1} (s-1) \sum_{q} \frac{lq_{c^0,N}}{q_{c^0,N}^s} > 0.$$

On aura, pour ce nombre N et pour un caractère k arbitraire (car $k(c^0) = 1$ quel que soit k) :

1°) $\chi(N) = 1$, si $L(s, k, \chi)$ a un pôle;
2°) $\chi(N) = -1$, si $L(s, k, \chi)$ a un zéro,

et ces deux conclusions s'excluent pour un même caractère χ.

20. Lemme III. *Le groupe des fonctions* $L(s, k, \chi)$ *du même caractère* χ *ne peut présenter qu'un seul pôle ou un seul zéro pour* $s = 1$ *et, dans ce cas, la fonction qui s'annule ou qui a un pôle est formée avec un caractère* k *bilatéral.*

Additionnons membre à membre toutes les équations qui se déduisent de l'équation (1) du n° 15 par la variation du seul caractère k. Il ne subsistera au premier membre que les nombres premiers q_{c_0} représentables par la classe principale, et l'on aura l'équation

$$2h \lim_{s=1} (s-1) \sum_q \chi(q_{c_0}) \frac{lq_{c_0}}{q_{c_0}^s} = -\lim_{s=1} (s-1) \underset{k}{S} \frac{L'(s, k, \chi)}{L(s, k, \chi)}.$$

Le premier membre, où l'on peut supposer s réel et > 1, ne peut surpasser en valeur absolue la somme des modules de ses termes, qui est

$$2h \lim_{s=1} (s-1) \sum_q \frac{lq_{c_0}}{q_{c_0}^s} = 1.$$

Les zéros et les pôles s'excluant (n° 19), le second membre est égal, au signe près, au nombre des fonctions successives $L(s, k, \chi)$ qui ont un zéro ou un pôle pour $s = 1$ quand on donne successivement à k toutes ses valeurs. Il ne peut donc y en avoir qu'une seule et, si elle existe, elle correspond à un caractère k bilatéral, sans quoi deux fonctions successives mais égales $L(s, k, \chi)$ et $L(s, k^{-1}, \chi)$ auraient un zéro ou un pôle pour $s = 1$.

21. Théorème. *Aucune fonction* $L(s, k, \chi)$ *ne s'annule pour* $s = 1$. *Celles qui ont un pôle sont formées avec un caractère* k

bilatéral et à tout caractère k *bilatéral correspondent deux caractères* χ *et* χ' *et deux seulement pour lesquels* L (s, k, χ) *a un pôle pour* s = 1.

Additionnons toutes les équations qui se déduisent de (1) par la variation du seul caractère χ. Il ne subsistera dans la somme du premier membre que les nombres premiers q_1 de la forme $Mx + 1$ et l'on aura

$$\varphi(M) \lim_{s=1} (s-1) \sum_{q} [k(c_q) + k(c_q^{-1})] \frac{lq_1}{q_1^s} = -\lim (s-1) \underset{\chi}{S} \frac{L'(s,k,\chi)}{L(s,k,\chi)}.$$

En vertu du lemme III, $L(s,k,\chi)$ n'a de zéro ou de pôle que si k est bilatéral. Supposons donc que k soit un caractère bilatéral; on aura pour tous les nombres q_1 de la forme $Mx + 1$

$$k(c_q) = k(c_q^{-1}) = 1,$$

car c_q et c_q^{-1} sont des classes du genre principal, et par conséquent formées par duplication. Le premier membre de l'équation se réduit donc à

$$2\varphi(M) \lim (s-1) \sum_{q} \frac{lq_1}{q_1^s} = 2,$$

en vertu des conclusions de la seconde partie (n° 69). Il y a par conséquent, au second membre, puisque les zéros et les pôles s'excluent, deux fonctions seulement $L(s,k,\chi)$ et $L(s,k,\chi')$ qui ont un pôle pour $s = 1$ et aucune n'a de zéro. Le théorème est donc démontré.

§ 3. *Détermination des fonctions* L (s, k, χ) *qui ont un pôle*

22. Théorème. *Étant donné un caractère* k *bilatéral, les deux caractères* χ *et* χ' *pour lesquels* L (s, k, χ) *a un pôle sont des caractères bilatéraux* (mod D).

Soit d'abord N un nombre pour lequel $\left(\frac{D}{N}\right) = 1$. Multiplions l'équation (1) par $\chi(N)$ et sommons par rapport à tous les caractères bilatéraux (mod D), qui sont tous compris au nombre des

caractères (mod M) puisque D divise M. La somme accentuée,

$$\underset{\chi}{S'}\chi(qN),$$

étendue à ces caractères bilatéraux (mod D) sera nulle, sauf pour les nombres q' dont le produit qN est résidu quadratique de D, c'est-à-dire ceux qui sont représentables par les formes du genre (N) (en particulier, tous ceux de la forme $Mx + N$).

Si l'on suppose que k soit bilatéral, le caractère $k(c)$ conserve la même valeur pour toutes les classes du genre (N), que nous désignerons en général par c_N, car elles dérivent toutes de la combinaison de l'une d'elles avec des classes du genre principal qui sont formées par duplication.

Il vient donc, en désignant par g le nombre des genres et en général par $2g$ le nombre des caractères bilatéraux (mod D), qui est égal au double du nombre des genres,

$$(5). \quad . \quad . \quad . \quad 2(2g)k(c_N)\lim_{s=1}(s-1)\sum_{q}\frac{lq'}{q'^s} = S''\chi(N),$$

où la somme S'' du second membre s'étend aux caractères bilatéraux χ (mod D) pour lesquels $L(s, k, \chi)$ a un pôle et dont il existe au plus deux pour un même k.

Si l'on désigne maintenant par N' un nombre pour lequel $\left(\frac{D}{N'}\right) = -1$ et si l'on remplace N par N' dans le calcul que nous venons de faire, le premier membre de l'équation (5) sera remplacé par zéro car le genre (N') n'existe pas, et l'on aura

$$(6). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 0 = S''\chi(N').$$

En vertu de (5), la somme S'' renferme au moins un terme, car le premier membre de (5) ne peut être nul; en vertu de (6), il en renferme au moins deux, sans quoi le second membre de (6) ne pourrait être nul.

Si k est bilatéral, il y a donc au moins deux caractères bilatéraux χ et χ' (mod D) pour lesquels $L(s, k, \chi)$ et $L(s, k, \chi')$ ont un pôle. Il ne peut y en avoir d'autres, même (mod M), en vertu de 21. Donc le théorème est démontré.

23. Théorème. *A tout caractère bilatéral* χ (mod D) *correspond un caractère bilatéral* k *pour lequel* L (s, k, χ) *a un pôle.*

Bornons-nous à la considération des caractères bilatéraux. On sait que le nombre des genres est alors égal au nombre des caractères de classes et à la moitié des caractères (mod D). Donc le nombre des caractères k est la moitié de celui des caractères χ (mod D). A tout caractère k correspondent deux caractères χ pour lesquels $L(s, k, \chi)$ a un pôle (n° 22), et à un caractère χ ne peut correspondre qu'un seul caractère k (n° 20). Donc la série des fonctions qui ont un pôle épuise la série des caractères k et χ (mod D) qui sont bilatéraux.

24. Corollaire. *La fonction* Q (s, c, χ) *a un pôle si* χ *est un caractère bilatéral* (mod D) *et n'en a un que dans ce cas.*

La première partie a été établie au n° 9. Pour prouver la seconde, multiplions par $k(c)^{-1}$ l'équation suivante :

$$L(s, k, \chi) = \sum_{i=1}^{h} k(c_i)\, Q(s, c_i, \chi),$$

et sommons par rapport aux caractères k; il viendra, en intervertissant l'ordre des deux membres,

$$ehQ(s, c, \chi) = \underset{k}{\mathrm{S}}\, k(c)^{-1}\, L(s, k, \chi)$$

et le second membre ne peut avoir de pôles que si χ est un caractère bilatéral (mod D), comme on l'a vu au n° 22.

§ 4. *Infinité des nombres premiers* $\mathrm{q}_{c,N}$

25. Revenons à l'équation (1) du paragraphe précédent, savoir

$$(1)\quad \lim_{s=1}(s-1)\sum_{q}\chi(q)\frac{k(c_q)+k(c_q^{-1})}{q^s}lq = -\lim_{s=1}(s-1)\frac{L'(s, k, \chi)}{L(s, k, \chi)};$$

multiplions-la par $\chi(N)^{-1}$ et sommons par rapport à tous les

caractères χ ; il ne subsistera au premier membre que les nombres premiers q_N de la forme $Mx + N$ et l'on trouvera :

1° Si k est un caractère non bilatéral, auquel cas aucune fonction $L(s, k, \chi)$ n'a de pôles au second membre (n° 21) :

$$(2^a). \quad . \quad . \quad \varphi(M) \lim_{s=1} (s-1) \sum_q [k(c_q) + k(c_q^{-1})] \frac{lq_N}{q_N^s} = 0;$$

2° Si k est un caractère bilatéral, auquel cas deux fonctions $L(s, k, \chi)$ et $L(s, k, \chi')$ ont un pôle (n° 21) :

$$(2^b) \quad \varphi(M) \lim_{s=1} (s-1) \sum_q [k(c_q) + k(c_q^{-1})] \frac{lq_N}{q_N^s} = \chi(N)^{-1} + \chi'(N)^{-1}.$$

Mais k étant bilatéral, $k(c)$ conserve la même valeur pour toutes les classes du genre (N), que nous représenterons en général par c_N ; on a donc dans la dernière équation

$$k(c_q) = k(c_q^{-1}) = k(c_N)$$

et l'équation elle-même devient

$$2k(c_N)\, \varphi(M) \lim_{s=1} (s-1) \sum \frac{lq_N}{q_N^s} = \chi(N)^{-1} + \chi'(N)^{-1}.$$

On en déduit par les théorèmes de la seconde partie (n° 69) et en se rappelant que χ et χ' sont bilatéraux (n° 22),

$$2k(c_N) = \chi(N)^{-1} + \chi'(N)^{-1} = \chi(N) + \chi'(N).$$

Donc, puisque tous ces caractères sont égaux à ± 1,

$$(3). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \chi(N) = \chi'(N) = k(c_N).$$

26. Soit maintenant c une classe du genre (N); multiplions les équations (2) du numéro précédent par $k(c)^{-1}$ et sommons par rapport à tous les caractères k; il viendra

$$eh\, \varphi(M) \lim_{s=1} (s-1) \sum_q \frac{lq_{c,N}}{q_{c,N}^s} = \mathop{S}_k k(c)^{-1} [\chi(N)^{-1} + \chi'(N)^{-1}],$$

relation dans laquelle $e = 2$ ou 1 suivant que la classe c est ou

n'est pas bilatérale, et où la somme du second membre s'étend à tous les caractères k bilatéraux. On remarquera que les deux caractères χ et χ' au second membre de cette équation dépendent de k et sont les deux caractères bilatéraux pour lesquels $L(s, k, \chi)$ a un pôle. Donc, en vertu des relations (3), chaque terme du second membre est égal à 2; le nombre des termes est égal à celui des caractères k bilatéraux, c'est-à-dire à celui des genres et, par conséquent, en désignant par g le nombre des genres, il vient

$$(4). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad eh\,\varphi(\mathrm{M}) \lim_{s=1} (s-1) \sum_q \frac{lq_{c,\mathrm{N}}}{q^s_{c,\mathrm{N}}} = 2g.$$

Cette équation prouve qu'il existe une infinité de nombres $q_{c,\mathrm{N}}$ d'une forme linéaire $\mathrm{M}x + \mathrm{N}$ et en même temps d'une forme quadratique de la classe c du genre (N). La fréquence de ces nombres est la même pour toutes les classes c bilatérales, la même aussi pour toutes les classes c non bilatérales, mais elle est moitié moindre dans le premier cas que dans le second. Ce résultat va se préciser encore au chapitre suivant.

CHAPITRE III

LOIS ASYMPTOTIQUES

27. Théorème. *Aucune des fonctions* $\mathrm{L}(\mathrm{s}, \mathrm{k}, \chi)$ *n'a de racines de la forme* $1 + \beta\mathrm{i}$.

Considérons l'expression

$$-\lim_{s=1+\beta i} (s-1-\beta i) \frac{\mathrm{L}'(s, k, \chi)}{\mathrm{L}(s, k, \chi)} = \lim_{s=1} (s-1) \sum_q \chi(q) \frac{k(c_q) + k(c_q)^{-1}}{q^{s+\beta i}} lq;$$

elle est égale à zéro ou à $(-\lambda)$ suivant que $s = 1 + \beta i$ est un point ordinaire ou un zéro de degré λ de $\mathrm{L}(s, k, \chi)$.

Additionnons toutes les équations qui se déduisent de la précédente par la variation du caractère k seul. Il ne subsistera au second membre que les nombres premiers q_{c_0} représentables par

la classe principale. On trouvera donc

$$(1). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad - \sum \lambda = 2h \lim_{s=1} (s-1) \sum_q \chi(q) \frac{lq_{\infty}}{q_{\infty}^{s+\beta i}},$$

où $\Sigma\lambda$ est la somme des ordres de multiplicité des zéros $(1+\beta i)$ pour les fonctions qui se déduisent successivement de $L(s, k, \chi)$ par la permutation de k La somme du second membre, où l'on peut supposer s réel et > 1, ne peut surpasser la somme des modules de ses termes :

$$(2). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2h \lim_{s=1} (s-1) \sum_q \frac{lq_{\infty}}{q_{\infty}^{s}} = 1,$$

et, par conséquent, une seule au plus des fonctions $L(s, k, \chi)$ s'annule dans la série considérée et elle n'a, dans ce cas, qu'un zéro simple. Enfin, si cette fonction existe, elle doit être formée avec un caractère k bilatéral, sans quoi, les deux fonctions identiques $L(s, k, \chi)$ et $L(s, k^{-1}, \chi)$ s'annulant ensemble, deux fonctions s'annuleraient dans la série que l'on considère.

Montrons maintenant que ces dernières hypothèses elles-mêmes sont impossibles. Pour cela, ajoutons ensemble les équations (1) et (2) en faisant $\Sigma\lambda = 1$ dans la première et en y intervertissant l'ordre des deux membres; supposons s réel et négligeons la partie imaginaire; il viendra, en se rappelant que $\chi(q)$ est toujours réel pour un caractère bilatéral,

$$2h \lim_{s=1} (s-1) \sum_q [1 + \chi(q) \cos \beta lq] \frac{lq_{\infty}}{q_{\infty}^{s}} = 0.$$

Tous les termes sont positifs; en les multipliant respectivement par $1 - \chi(q) \cos \beta lq$, qui est compris entre 0 et 2, et en observant que

$$2[1 + \chi(q) \cos \beta lq][1 - \chi(q) \cos \beta lq] = 1 - \cos 2\beta lq,$$

on trouvera aussi

$$2h \lim_{s=1} (s-1) \sum_q (1 - \cos 2\beta lq) \frac{lq_{\infty}}{q_{\infty}^{s}} = 0.$$

Mais cette équation est impossible, car si l'on change β en 2β et χ en χ_0 dans les équations (1) et (2), et si l'on soustrait ces

équations l'une de l'autre, après avoir interverti l'ordre des deux membres de la première, on trouve, en négligeant la partie imaginaire,

$$2h \lim_{s=1} (s-1) \sum_{q} (1-\cos 2\beta lq) \frac{lq_{c0}}{q_{c0}} = 1 + \sum \lambda.$$

Le second membre est égal à *un* ou à *deux* suivant que $s = 1 + 2\beta i$ est un point ordinaire ou un zéro pour une des fonctions $L(s, k, \chi_0)$, mais il ne peut être nul. Donc, etc.

28. Nous avons maintenant étendu aux fonctions $L(s, k, \chi)$ toutes les propriétés des fonctions $L(s, k)$ et $Z(s, \chi)$ sur lesquelles repose l'analyse complémentaire des parties précédentes du Mémoire. Cette analyse s'étend donc aussi au cas actuel. Nous nous contenterons d'en indiquer les conclusions qui se déduisent par analogie à simple vue de la formule (4) qui termine le chapitre précédent.

Soient h le nombre des classes (positives) proprement primitives, g le nombre des genres et, par conséquent, $\frac{h}{g}$ le nombre des classes d'un même genre; désignons par $q_{c,N}$ les nombres premiers de la forme linéaire $Mx + N$ et d'une forme quadratique de la classe c du genre (N). On a les théorèmes suivants :

1° *L'expression*

$$\frac{e\varphi(M)}{2} \left(\frac{h}{g}\right) \frac{1}{y} \sum_{q<y} lq_{c,N}$$

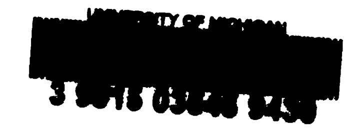
où la somme s'étend aux nombres $q_{c,N}$ *qui sont* $< y$ *et où* e *est égal à* 2 *ou à* 1 *selon que la classe* c *est ou n'est pas bilatérale, a pour limite l'unité quand* y *tend vers l'infini.*

2° *Le nombre des nombres premiers* $q_{c,N}$ *qui sont* $< y$ *peut se représenter par l'expression*

$$(1+\varepsilon) \frac{2}{e\left(\frac{h}{g}\right)\varphi(M)} \frac{y}{ly},$$

où ε *est infiniment petit pour* y *infiniment grand.*

FIN DE LA SECONDE PARTIE.


UNIVERSITY OF MICHIGAN



